„Technische Thermodynamik“

Prof. Dr.-Ing. habil. Egon Hassel

Universität Rostock

Lehrstuhl für Technische Thermodynamik

8. Februar 2010

Inhalt

Wärmeübertragung: Einleitung

Weil es leider doch immer Probleme mit dem Schrift-Font auf verschiedenen Rechnern gibt, wird jetzt doch lieber mit t für die Celsius-Temperatur gearbeitet:

also:

$\vartheta = t$ (C) oder $\vartheta = T$ (K)

Wärmeübertragung: Einleitung

Bisher haben wir in der Thermodynamik das Gleichgewicht besprochen. Die zeitliche Entwicklung spielte keine Rolle.

Die Wärmeübertragung hat zum Ziel, die Apparate, die zur Übertragung von Wärme dienen, zu verstehen und zu optimieren.

Die Wärmeübertragung erfolgt (nur) durch

> Wärmeleitung,
>
> Konvektion,
>
> Strahlung.

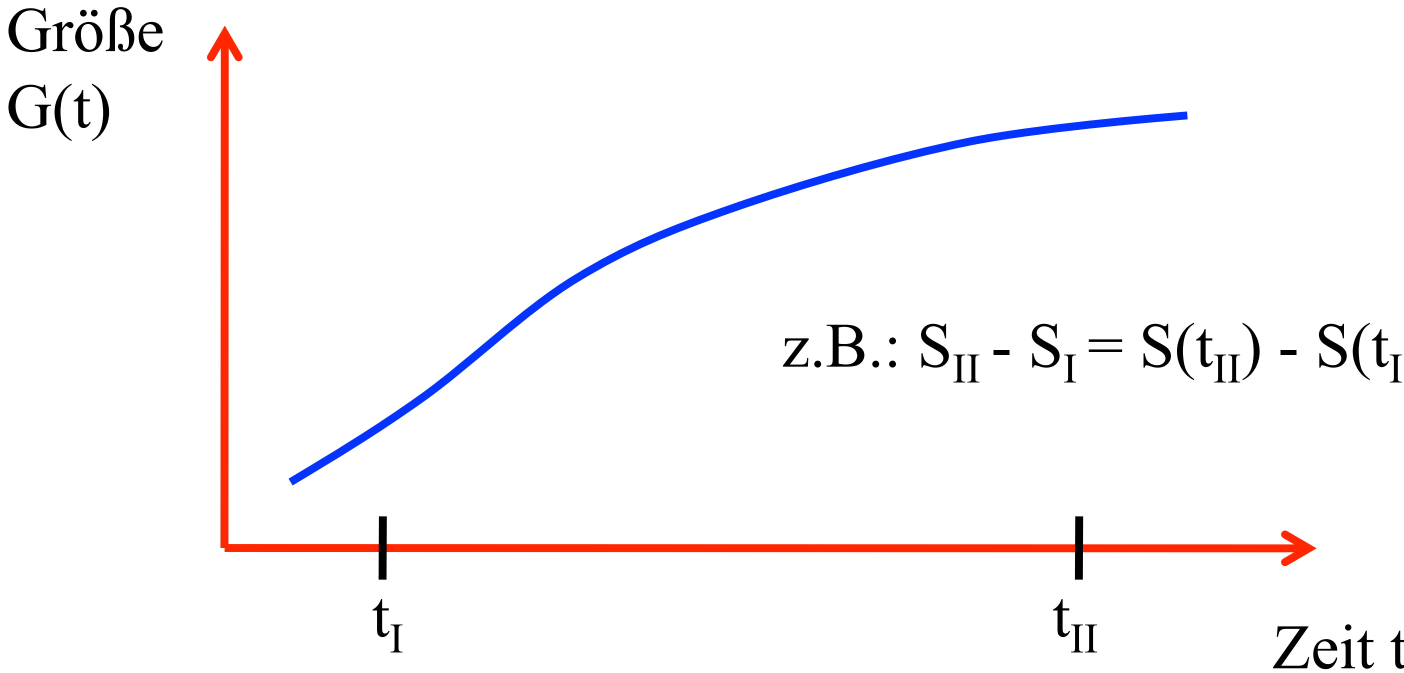
Wärmeübertragung: Einleitung

Wärmeleitung und Strahlung sind physikalische Phänomene, auch mikroskopisch.

Konvektion ist eine technische Kathegorie zur Subsummierung von Detailphänomen, die man nicht auflösen kann oder möchte. Die Konvektion und konvektive Wärmeübetragung ist eng mit der Strömungsmechanik und hier besonders mit der Grenzschicht-theorie verbunden.

Wärmeübertragung: Einleitung

Bisher haben wir in der Thermodynamik das Gleichgewicht besprochen. Die zeitliche Entwicklung spielte keine Rolle.

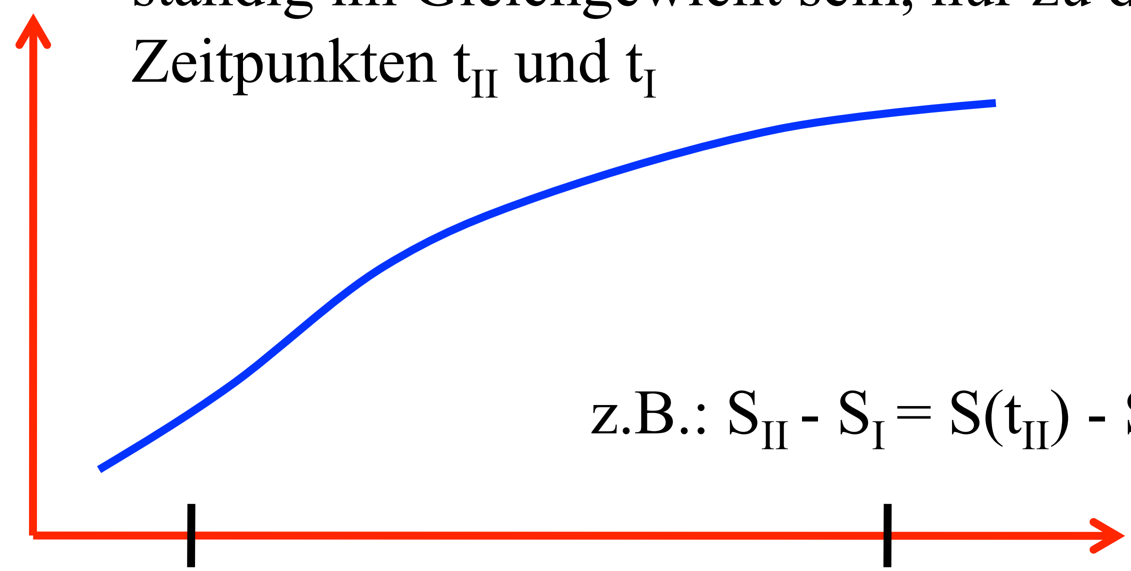


z.B.: $S_{II} - S_I = S(t_{II}) - S(t_I)$

Wärmeübertragung: Einleitung

Bisher haben wir in der Thermodynamik das Gleichgewicht besprochen. Die zeitliche Entwicklung spielte keine Rolle.

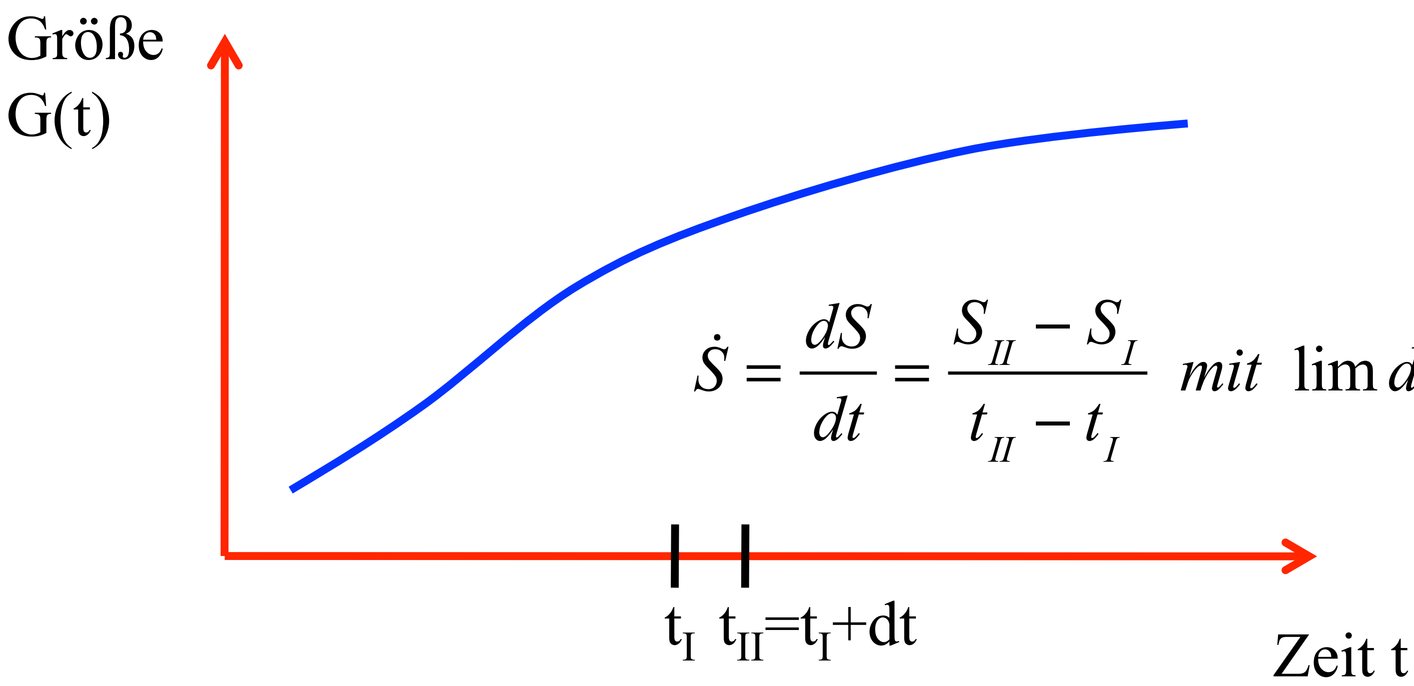
Das System auf der blauen Kurve muss nicht ständig im Gleichgewicht sein, nur zu den Zeitpunkten t_{II} und t_I



z.B.: $S_{II} - S_I = S(t_{II}) - S(t_I)$

Wärmeübertragung: Einleitung

Wenn wir zusätzliche verlangen, dass das System auf der ganzen blauen Kurve im Gleichgewicht ist, kann man auch die System-entwicklung mit der Thermodynamik verfolgen, wenn man (infinitesimale) Schritte macht:

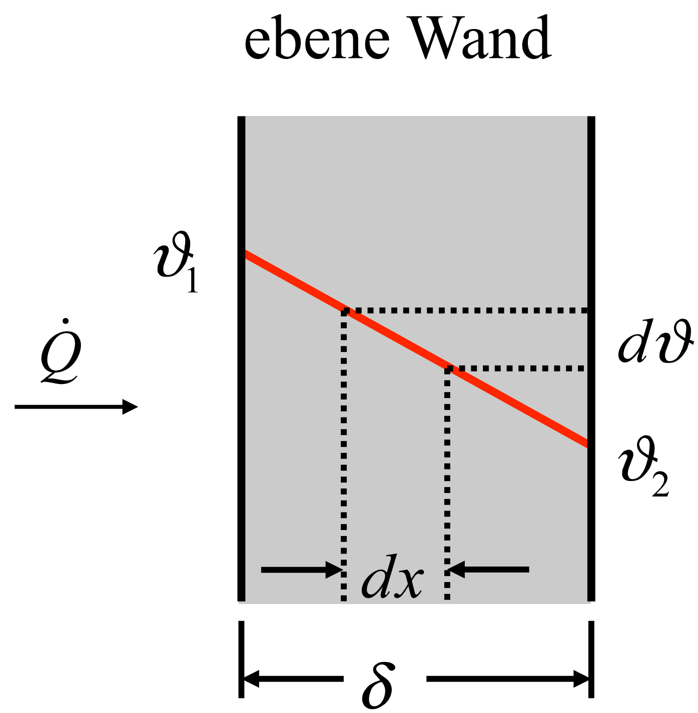


$$\dot{S} = \frac{dS}{dt} = \frac{S_{II} - S_{I}}{t_{II} - t_{I}} \quad mit \;\; \lim dt \to 0$$

Stationäre Wärmeleitung

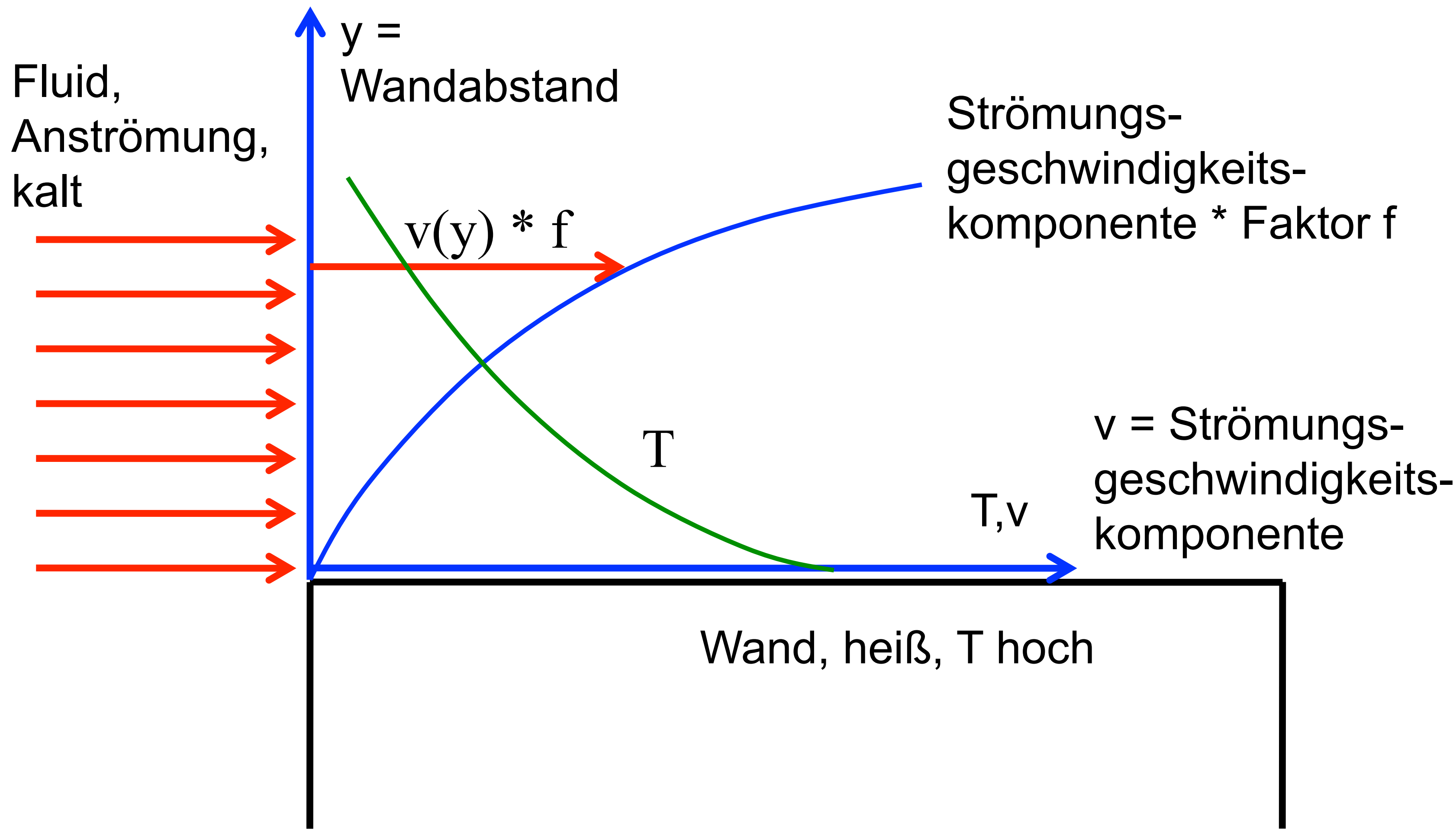
Fourier´scher Erfahrungssatz:

$$\boxed{Q = \lambda \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\delta} A\tau}$$

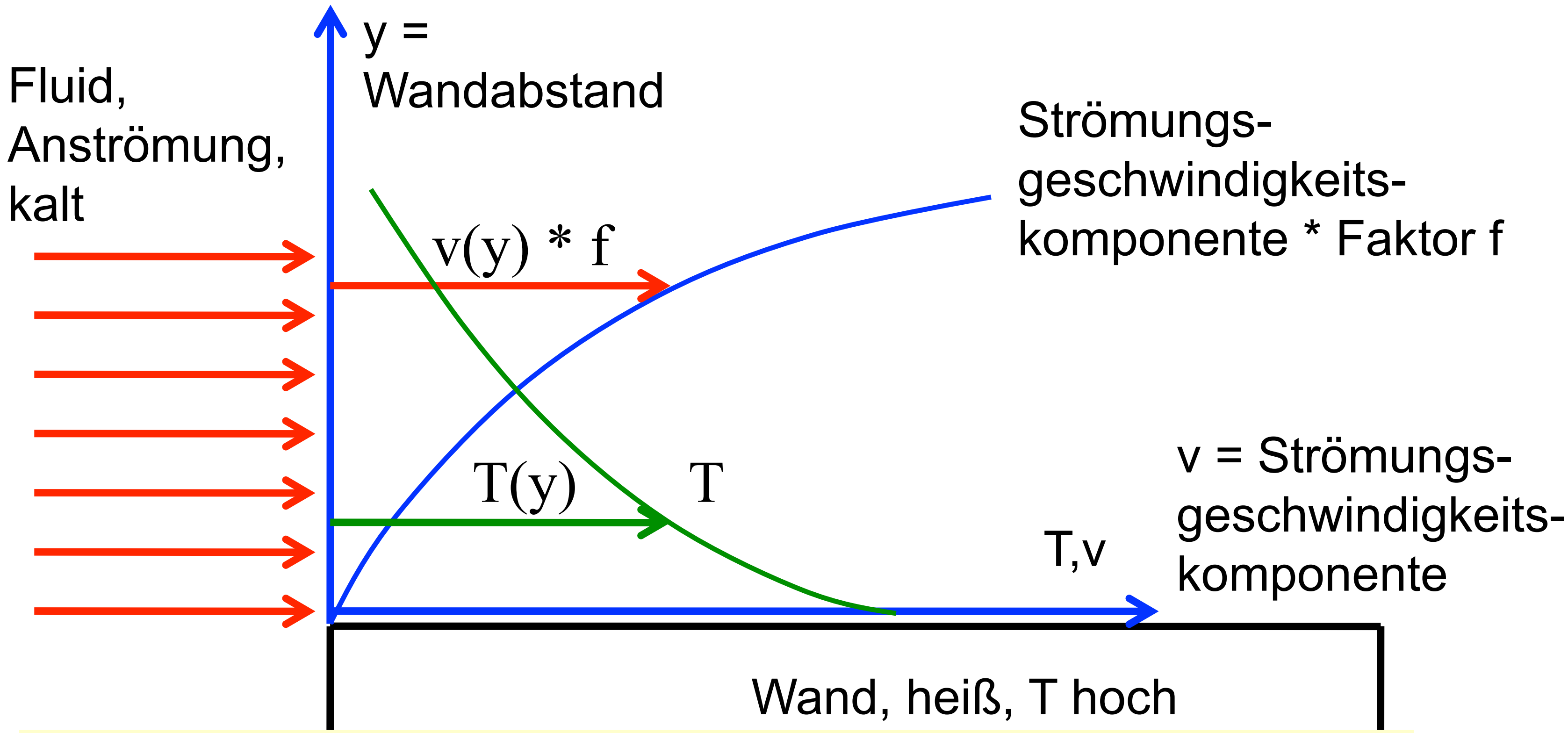


Q	=	Wärmemenge in J
A	=	Fläche in m^2
τ	=	Zeit in s
δ	=	Dicke in m
$\vartheta_1 - \vartheta_2$	=	Temperaturunterschied in K

Konvektiver Wärmeübergang von Wand auf Fluid



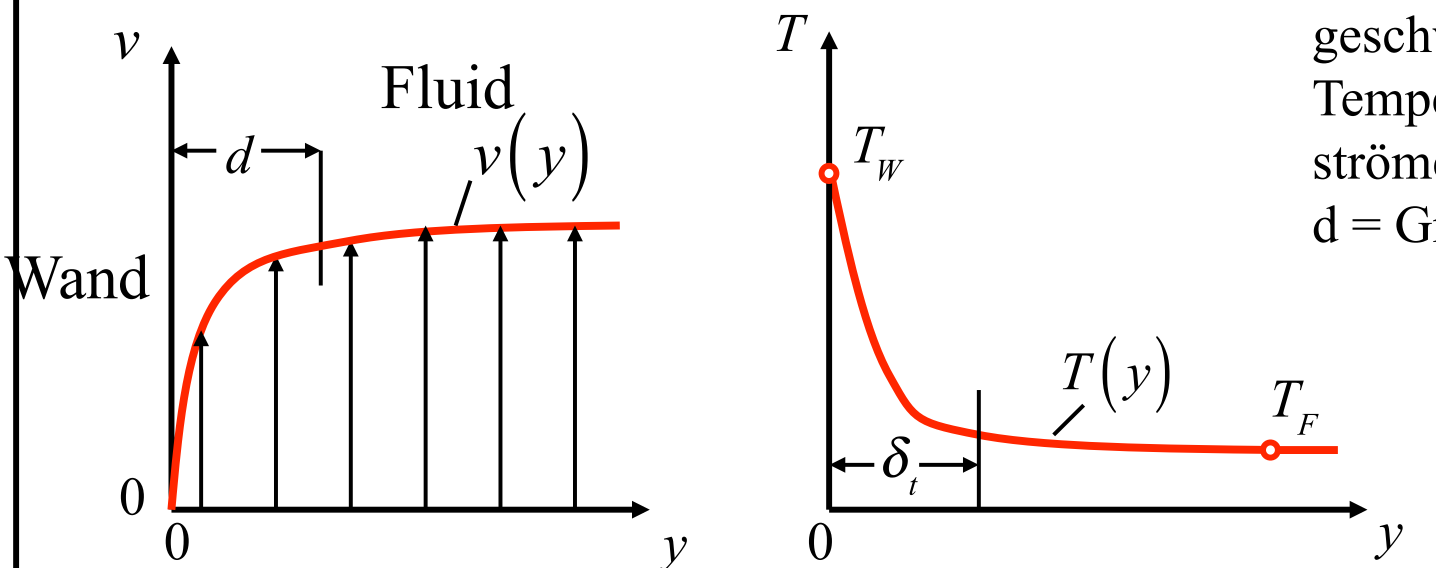
Konvektiver Wärmeübergang von Wand auf Fluid



Wärme fliesst von heisser Wand zu kaltem Fluid durch Geschwindigkeits- und Temperaturgrenzschichten, dies nennt man konvenktiven Wärmeübergang

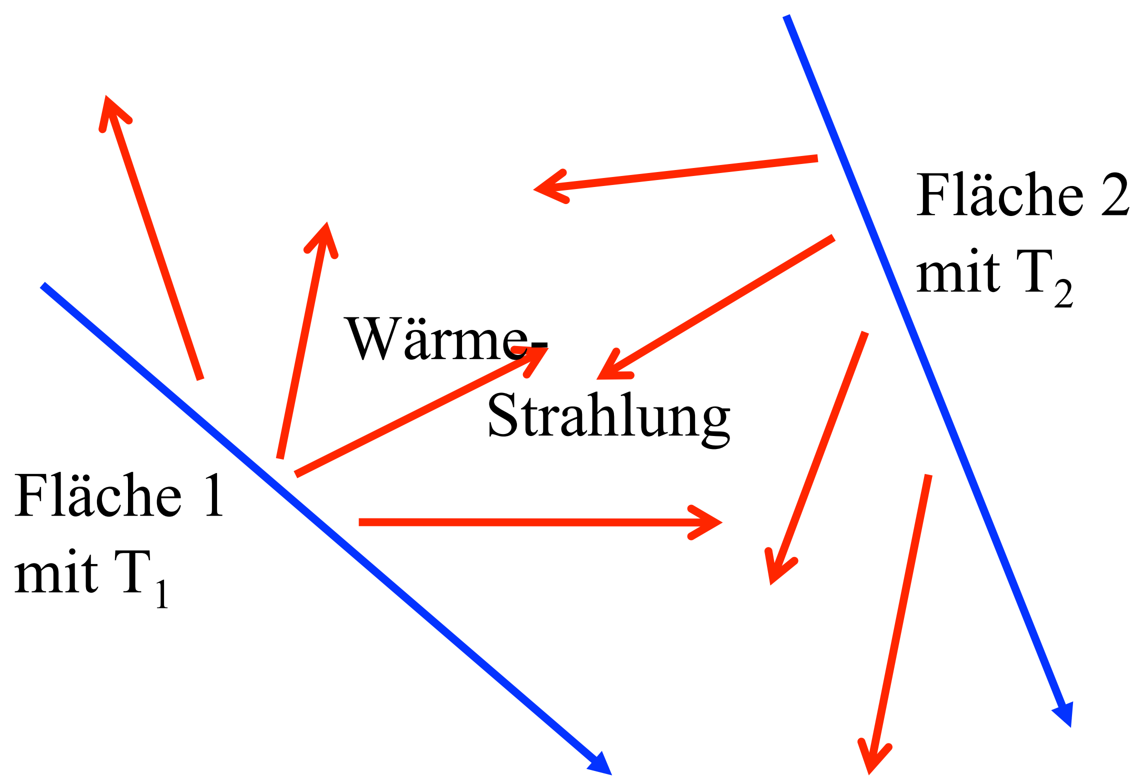
Konvektiver Wärmeübergang

- Konvektiver Wärmeübergang bezeichnet die Wärmeübertragung zwischen einer festen Wand und einem Fluid.
- Besonders wichtig sind hierbei die Grenzschichten in Wandnähe.



Strömungs-geschwindigkeit v und Temperatur T eines strömenden Fluids;
d = Grenzschichtdicke

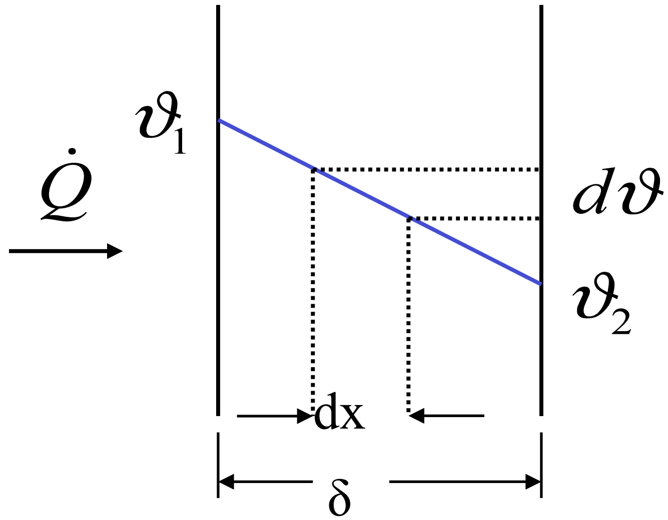
Wärmestrahlung



Jeder Körper mit einer Temperatur T strahlt elektromagnetische Strahlung ab proportional T^4

Wärmeleitung

Stationäre Wärmeleitung



$\vartheta =$

Temperatur in C

Fourier'scher Erfahrungssatz:

$$Q = \lambda \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\delta} A t$$

Q = Wärmemenge [J]
A = Fläche [m^2]
t = Zeit [s]
δ = Dicke [m]

Stationäre Wärmeleitung

$\boxed{\lambda = \text{Wärmeleitzahl [W/mK]}}$ Materialgröße

- Wenn der Temperaturverlauf zeitlich konstant ist, spricht man von einer stationären Wärmeleitung.
- Wenn λ = zeitl u. örtl. const. => linearer ϑ – Verlauf in der Wand.

$$\dot{Q} = \frac{Q}{t} = \text{Wärmemenge pro Zeit} = \text{Leistung [W]}$$

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{A} = \frac{Q}{At} = \lambda \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\delta} =$$ pro Zeit u. Flächeneinheit fließende Wärme = Wärmestromdichte [W/m²]

Stationäre Wärmeleitung

$\dot{Q} = \frac{Q}{t} =$ Wärmemenge pro Zeit = Leistung [W]

$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{A} = \frac{Q}{At} = \lambda \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\delta} =$ pro Zeit u. Flächeneinheit fließende Wärme = Wärmestromdichte [W/m²]

Wärmestromdichte nach Fourier: $\boxed{\dot{q} = \lambda \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\delta} \left[\frac{J}{s\, m^2} \right]}$

Stationäre Wärmeleitung

$\dot{Q} = \frac{Q}{t} =$ Wärmemenge pro Zeit = Leistung [W]

Wärmestromdichte nach Fourier: $\dot{q} = \lambda \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\delta} \left[\frac{J}{s\, m^2} \right]$

Oder in differentieller Form:

$$\boxed{\dot{q} = -\lambda \frac{d\vartheta}{dx}}$$

Fourier'sches Wärmeleitungs-Gesetz

Noch genauer:

$$\underline{\dot{q}}\left(\underline{r},t\right) = -\underline{\underline{\lambda}}\left(T\left(\underline{r},t\right)\right)\frac{\partial}{\partial \underline{r}}\vartheta\left(\underline{r},t\right)$$

Stationäre Wärmeleitung

Fourier'sches Wärmeleitungs-Gesetz in allgemeiner Form

$$\underline{\dot{q}}\left(\underline{r},t\right)=-\underline{\underline{\lambda}}\left(T\left(\underline{r},t\right)\right)\frac{\partial}{\partial\underline{r}}\vartheta\left(\underline{r},t\right)$$

Die Wärmestrom-Dichte ist ein Vektor

Gradient

Diese Gleichung gilt exakt an jedem Ort zu jeder Zeit

d.h. auch instationär

Stationäre Wärmeleitung

Fourier'sches Wärmeleitungs-Gesetz in allgemeiner Form

$$\underline{\dot{q}}\left(\underline{r},t\right)=-\underline{\underline{\lambda}}\left(T\left(\underline{r},t\right)\right)grad\left(\vartheta\left(\underline{r},t\right)\right)$$

Tensor (z.B. bei Holz)

Stationäre Wärmeleitung

- λ ist ein Skalar, falls das Material isotrop ist. D.h., λ ist von Ort zu Ort verschieden (nicht homogen) aber an einem bestimmten Ort ist es richtungsunabhängig (isotrop).
- Gegenbeispiel: Holz
  Holz leitet Wärme quer zur Faser besser als in Richtung der Faser.
- In solchen Materialien ist λ ein Tensor 2. Stufe.

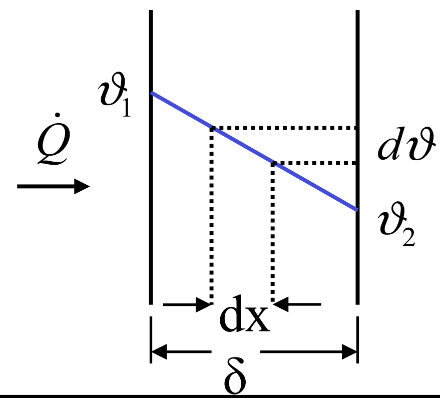
Stationäre Wärmeleitung

Fourier'sches Wärmeleitungs-Gesetz in allgemeiner Form

$$\underline{\dot{q}}\left(\underline{r},t\right)=-\underline{\underline{\lambda}}\left(T\left(\underline{r},t\right)\right)\frac{\partial}{\partial \underline{r}}\vartheta\left(\underline{r},t\right)$$

Das negative Vorzeichen beruht auf Konvention:

Ein negativer Gradient bewirkt einen Wärmestrom von links nach rechts

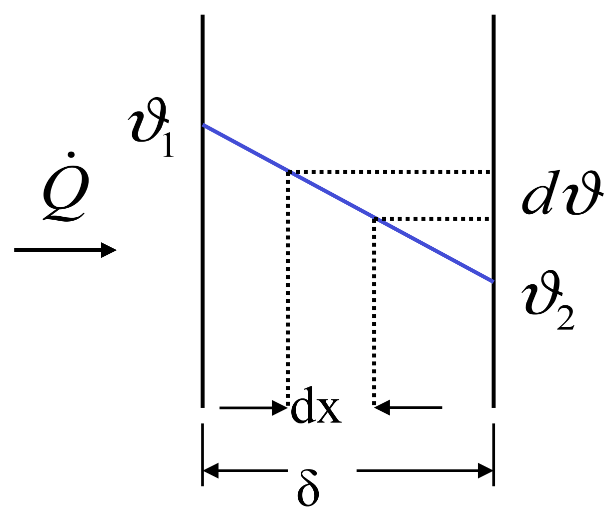


Stationäre Wärmeleitung

Fourier'sches Wärmeleitungs-Gesetz in allgemeiner Form

$$\underline{\dot{q}}\left(\underline{r},t\right)=-\underline{\underline{\lambda}}\left(T\left(\underline{r},t\right)\right)\frac{\partial}{\partial\underline{r}}\vartheta\left(\underline{r},t\right)$$

ist
allgemeingültig



Stationäre Wärmeleitung

- Oder in differentieller Form: $$\boxed{\dot{q} = -\lambda \frac{d\vartheta}{dx}}$$

- Ein Temperaturgradient $d\vartheta / dx$ bewirkt die Wärmestromdichte $\dot{q}$ in Richtung <u>fallender</u> Temperatur, daher neg. Vorzeichen.
- λ = stoffspezifische Größe, welche die zwischenmolekularen Wärmetransporteigenschaften angibt.

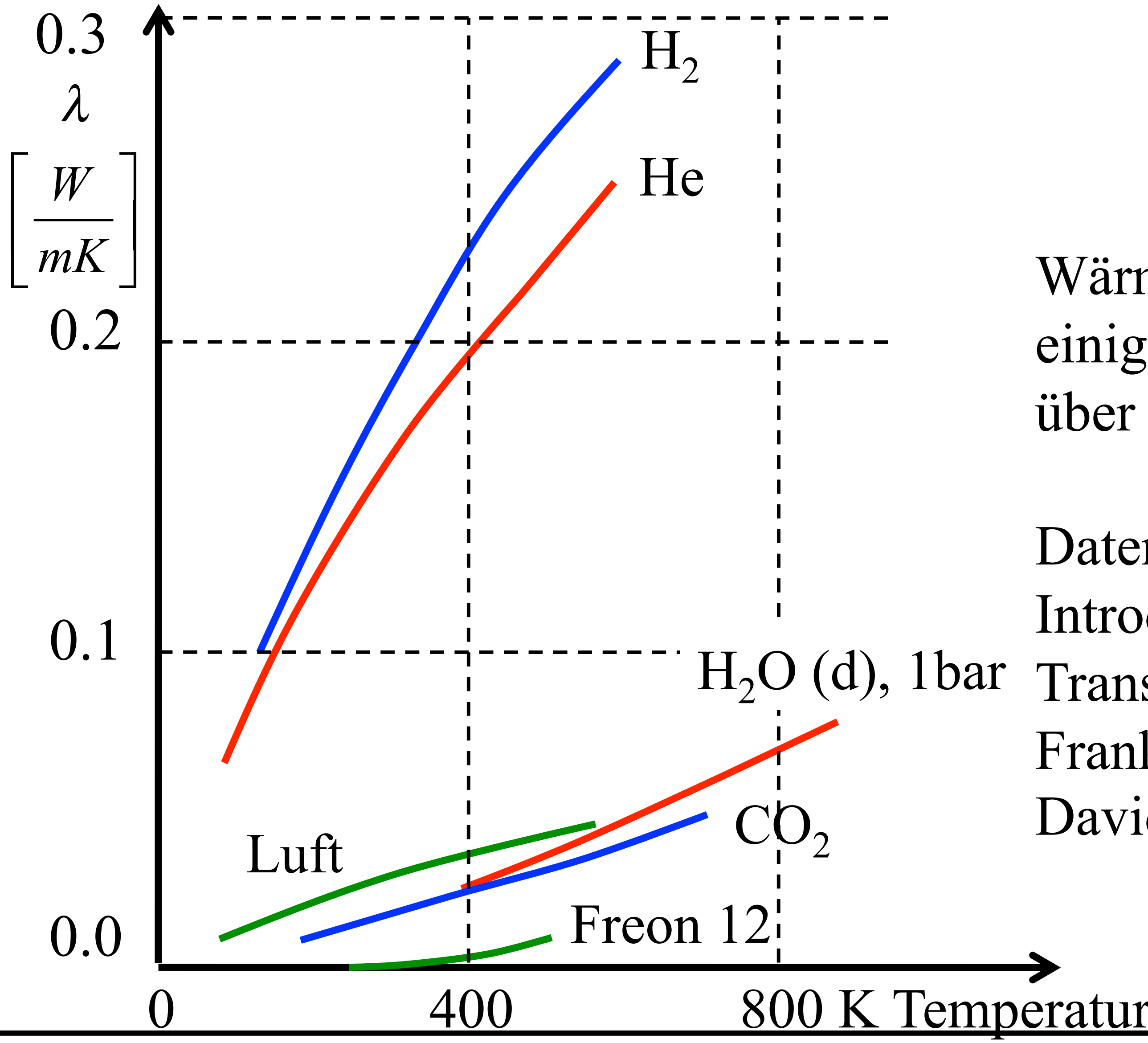
- λ ist im allgemeinen schwach vom Druck, aber stark von der Temperatur abhängig. Bei kleinen Temperaturdifferenzen kann man λ als konstant betrachten.
- λ ist bei Gemischen von der Zusammensetzung abhängig.

Stationäre Wärmeleitung

Wärmeleitfähigkeit λ ausgewählter Stoffe bei 20 °C und 100 kPa in W/mK:

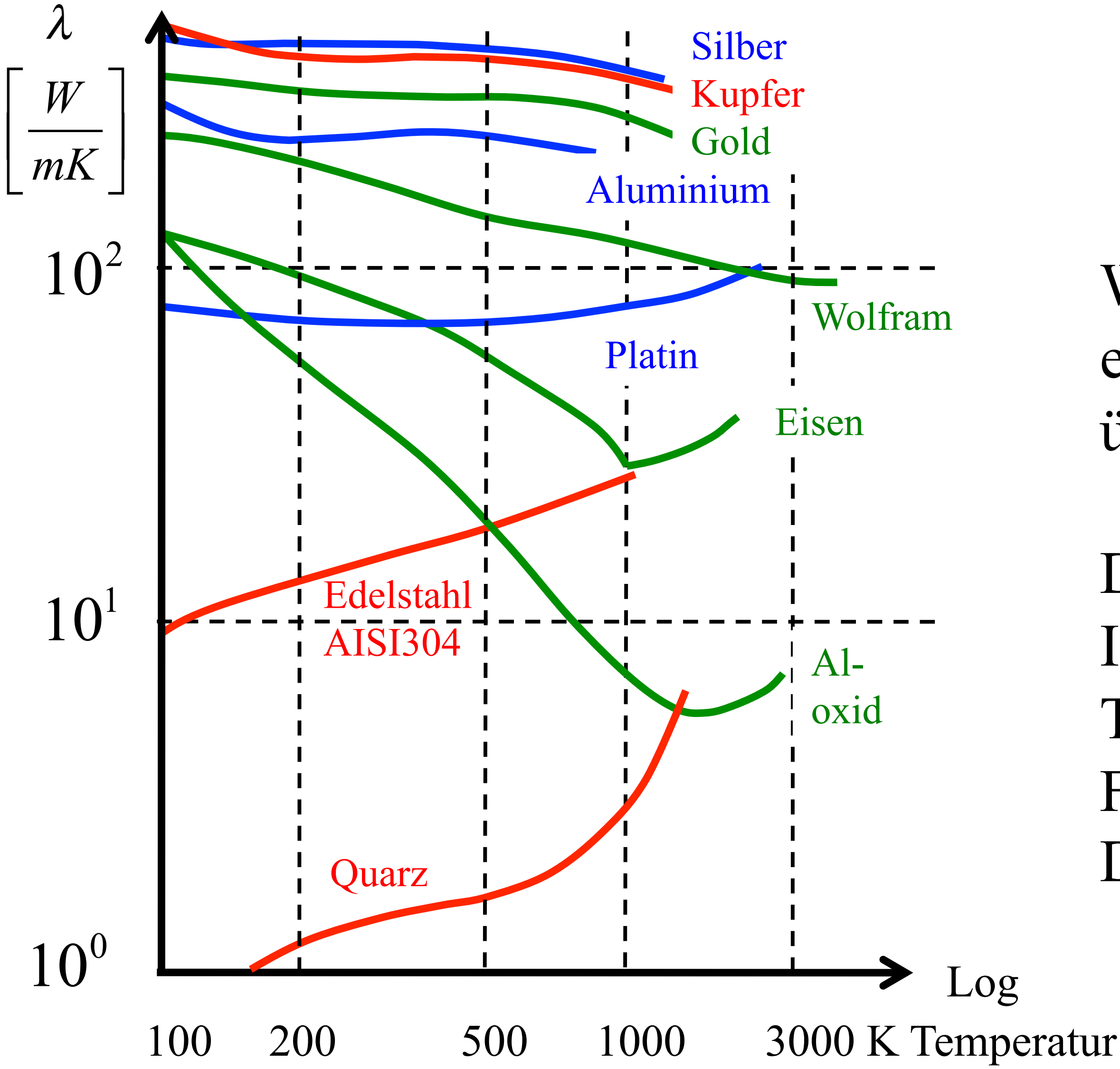
Stahl, je nach Legierung:	15-58	Wassereis (-20 C):	2.33
Wärmeleitpaste:	4.-10.	Wasser (liq):	0.58
Glas:	0.76	Wasserstoff (g):	0.18
Holz senkrecht zur Faser:	0.1-0.2	Methan:	0.034
Kupfer rein:	401.	Kohelstoffnanoröhren:	6000.
Kupfer Handelsware:	230	Diamant:	2300.
Silber:	429.		
Eisen:	80.		
Mauern:	0.5…1.3		
Schaumstoff:	0.02…0.09		
Wasser (liq):	0.598		
Luft:	0.0257		

Daten teilweise von wikipedia und engineeringtoolbox



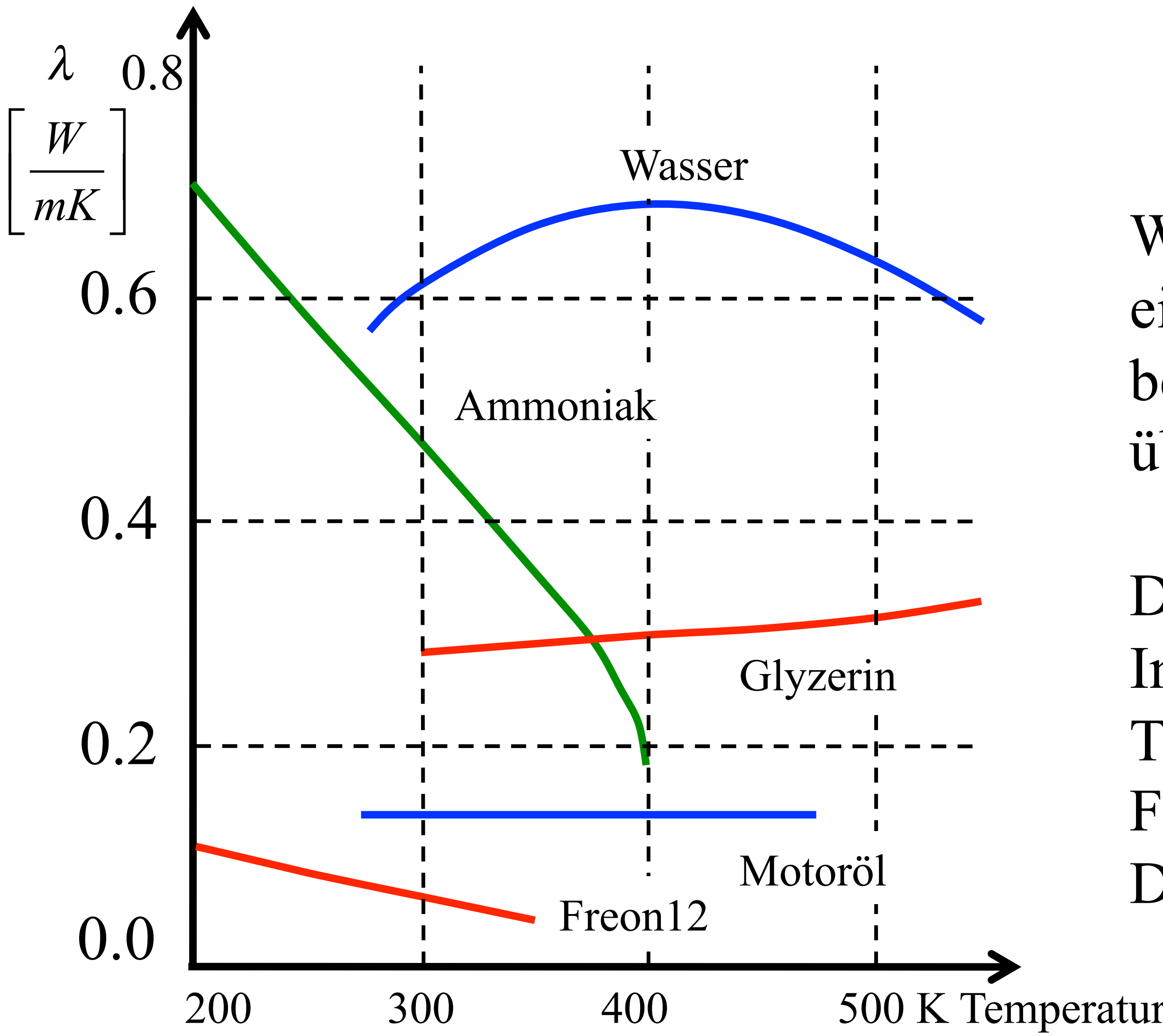
Wärmeleitkoeffizient einiger Gase bei 1 bar über Temperatur,

Daten von Introduction to Heat Transfer by Frank P. Incropera, David P. DeWitt.



Wärmeleitkoeffizient einiger Festkörper über Temperatur,

Daten von Introduction to Heat Transfer by Frank P. Incropera, David P. DeWitt.



Wärmeleitkoeffizient einiger Flüssigkeiten bei 1 bar über Temperatur,

Daten von Introduction to Heat Transfer by Frank P. Incropera, David P. DeWitt.

Die Wärmeleitungsgleichung in Analogie zum Ohmschen Gesetz:

Stationäre Wärmeleitung

- Das Fourier‘sche Wärmeleitungsgesetz kann in Analogie zum Ohmschen Gesetz aufgefasst werden.

$$U \quad = \quad R \cdot I$$

Ohmsches Gesetz

Analogie

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = \frac{\delta}{\lambda A}\dot{Q} \equiv R_\lambda \cdot \dot{Q}$$

Wärmeleitungsgesetz

Definition:

$$\boxed{R_\lambda \equiv \frac{\delta}{\lambda A} = \text{Wärmeleitwiderstand [K/W]}}$$

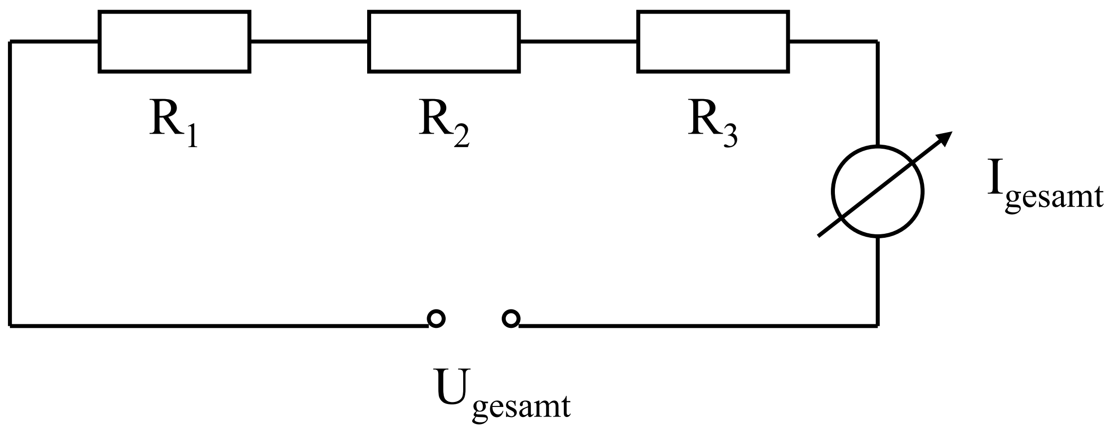
Stationäre Wärmeleitung

- Das Fourier'sche Wärmeleitungsgesetz kann in Analogie zum Ohmschen Gesetz aufgefasst werden.
- Dies ist oft hilfreich, um Schaltungen von mehreren Schichten unterschiedlicher Materialien zu untersuchen:

Reihenschaltung

Reihenschaltung von elekrischen Widerständen

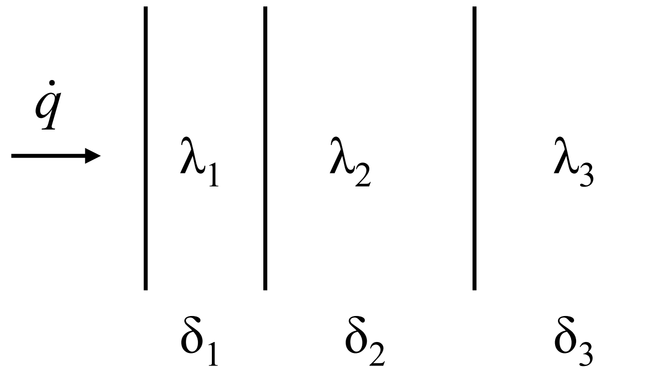
Analogie: $$\frac{U}{R} = I$$



$$R_{ges} = \sum_i R_i \qquad \frac{U_{ges}}{R_{ges}} = I_{ges}$$

Reihenschaltung von Wärmeleitungswiderständen

Reihenschaltung



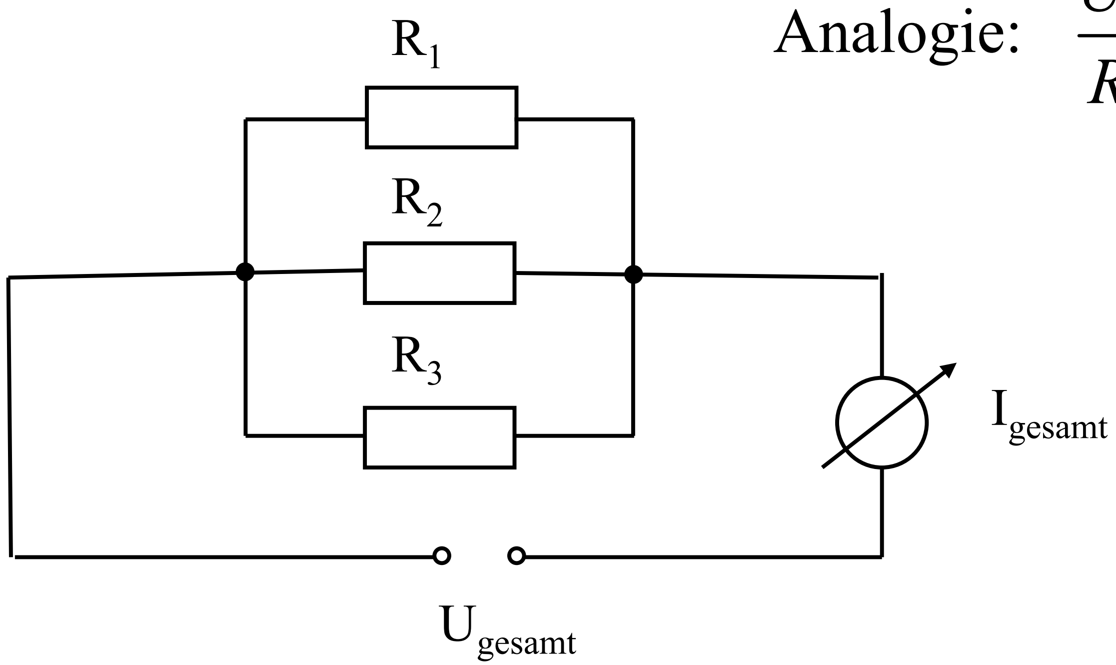
$$R_{\lambda,gesamt} = \sum_i R_{\lambda,i} = \frac{\delta_1}{A\lambda_1} + \frac{\delta_2}{A\lambda_2} + \frac{\delta_3}{A\lambda_3}$$

$$\boxed{\dot{Q} = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\dfrac{\delta_1}{A\lambda_1} + \dfrac{\delta_2}{A\lambda_2} + \dfrac{\delta_3}{A\lambda_3}}}$$

Parallelschaltung

Unter Vernachlässigung dreidimensionaler Effekte

Parallelschaltung von elekrischen Widerständen



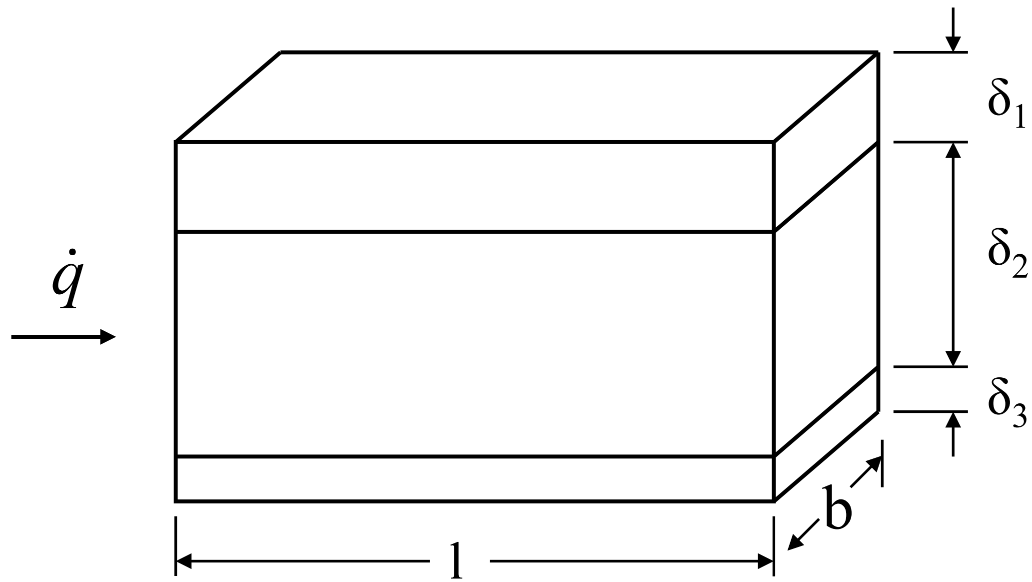
Analogie: $\frac{U}{R} = I$

$$\frac{1}{R_{ges}} = \sum_i \frac{1}{R_i}$$

$$\frac{U_{ges}}{R_{ges}} = I_{ges}$$

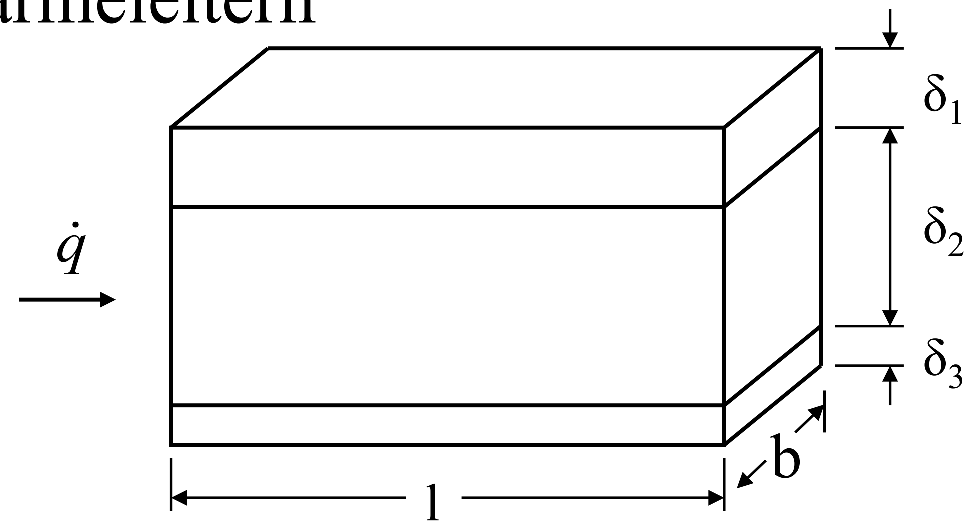
Parallelschaltung von Wärmeleitungswiderständen

Parallelschaltung



$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{A} \qquad A = A_1 + A_2 + A_3$$

Parallel-Schaltung von Wärmeleitern



$$R_\lambda = \frac{l}{A \cdot \lambda_i} = \frac{l}{b \cdot \delta_i \lambda_i}$$

$$\frac{1}{R_{\lambda,ges}} = \sum_i \frac{1}{R_{\lambda,i}}$$

$$\dot{Q}_{ges} = (\vartheta_1 - \vartheta_2)\frac{1}{R_{\lambda,ges}} = (\vartheta_1 - \vartheta_2)\sum_i \frac{1}{l / b \cdot \delta_i \lambda_i}$$

$$\dot{Q} = (\vartheta_1 - \vartheta_2)\sum_i \frac{b}{l}\delta_i \lambda_i$$

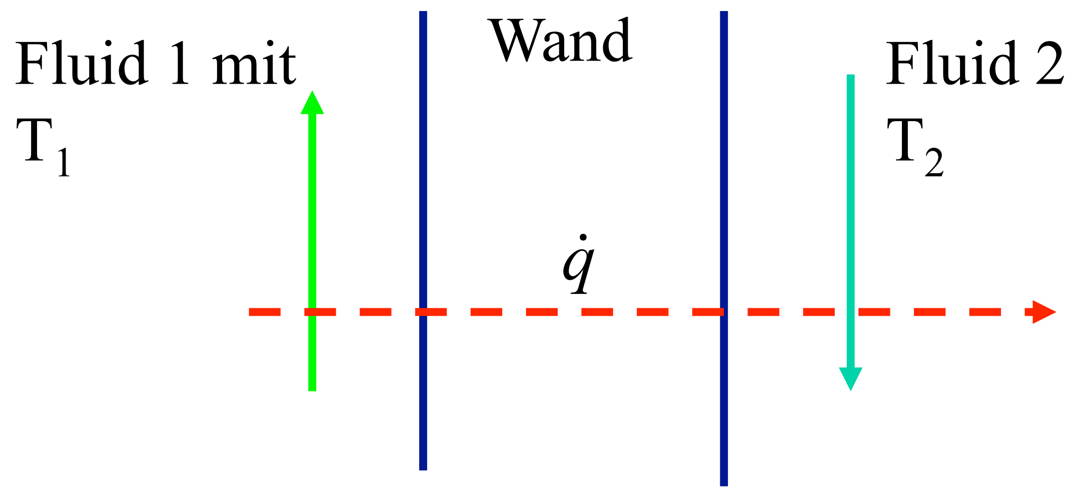
$$\boxed{\dot{Q} = (\vartheta_1 - \vartheta_2)\sum_i \frac{\lambda_i A_i}{l}}$$

Unter Vernachlässigung dreidimensionaler Effekte

Wärmedurchgang

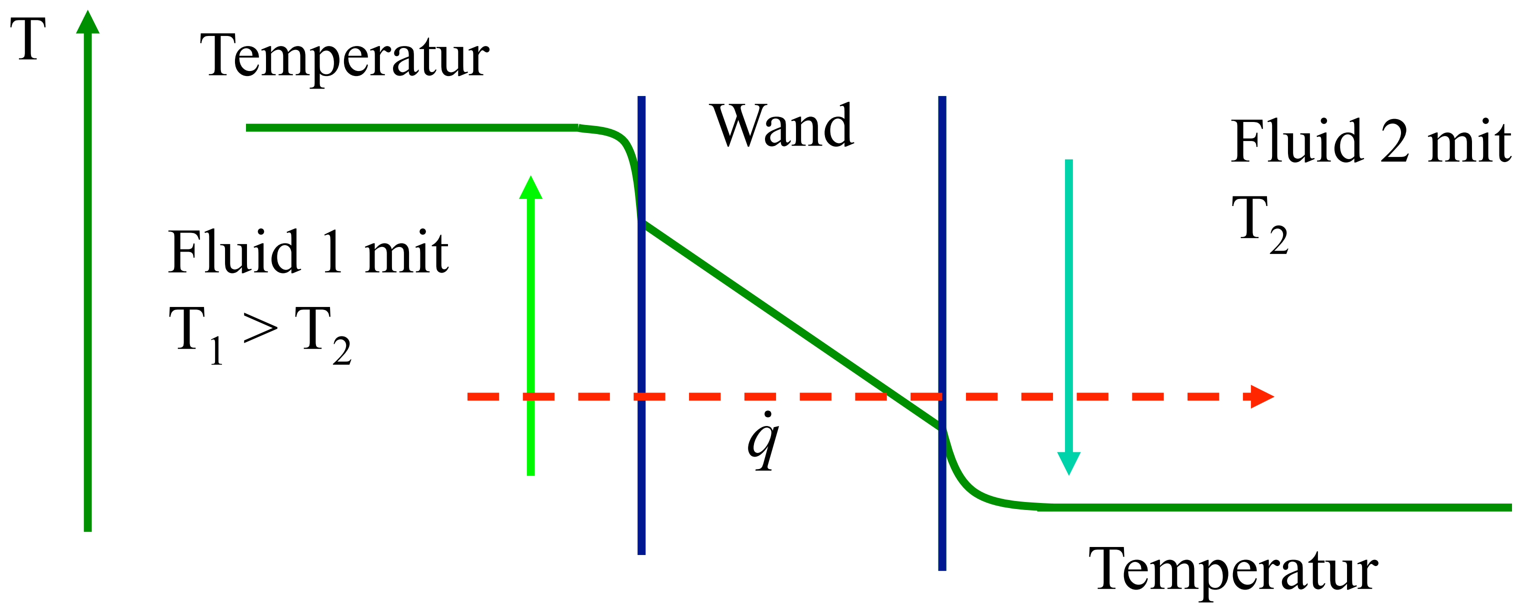
Wärmedurchgang

Technisch sehr bedeutsam ist der Wärmeübergang von Fluid 1 auf Wand auf Fluid 2. Die Wand dient dazu, die beiden Fluide zu separieren. Das nennt man **Wärmedurchgang.**



Wärmedurchgang

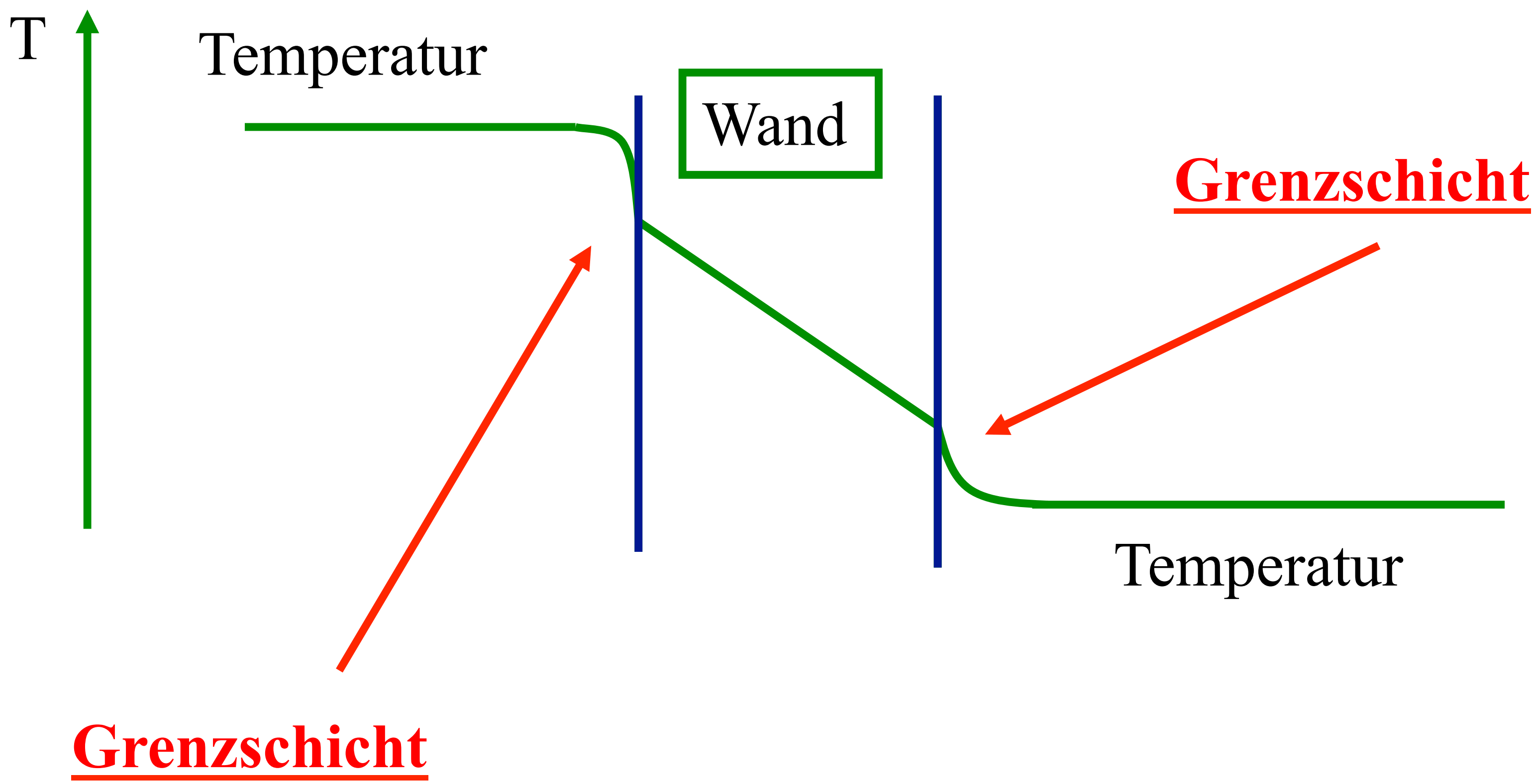
Bei ebenen Wänden ist folgender Temperaturverlauf zu beobachten.



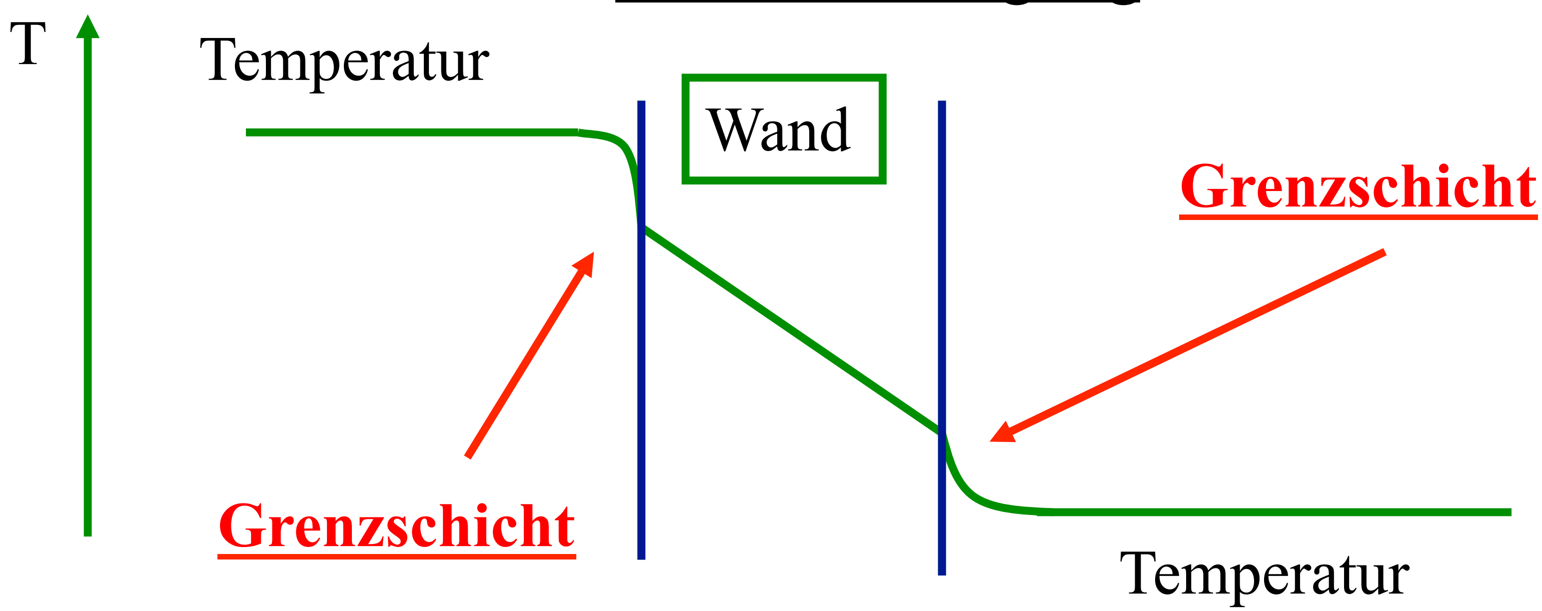
Insbesondere beobachtet man eine **Grenzschicht**. Die Abläufe und Zustände sind sehr komplex innerhalb der Grenzschicht.

Wärmedurchgang

Bei ebenen Wänden ist folgender Temperaturverlauf zu beobachten.



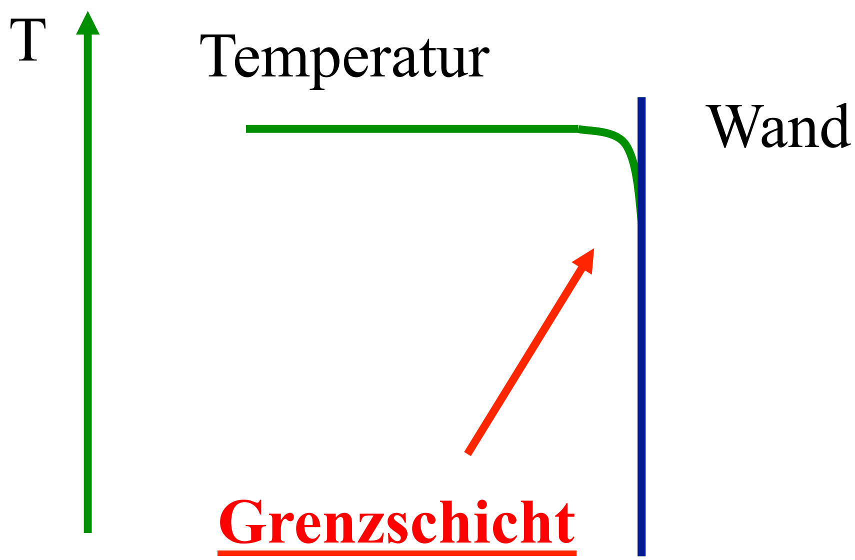
Wärmedurchgang



Die Vorgänge in der Grenzschicht sind sehr wichtig und sehr Komplex => **Grenzschichttheorie**

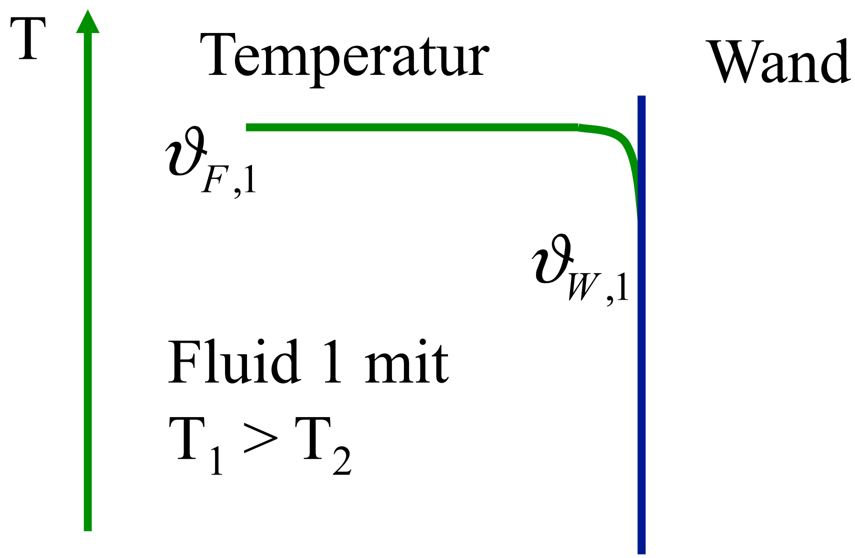
Wärmeübergang

Wärmeübergang



In der Wand erfolgt der Wärmetransport durch Wärmeleitung, an der Oberfläche durch **Konvektion**.
Diese Vorgänge in Wandnähe werden nach Newton zu einem **Wärmeübergangskoeffizienten** zusammengefasst.

Wärmeübergang

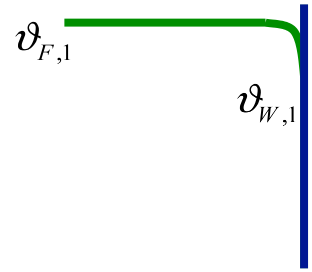


Newtonscher Ansatz für Wärmeübertragung von Fluid 1 auf Wand 1:

$$\dot{Q}_{F1,W1} = \alpha_1 A(\vartheta_{F1} - \vartheta_{W1})$$

Wärmeübergang

Newtonscher Ansatz für Wärmeübertragung von Fluid 1 auf Wand 1:



$$\dot{Q}_{F1,W1} = \alpha_1 A(\vartheta_{F1} - \vartheta_{W1})$$

$$\boxed{\alpha_1 \quad = \text{Wärmeübergangskoeffizient} \quad \left[\frac{W}{m^2\,K}\right]}$$

Wärmeübergang

$$\dot{Q}_{F1,W1} = \alpha_1 A(\vartheta_{F1} - \vartheta_{W1})$$

$$\alpha_1 = \text{Wärmeübergangskoeffizient} \qquad \left[\frac{W}{m^2\,K}\right]$$

In α_1 sind alle Einflüsse der Eigenschaften und des Bewegungs-zustands des Fluids zusammengefasst.

Bei Gasen: α bei freier Konvektion liegt im Bereich von 1-30 W/m^{2}K, bei erzwungener Konvektion im Bereich von 10 bis einige 100 W/m^2,

bei Flüssigkeiten: α bei freier Konvektion liegt im Bereich von einigen 100 W/m^{2}K, bei erzwungener Konvektion im Bereich von einigen 1000 W/m^2,

Bei Phasenübergängen kann α noch sehr viel größer sein.

Wärmeübergang

$$\dot{Q}_{F1,W1} = \alpha_1 A(\vartheta_{F1} - \vartheta_{W1}) \quad [\alpha_1] = \frac{W}{m^2 K}$$

In Analogie zum Ohmschen Gesetz

$$\dot{Q}_{F1,W1} \frac{1}{\alpha_1 A} = (\vartheta_{F1} - \vartheta_{W1}) \quad \leftrightarrow \quad I \cdot R = U$$

definiert man einen **Wärmeübergangswiderstand**:

$$\boxed{R_\alpha = \frac{1}{\alpha A} \quad in \quad \left[\frac{K}{W}\right]}$$

Wärmeübergang

Wärmeübergangswiderstand: $R_\alpha = \frac{1}{\alpha A} \quad in \quad \left[\frac{K}{W}\right]$

Nebenbemerkung:
Eine Randbedingung, die man oft (später) benötigt:

$$\dot{Q}_{F1,W1} = \underbrace{\alpha_1(\vartheta_{F1} - \vartheta_{W1})}_{\text{Wärmestrom, der vom Fluid auf die Wand aufgebracht wird}} \overset{!}{=} \underbrace{-\lambda_{Wand} \left.\frac{\delta\vartheta}{\delta x}\right|_{Wand}}_{\text{Wärmestrom, der in der Wand weitergeleitet wird}}$$

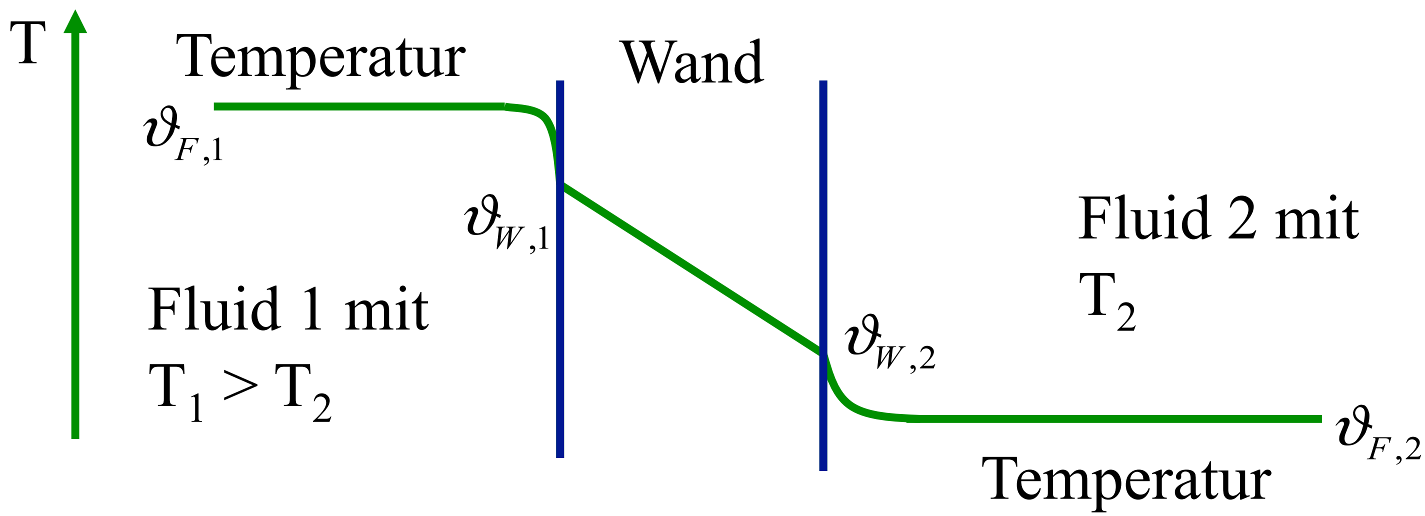
Wärmestrom, der vom Fluid auf die Wand aufgebracht wird

Wärmestrom, der in der Wand weitergeleitet wird

Diese Beziehung gilt für die infinitesimale Wandschicht auch instationär

Wärmedurchgang als Reihenschaltung von Widerständen

Wärmedurchgang



Dies stellt eine Reihenschaltung dar

$$\vartheta_{F1} - \vartheta_{F2} = \underbrace{\left(\frac{1}{\alpha_1 A} + \frac{\delta}{\lambda A} + \frac{1}{\alpha_2 A} \right) \cdot \dot{Q}}$$

$A =$ Wandfläche

$\delta =$ Wanddicke

Wärmedurchgangswiderstand R_k

Wärmedurchgang

- In anderer Schreibweise: $$(\vartheta_{F1} - \vartheta_{F2}) A \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}}_{= \mathrm{k}} = \dot{Q}$$

$$\boxed{\frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} = k}$$

Wärmedurchgangskoeffizient

$$[k] = \frac{W}{m^2 K}$$

Nur die Angabe von kA macht Sinn, nicht k alleine !

Wärmedurchgang durch Zylinder

Wärmedurchgang durch Zylinder

Für ein zylindrisches Rohr, mit Index 1 = innen, und Index 2 = außen, kommt oft vor, gilt:

$$\dot{Q} = \frac{1}{\dfrac{1}{\alpha_1 A_1} + \dfrac{\delta}{\lambda A_m} + \dfrac{1}{\alpha_2 A_2}} (\vartheta_{F1} - \vartheta_{F2}) \equiv k A_2 (\vartheta_{F1} - \vartheta_{F2})$$

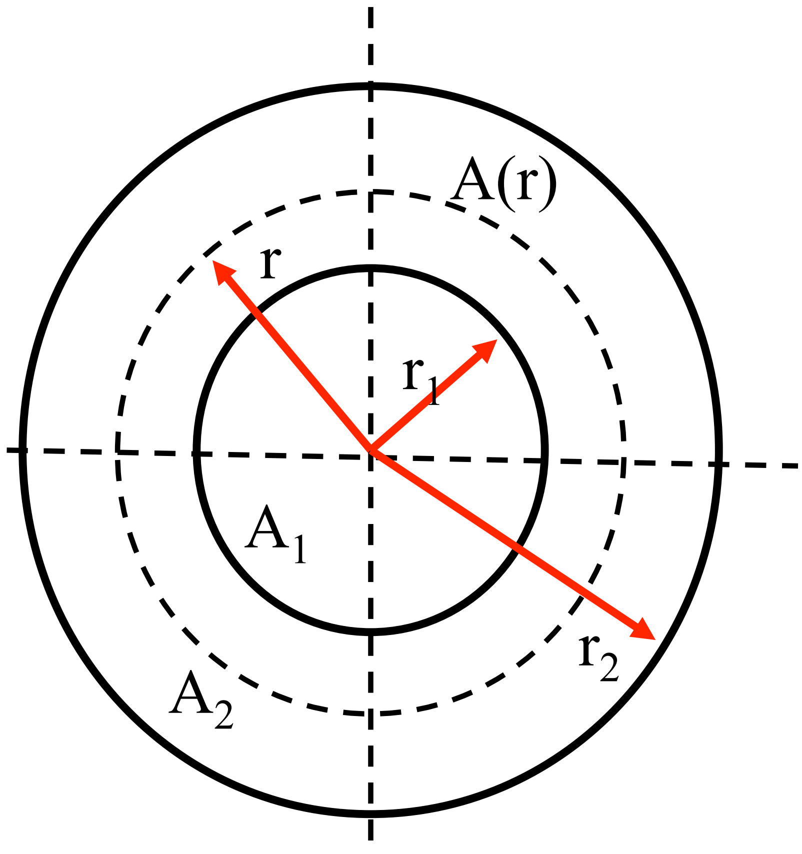
$$\boxed{A_m = \frac{A_2 - A_1}{\ln\left(\dfrac{A_2}{A_1}\right)} \quad = \text{„Mittlere Fläche" für Zylinder}}$$

k ist hierbei auf A_2 bezogen

Bestimmung der mittleren Flächen für ebene Wand Zylinder und Kugel

Bestimmung der mittleren Flächen

Zylinder und Hohlkugel



Bestimmung der mittleren Flächen

Zylinder und Hohlkugel

$$\dot{Q} = \dot{q}(r) A(r) = -\lambda(\vartheta) \frac{d\vartheta}{dr} A(r)$$

$\dot{Q}$ hängt nicht von r ab !

Separation der Variablen (*):

$$\dot{Q} \frac{dr}{A(r)} = -\lambda(\vartheta) d\vartheta$$

$$\int_{r_1}^{r_2} \dot{Q} \frac{dr}{A(r)} = -\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \lambda(\vartheta) d\vartheta \qquad (1)$$

(*) ist wichtige Technik zur Lösung von DGLs

Bestimmung der mittleren Flächen

Allgemeine Methode :

Man schreibt hier für , um die Integrale zu vermeiden:

$$(2)\quad \dot{Q}\frac{\delta}{A_m} = -\lambda_m(\vartheta_2 - \vartheta_1) \qquad\qquad \int_{r_1}^{r_2} \dot{Q}\frac{dr}{A(r)} = -\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \lambda(\vartheta)d\vartheta \quad (1)$$

Diese Gleichung (2) zusammen mit der Gleichung (1)
ist als Definitionsgleichung für A_m und λ_m aufzufassen.

$$\boxed{\dot{Q} = \frac{\lambda_m}{\delta} A_m\left(\vartheta_1 - \vartheta_2\right)}$$

Bestimmung der mittleren Flächen

Wenn man λ_m und A_m kennt, kann man „einfach" $\dot{Q}$ ausrechnen (ohne zu integrieren)

A_m = Mittlere Fläche,
λ_m = mittlere Wärmeleitzahl

Es folgt auch: $R_\lambda = \dfrac{\delta}{\lambda_m A_m}$ $\dot{Q} = \dfrac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{R_\lambda}$

$$\boxed{\lambda_m = \frac{1}{\vartheta_2 - \vartheta_1} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \lambda(\vartheta) d\vartheta}$$

kann leicht berechnet werden, weil nur die Kenntnis der Temperaturabhängigkeit von λ eingeht

Bestimmung der mittleren Flächen

$$\frac{1}{A_m} = \frac{1}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{A(r)}$$

Zylinder: $A(r) = 2\pi r l$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{A_m} = \frac{1}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{2\pi r l} = \frac{1}{r_2 - r_1} \frac{1}{2\pi l} \left(\ln r_2 - \ln r_1 \right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{A_m} = \frac{\ln\left(r_2 / r_1\right)}{A_2 - A_1} = \frac{\ln\left(A_2 / A_1\right)}{A_2 - A_1}$$

Bestimmung der mittleren Flächen

$$\frac{1}{A_m} = \frac{1}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{A(r)}$$

Kugel: $A(r) = 4\pi r^2$

Kann sogar allgemein für Kugel, Zylinder und Wand angegeben werden.

$$A_m = \sqrt{A_1 A_2}$$

Bestimmung der mittleren Flächen

Mittlere Fläche

Ebene Wand: $A_m = A_1 = A_2$

Zylinder: $$A_m = \frac{A_2 - A_1}{\ln\left(A_2 / A_1\right)}$$

Kugel: $$A_m = \sqrt{A_1 A_2}$$

Wärmeübertrager

Wärmeübertrager sind technisch wichtige und häufige Bauteile, z.B. am Haushaltskühlschrank hinten das schwarze Gitter, Autokühler, der primäre Wärmeübertrager in Kernkraftwerken, ...

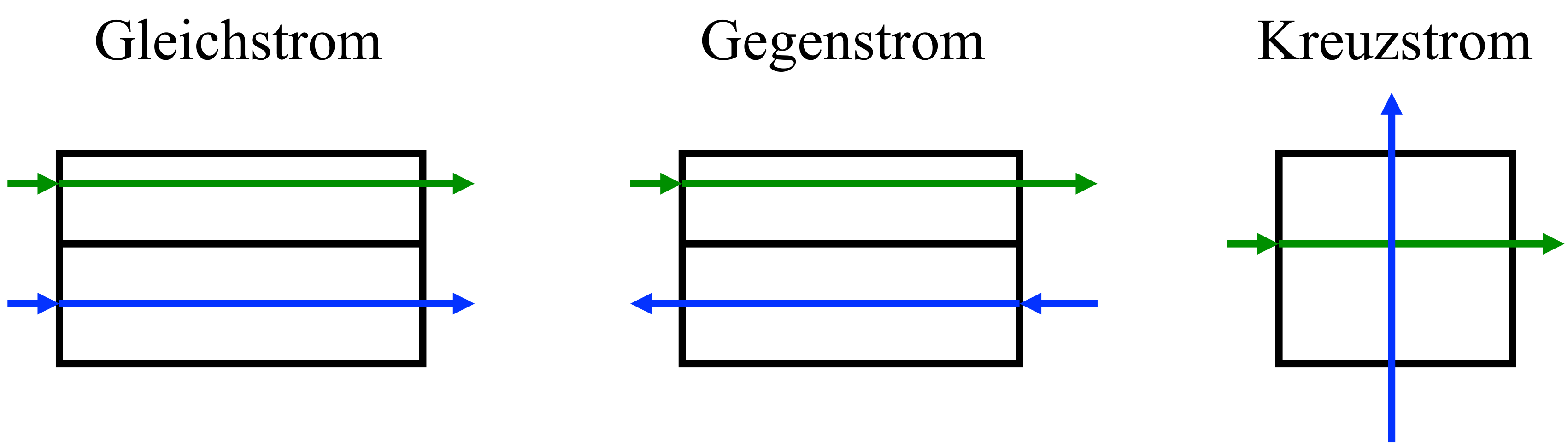
Wärmeübertrager sollen billig sein, die Wärme optimal übertragen und einen möglichst geringen Druckverlust bei der Strömung verursachen.

Es gibt Wärmeübertrager in sehr vielen verschiedenen Bauformen, viele grundlegende sind im VDI Wärmeatlas aufgeführt.

Wärmeübertrager

Regenerator: instationär, Speicherwirkung

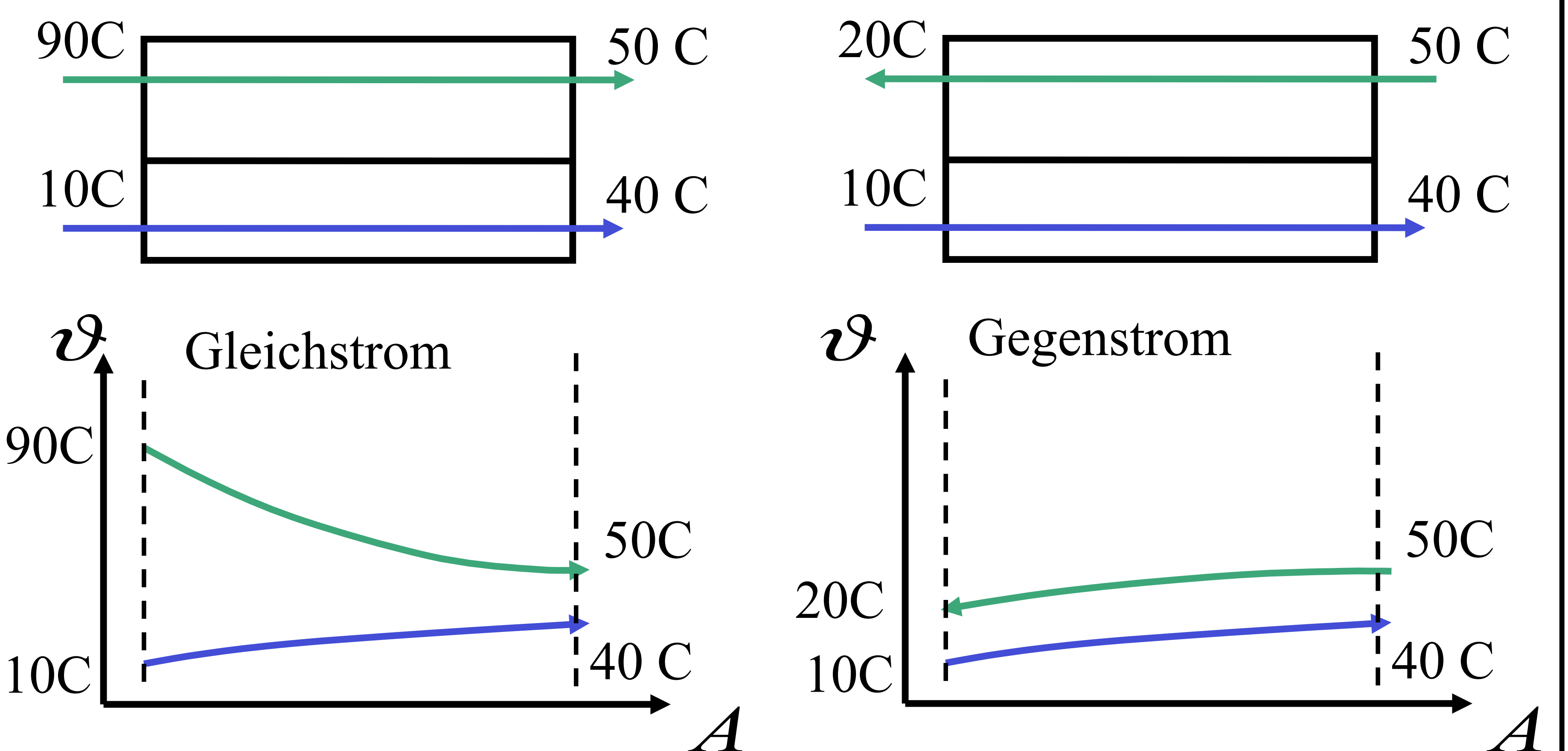
Rekuperatoren: stationär, Wärmedurchgang durch Wände, die Fluid 1 von Fluid 2 trennen



Grundformen von Rekuperatoren

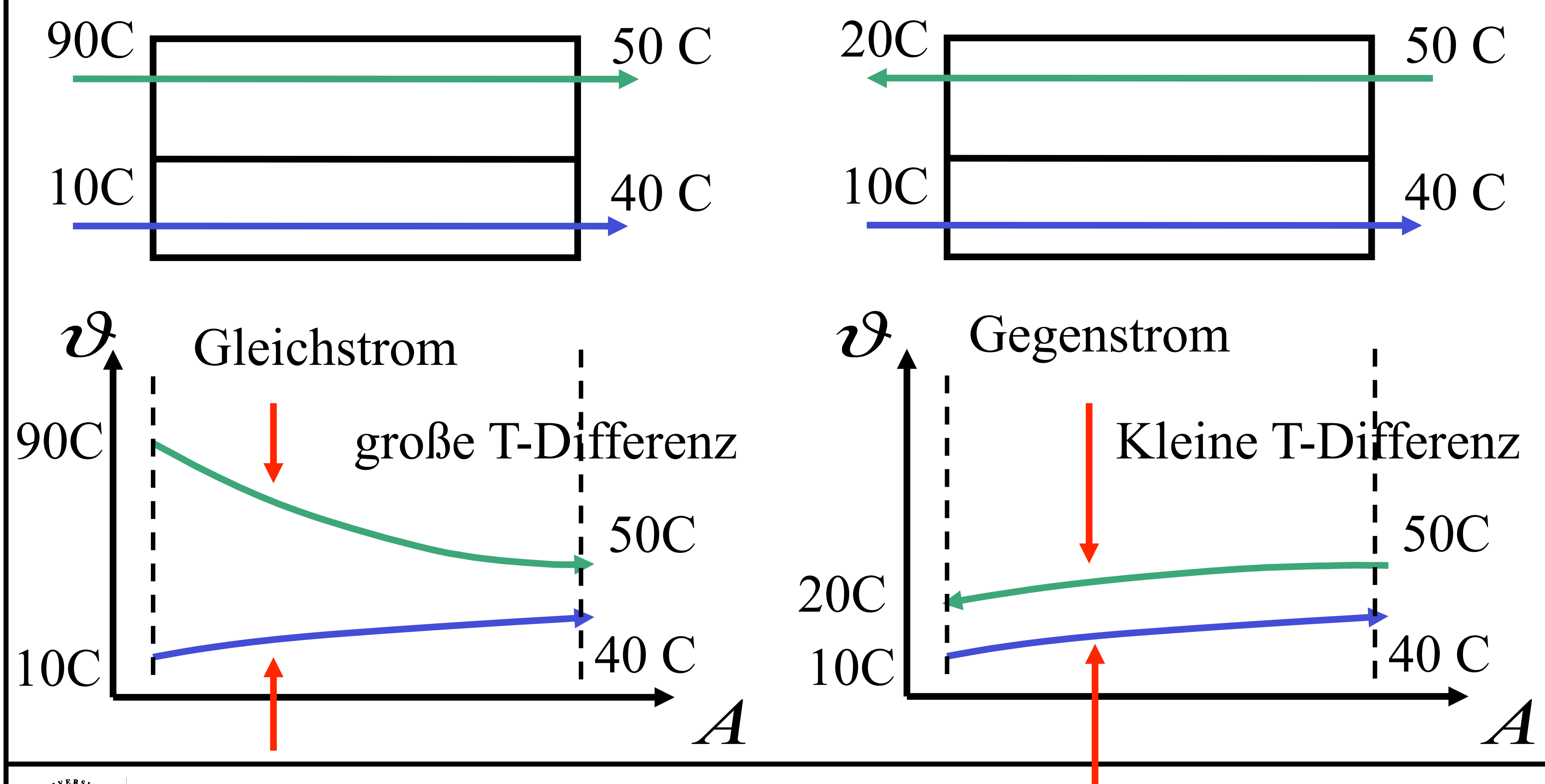
Von früher: Bsp zum 1. HS geschl. System, Wärmeübertrager

A = Übertragerfläche

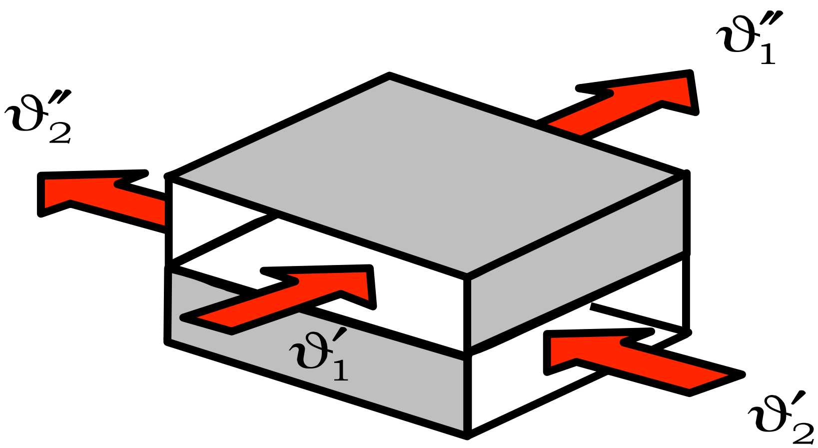


Beispiel: 1. HS geschl. System, Wärmeübertrager

A = Übertragerfläche



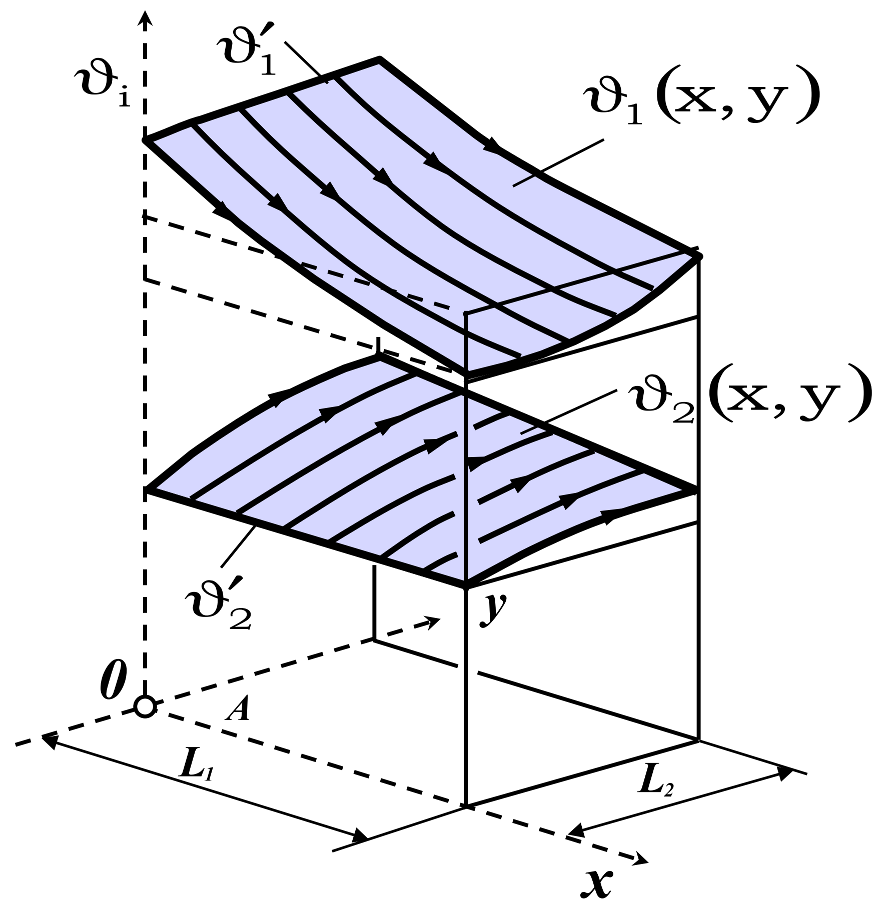
Das Temperaturfeld in einem Kreuzstrom-Wärme-Übertrager



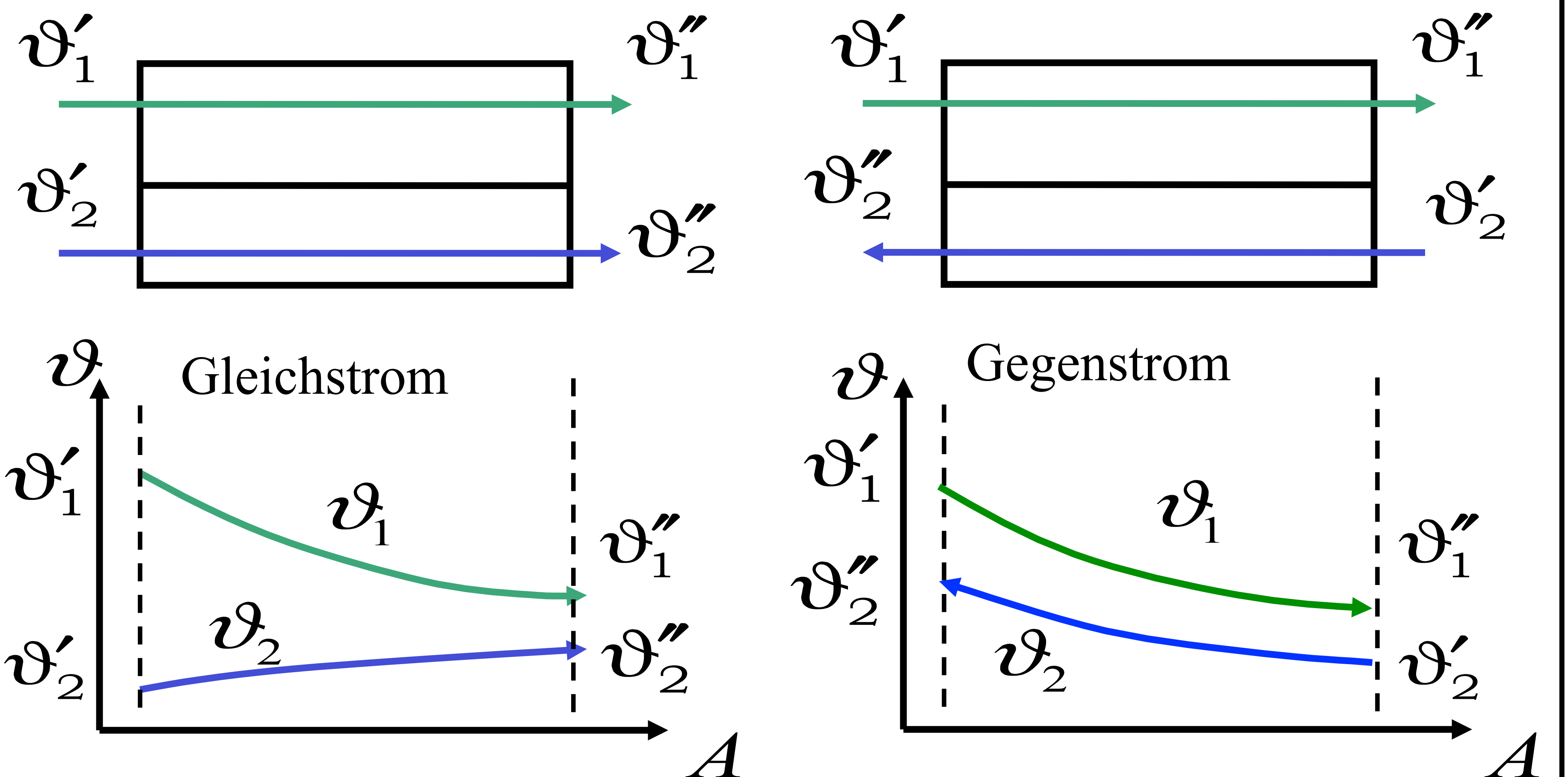
Schema eines Plattenwärmeübertragers mit Kreuzstromführung

Fluidtemperaturen

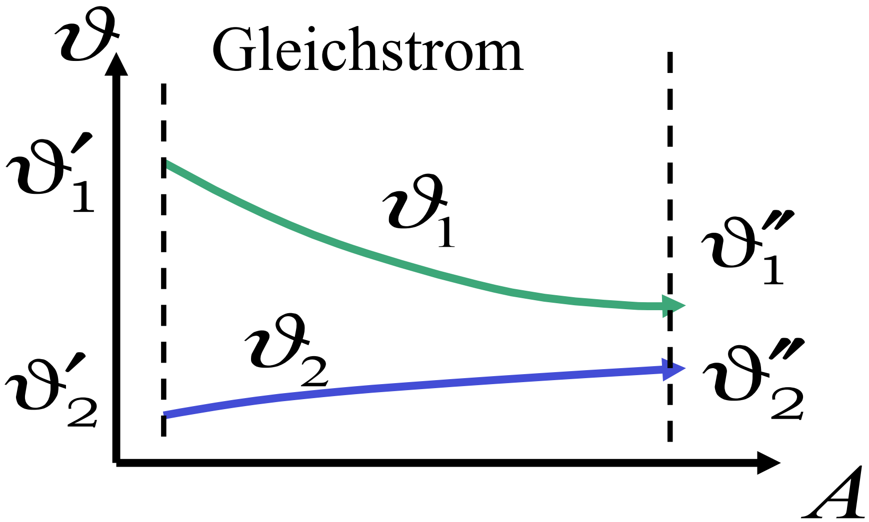
$t_1 = t_1(x,y)$ und $t_2 = t_2(x,y)$ bei Kreuzstrom

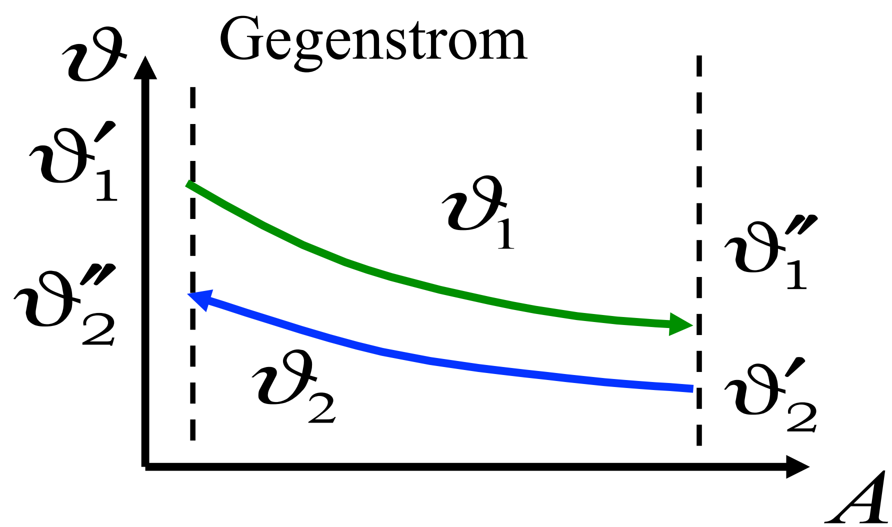


Wärmeübertrager Temperaturfeld Nomenklatur



Wärmeübertrager Temperaturfeld Nomenklatur





O.B.d.A.: Wähle Stoffstrom 1 = heißeren Strom

Bei Gegenstrom kann sein: $\vartheta_2'' > \vartheta_1'$

Energiebilanz für Stoffstrom i = 1,2

$$\dot{W}_{ti} + \dot{Q}_i = \dot{m}_i \left(h_i'' - h_i' \right) + \dot{m}_i \Delta e_a$$

$$\Rightarrow \quad \cancel{\dot{W}_{ti}} + \dot{Q}_i = \dot{m}_i \left(h_i'' - h_i' \right) + \cancel{\dot{m}_i \Delta e_a}$$

$$\left(h_i'' - h_i' \right) \gg \Delta e_a$$

$$\Rightarrow \quad \dot{Q}_i = \dot{m}_i \left(h_i'' - h_i' \right) = \dot{m}_i \, c_{pi} \Big|_{T_i'}^{T_i''} \left(\vartheta_i'' - \vartheta_i' \right)$$

$$\boxed{\text{Definition: Wärmekapazitätsstrom:} \quad \dot{C}_i = \dot{m}_i \, c_{pi} \Big|_{T_i'}^{T_i''}}$$

Energiebilanz für Stoffstrom i = 1,2

$$\dot{Q}_i = \dot{m}_i \left(h_i'' - h_i' \right) = \dot{m}_i \, c_{pi} \Big|_{T_i'}^{T_i''} \left(\vartheta_i'' - \vartheta_i' \right)$$

Definition: Wärmekapazitätsstrom: $\dot{C}_i = \dot{m}_i \, c_{pi} \Big|_{T_i'}^{T_i''}$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{d\dot{Q}_i = \dot{C}_i d\vartheta_i = \dot{C}_i \left(\vartheta_i'' - \vartheta_i' \right)}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d\vartheta}{d\dot{Q}_i} = \frac{1}{\dot{C}_i} \qquad \text{(F-10-56-1)}$$

Energiebilanz

$$d\dot{Q}_i = \dot{C}_i d\vartheta_i = \dot{C}_i \left(\vartheta_i'' - \vartheta_i'\right)$$

$$\dot{Q}_1 = \dot{C}_1 \left(\vartheta_1'' - \vartheta_1'\right) < 0$$

$$\dot{Q}_2 = \dot{C}_2 \left(\vartheta_2'' - \vartheta_2'\right) > 0$$

$$\dot{Q}_2 = -\dot{Q}_1 \equiv \dot{Q}$$

Örtlich gilt auch

$$d\dot{Q} = k_{lokal} dA \left(\vartheta_1 - \vartheta_2\right)_{lokal}$$

Energiebilanz

Örtlich gilt $$d\dot{Q} = k_{lokal}\, dA\left(\vartheta_1 - \vartheta_2\right)_{lokal}$$

$\Rightarrow$

$$\dot{Q}_A = \int_A \left(k_{lokal}\left(\vartheta_1 - \vartheta_2\right)_{lokal}\right) dA \equiv k A \Delta\vartheta_m$$

ist Definition für 3 Mittelwerte, also 2 vorgeben:

$$A = \int_A dA \qquad kA = \int_A k_{lokal}\, dA$$

Dann muss die mittlere Temperaturdifferenz $\Delta\vartheta_m$ geeignet bestimmt werden

Bestimmung der Temperaturdifferenz

Für kleines Flächenstück gilt:

$$d\dot{Q} = k(\vartheta_1 - \vartheta_2)dA$$

$$d\dot{Q} = -\dot{C}_1 d\vartheta_1 = \dot{C}_2 d\vartheta_2$$

$$\Rightarrow \qquad d\vartheta_1 = -\frac{k}{\dot{C}_1}(\vartheta_1 - \vartheta_2)dA$$

und

$$d\vartheta_2 = \frac{k}{\dot{C}_2}(\vartheta_1 - \vartheta_2)dA$$

Bestimmung der Temperaturdifferenz

$$d\vartheta_1 = -\frac{k}{\dot{C}_1}\left(\vartheta_1 - \vartheta_2\right)dA$$

$$d\vartheta_2 = \frac{k}{\dot{C}_2}\left(\vartheta_1 - \vartheta_2\right)dA$$

$$\Rightarrow \qquad -d\underbrace{\left(\vartheta_1 - \vartheta_2\right)}_{=\Delta\vartheta} = \underbrace{\left(\frac{1}{\dot{C}_1} + \frac{1}{\dot{C}_1}\right)}_{=\mu}\left(\vartheta_1 - \vartheta_2\right)k\,dA$$

Bestimmung der Temperaturdifferenz

$$-d\underbrace{(\vartheta_1 - \vartheta_2)}_{=\Delta\vartheta} = \underbrace{\left(\frac{1}{\dot{C}_1} + \frac{1}{\dot{C}_1}\right)}_{=\mu}(\vartheta_1 - \vartheta_2)\,k\,dA$$

$\Rightarrow$ $$\frac{d(\Delta\vartheta)}{\Delta\vartheta} = -\mu\,k\,dA$$

$\Rightarrow$ $$\ln(\Delta\vartheta)\Big|_A^B = --\mu\,k\,A$$

$\Rightarrow$ $$\Delta\vartheta_B = \Delta\vartheta_A\,e^{(-\mu\,k\,A)} \qquad (*)$$

Bestimmung der Temperaturdifferenz

$$\Delta\vartheta_B = \Delta\vartheta_A \, e^{(-\mu k A)} \qquad (*)$$

$$d\dot{Q} = k(\vartheta_1 - \vartheta_2)\, dA$$

$$d\dot{Q} = k\Delta\vartheta_A \, e^{(-\mu k A)} dA$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \qquad \dot{Q} = k\Delta\vartheta_A \, e^{(-\mu k A)} \frac{1}{-\mu k} + \dot{Q}_A$$

Integrationskonstante aus Anfangsbedingungen gewinnen:

Bei A = 0 gilt: $$0 = \frac{\Delta\vartheta_A}{-\mu} e^0 + \dot{Q}_A$$

Bestimmung der Temperaturdifferenz

$$\dot{Q} = k\Delta\vartheta_A \, e^{(-\mu\, k\, A)} \frac{1}{-\mu\, k} + \dot{Q}_A$$

$$0 = \frac{\Delta\vartheta_A}{-\mu} e^0 + \dot{Q}_A$$

$\Rightarrow$ $$\dot{Q} = \frac{\Delta\vartheta_A}{\mu}\left(1 - e^{(-\mu\, k\, A)}\right)$$

Und wenn man μ

mit (*) eliminiert:

$\Rightarrow$ $$\boxed{\dot{Q} = kA \frac{\Delta\vartheta_A - \Delta\vartheta_B}{\ln\left(\dfrac{\Delta\vartheta_A}{\Delta\vartheta_B}\right)}}$$

Bestimmung der Temperaturdifferenz

$$\dot{Q} = kA \underbrace{\frac{\Delta\vartheta_A - \Delta\vartheta_B}{\ln\left(\dfrac{\Delta\vartheta_A}{\Delta\vartheta_B}\right)}}$$

$$\boxed{\Delta\vartheta_m}$$

„Logarithmisches Temperaturmittel“

Bestimmung der Temperaturdifferenz

$$\dot{Q} = kA \underbrace{\frac{\Delta\vartheta_A - \Delta\vartheta_B}{\ln\left(\dfrac{\Delta\vartheta_A}{\Delta\vartheta_B}\right)}}_{\Delta\vartheta_m}$$

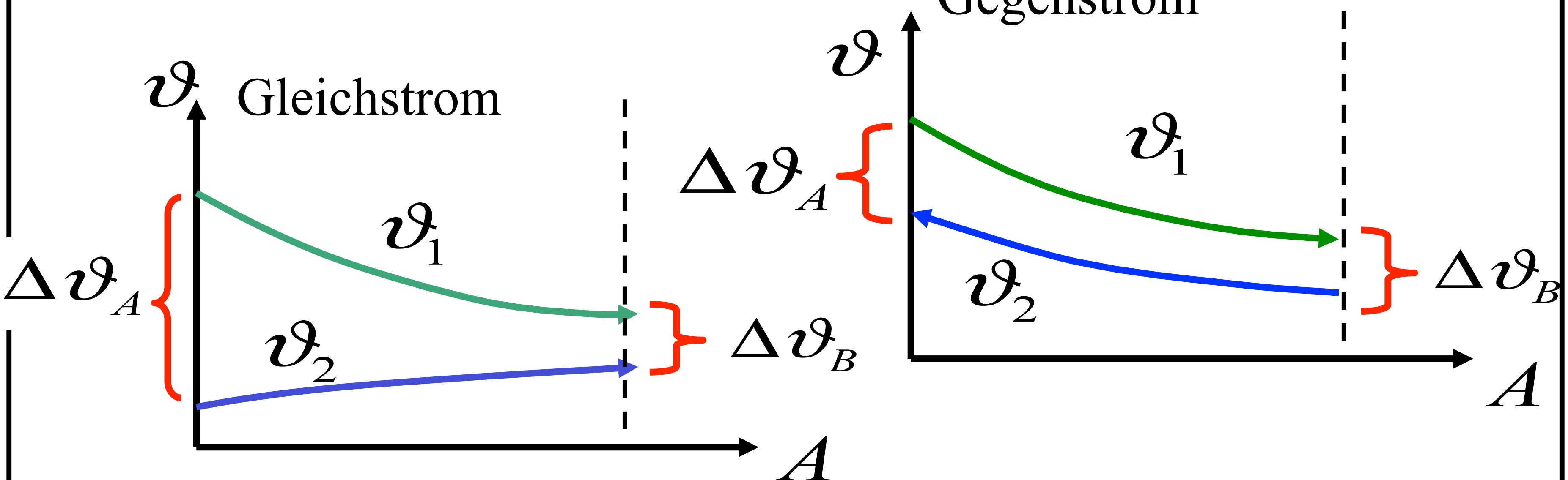
z.B.:

$$\Delta\vartheta_A = 200\,C, \Delta\vartheta_B = 100\,C \Rightarrow \Delta\vartheta_m = 144\,C$$

$$\Delta\vartheta_A = 500\,C, \Delta\vartheta_B = 10\,C \Rightarrow \Delta\vartheta_m = 125\,C$$

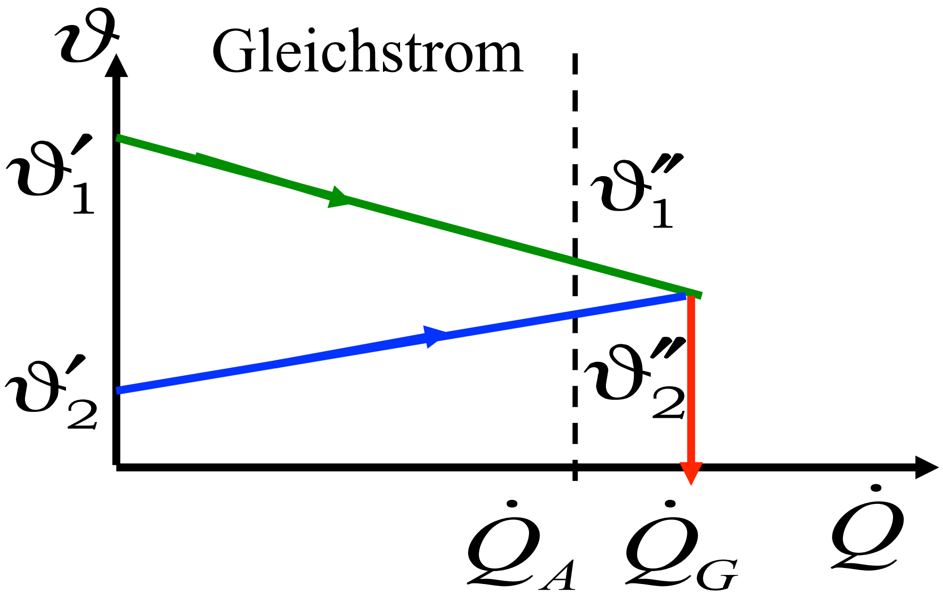
Bestimmung der Temperaturdifferenz

$$\dot{Q} = kA \frac{\Delta\vartheta_A - \Delta\vartheta_B}{\ln\left(\frac{\Delta\vartheta_A}{\Delta\vartheta_B}\right)} = kA\Delta\vartheta_m$$



Grenzleistung

Grenzleistung



$$\frac{d\vartheta}{d\dot{Q}_i} = \frac{1}{\dot{C}_i}$$

Formel von vorne (F-10-56-1)

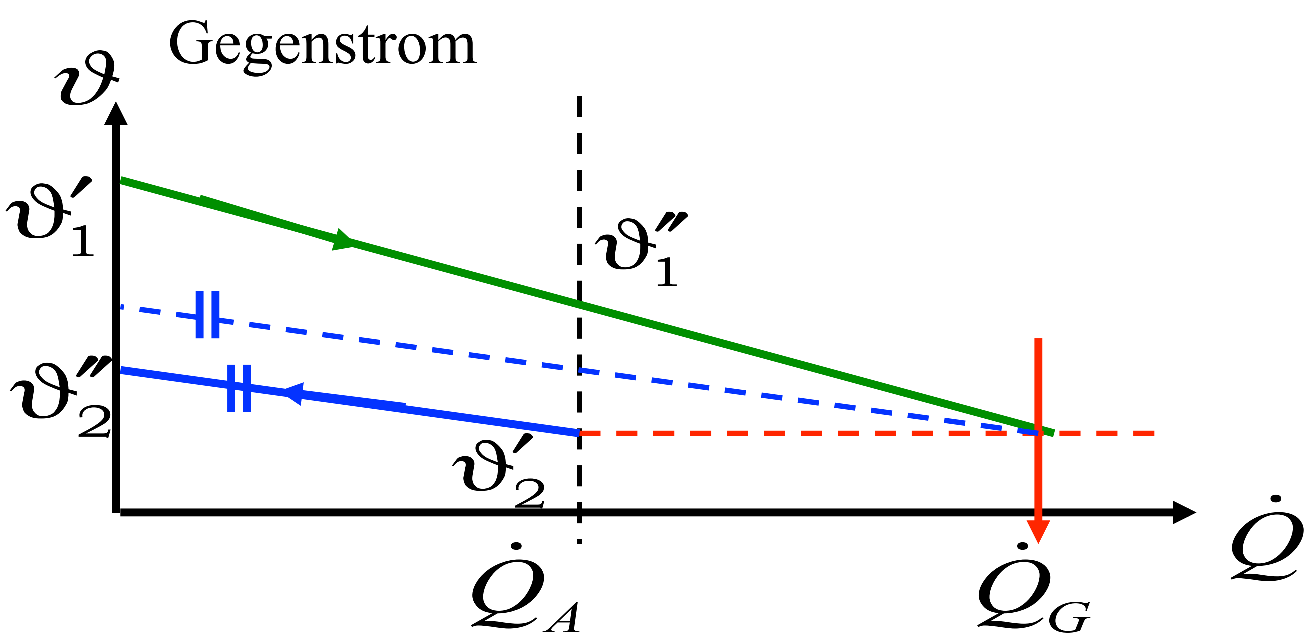
Wenn $\dot{C}_i$ = const ist auch die Steigung konstant

Wärmestrom bei Fläche A

Grenzleistung

Übertragener Wärmestrom

Grenzleistung



Grenzleistung beim Gegenstrom ist größer als die Grenzleistung beim Gleichstrom

Auslegung

Auslegung: Gegeben: $\dot{C}_1,\ \dot{C}_2,\ \vartheta_1',\ \vartheta_2',\ \vartheta_1''$

Gesucht: kA

$$\dot{Q} = \dot{C}_1\left(\vartheta_1'' - \vartheta_1'\right) = \dot{C}_2\left(\vartheta_2' - \vartheta_2''\right)$$

kann bestimmt werden

kann bestimmt werden

$$\dot{Q} = kA\frac{\Delta\vartheta_A - \Delta\vartheta_B}{\ln\left(\dfrac{\Delta\vartheta_A}{\Delta\vartheta_B}\right)} = kA\Delta\vartheta_m$$

Folgt als Ergebnis

Nachrechnen

Gegeben: $\dot{C}_1,\ \dot{C}_2,\ kA,\ \vartheta_1',\ \vartheta_2'$

Gesucht: $\vartheta_1'',\ \vartheta_2'',\ \dot{Q}$

3 Gl. mit drei Unbekannten

$$\left.\begin{aligned}
\dot{C}_1\left(\vartheta_1''-\vartheta_1'\right) &= \dot{C}_2\left(\vartheta_2'-\vartheta_2''\right)\\
\dot{Q} &= \dot{C}_1\left(\vartheta_1''-\vartheta_1'\right)\\
\dot{Q} &= kA\Delta\vartheta_m\left(\vartheta_1',\vartheta_1'',\vartheta_2',\vartheta_2''\right)
\end{aligned}\right\}$$

kA = Übertragungsfähigkeit von Wärmeübertragern, ist typische Größe für einen Apparat

Wärmeübertrager: Dimensionslose Kennzahlen

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (= o.B.d.A.):

Strom 1 heiß, Strom 2 kalt =>

$$\vartheta_1' > \vartheta_1'', \qquad \vartheta_2'' > \vartheta_2'$$

Wärmeübertrager: Dimensionslose Kennzahlen

1. HS: $$\dot{Q} = \dot{m}_1 \left(h_1' - h_1'' \right) = \dot{m}_2 \left(h_2'' - h_2' \right)$$

$$c_{pi} \Big|_{\vartheta_i'}^{\vartheta_i''} = \frac{h_1' - h_i''}{\vartheta_i' - \vartheta_i''} = \frac{\int_{\vartheta_i'}^{\vartheta''} c_{pi}(\vartheta)\, d\vartheta}{\vartheta_i' - \vartheta_i''}$$

$$\dot{Q} = \left| \dot{m}_1 \, c_{p1} \Big|_{\vartheta_1'}^{\vartheta_1''} \left(\vartheta_1' - \vartheta_1'' \right) \right| = \left| \dot{m}_2 \, c_{p2} \Big|_{\vartheta_2'}^{\vartheta_2''} \left(\vartheta_2' - \vartheta_2'' \right) \right|$$

Wärmeübertrager: Dimensionslose Kennzahlen

$$\dot{Q} = \dot{m}_1 \, c_{p1}\Big|_{\vartheta_1'}^{\vartheta_1''} \left(\vartheta_1' - \vartheta_1''\right) = \left| \dot{m}_2 \, c_{p2}\Big|_{\vartheta_2'}^{\vartheta_2''} \left(\vartheta_2' - \vartheta_2''\right) \right|$$

Abkürzung, Definition: **Wärmekapazitätsstrom:**

$$\dot{C}_i = \dot{m}_i \, c_{pi}\Big|_{\vartheta_i'}^{\vartheta_i''}$$

$$\dot{Q} = \dot{C}_1 \left(\vartheta_1' - \vartheta_1''\right) = \left| \dot{C}_2 \left(\vartheta_2' - \vartheta_2''\right) \right|$$

Wärmeübertrager: Dimensionslose Kennzahlen

Der übertragene Wärmestrom hat den **Wärmedurchgangswiderstand 1/kA** zu überwinden.

kA = Übertragungsfähigkeit des Wärmeübertragers, ist typische Größe für Apparat.

Wärmeübertrager: Dimensionslose Kennzahlen

Definition geeigneter Kenngrößen:

$$\boxed{\Phi_1 = \frac{\vartheta_1' - \vartheta_1''}{\vartheta_1' - \vartheta_2'}} \qquad \boxed{\Phi_2 = \frac{\vartheta_2'' - \vartheta_2'}{\vartheta_1' - \vartheta_2'}}$$

= dimensionslose Temperaturänderung der beiden Fluide

$$\Phi_1 = \frac{\vartheta_1' - \vartheta_1''}{\vartheta_1' - \vartheta_2'} = \frac{\dot{Q}}{\dot{C}_1\left(\vartheta_1' - \vartheta_2'\right)} =$$ **Dimensionsloser Wärmestrom 1**

Wärmeübertrager: Dimensionslose Kennzahlen

Definition geeigneter Kenngrößen:

$$\boxed{\Phi_1 = \frac{\vartheta_1' - \vartheta_1''}{\vartheta_1' - \vartheta_2'}}$$

$$\boxed{\Phi_2 = \frac{\vartheta_2'' - \vartheta_2'}{\vartheta_1' - \vartheta_2'}}$$

= dimensionslose Temperaturänderung der beiden Fluide

$$\Phi_2 = \frac{\left|\vartheta_2' - \vartheta_2''\right|}{\vartheta_1' - \vartheta_2'} = \frac{\dot{Q}}{\dot{C}_2\left(\vartheta_1' - \vartheta_2'\right)} =$$

Dimensionsloser Wärmestrom 2

Wärmeübertrager: Dimensionslose Kennzahlen

$$\boxed{N_1 = \frac{kA}{\dot{C}_1} = NTU\big|_1}$$

$$\boxed{N_2 = \frac{kA}{\dot{C}_2} = NTU\big|_2}$$

Number of Transfer Units

= Dimensionslose Übertragungsfähigkeit

Wärmeübertrager: Dimensionslose Kennzahlen

Manchmal auch: $$R_1 = \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2} \qquad R_2 = \frac{\dot{C}_2}{\dot{C}_1}$$

Es gilt auch: $$R_1 = \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{kA}{\dot{C}_2}\frac{\dot{C}_1}{kA}$$ q.e.d

Und es gilt auch: $$\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{\dot{C}_2}{\dot{C}_1} = \frac{\vartheta_1' - \vartheta_1''}{\vartheta_2'' - \vartheta_2'}$$

Weil: $$\dot{Q} = \dot{C}_1\left(\vartheta_1' - \vartheta_1''\right) = \dot{C}_2\left(\vartheta_2'' - \vartheta_2'\right)$$

Wärmeübertrager: Dimensionslose Kennzahlen

$$\Phi_1 = \frac{\vartheta_1' - \vartheta_1''}{\vartheta_1' - \vartheta_2'} = \frac{\dot{Q}}{\dot{C}_1 \left(\vartheta_1' - \vartheta_2'\right)}$$

$$\Phi_2 = \frac{\vartheta_2'' - \vartheta_2'}{\vartheta_1' - \vartheta_2'} = \frac{\dot{Q}}{\dot{C}_2 \left(\vartheta_1' - \vartheta_2'\right)}$$

Und es gilt auch:

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{\dot{C}_2}{\dot{C}_1} = \frac{\vartheta_1' - \vartheta_1''}{\vartheta_2'' - \vartheta_2'}$$

Weil:

$$\dot{Q} = \dot{C}_1 \left(\vartheta_1' - \vartheta_1''\right) = \dot{C}_2 \left(\vartheta_2' - \vartheta_2''\right)$$

Wärmeübertrager: Dimensionslose Kennzahlen

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{\dot{C}_2}{\dot{C}_1} = \frac{\vartheta_1' - \vartheta_1''}{\vartheta_2'' - \vartheta_2'}$$

$$N_1 = \frac{kA}{\dot{C}_1} = NTU\Big|_1 \qquad N_2 = \frac{kA}{\dot{C}_2} = NTU\Big|_2$$

Also auch: $$\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

Wärmeübertrager: Dimensionslose Kennzahlen

Von den 4 dimensionslosen Kennzahlen Φ_1, Φ_2, N_1, N_2

sind nur 3 unabhängig, weil wir drei Bestimmungsgleichungen haben, also folgt: es existiert eine Funktion mit der Eigenschaft:

$$\boxed{f\left(\Phi_1, N_1, \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2}\right) = 0}$$

$$N_1 = \frac{kA}{\dot{C}_1}$$

$$N_2 = \frac{kA}{\dot{C}_2}$$

Diese Funktion nennt man **Betriebscharakteristik** des Wärmeübertragers

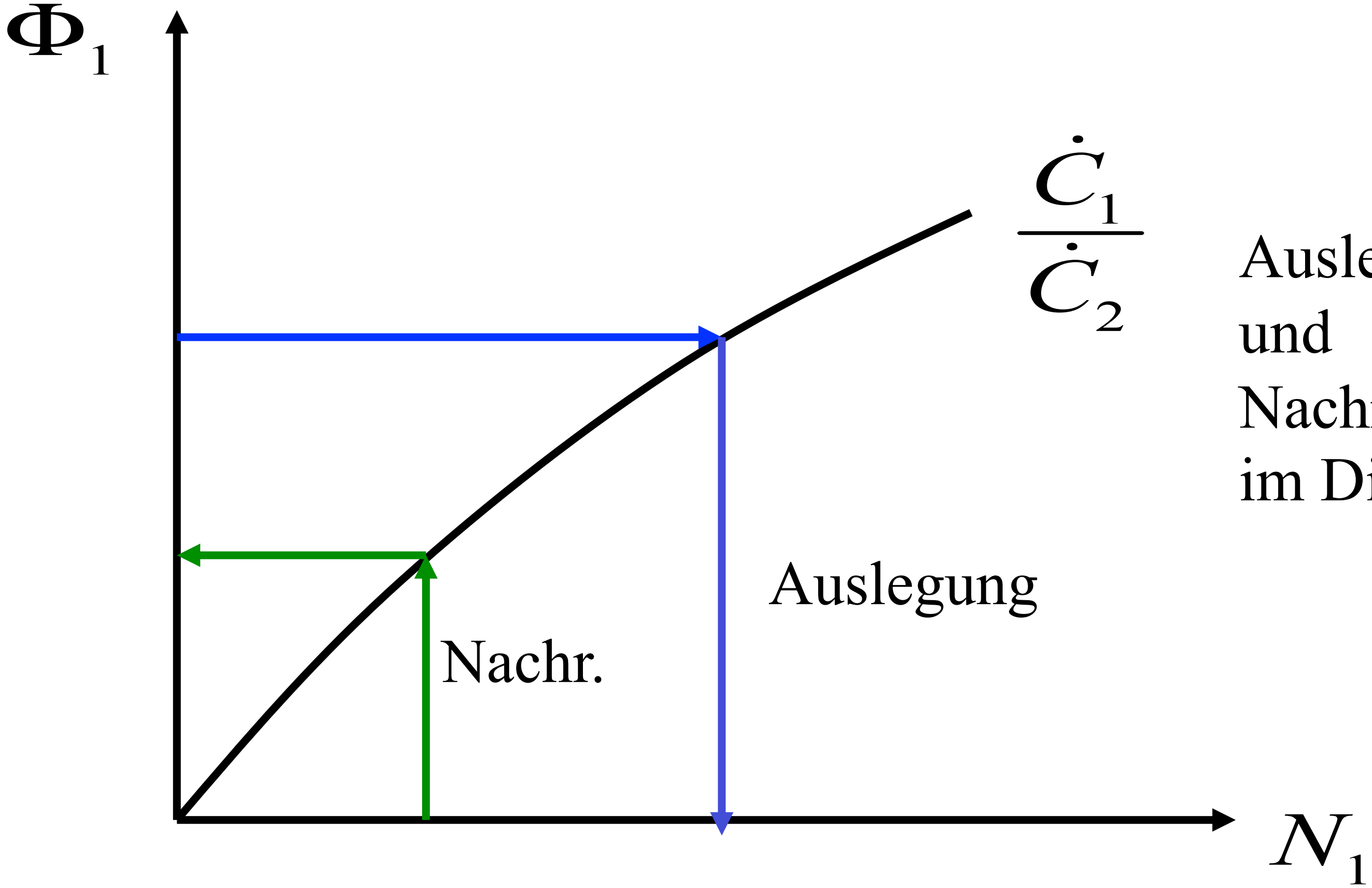
Wärmeübertrager: Dimensionslose Kennzahlen

$$f\left(\Phi_1, N_1, \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2}\right) = 0 \qquad N_1 = \frac{kA}{\dot{C}_1} \qquad N_2 = \frac{kA}{\dot{C}_2}$$

z.B. beim einseitig vermischten Kreuzstrom, nach längerer Rechnung: Betriebscharakteristik

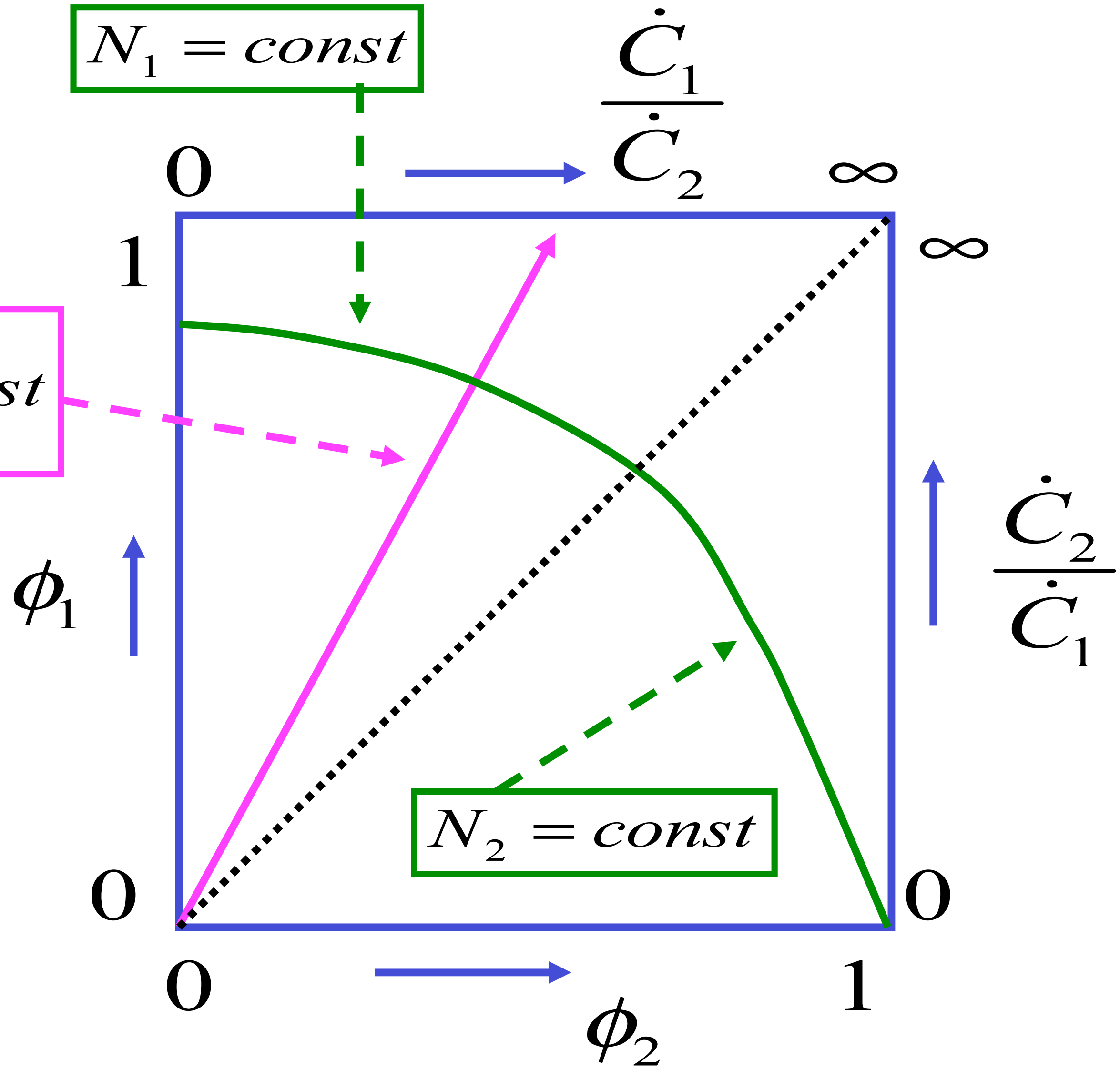
$$\phi_1 = 1 - \exp\left(-\frac{N_1}{N_2}\left(1 - e^{-N_2}\right)\right)$$

Wärmeübertrager: Dimensionslose Kennzahlen

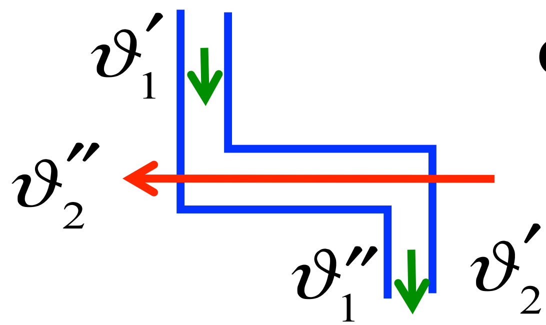


Auslegung
und
Nachrechnung
im Diagramm

Diagramme aus VDI-Wärmeatlas

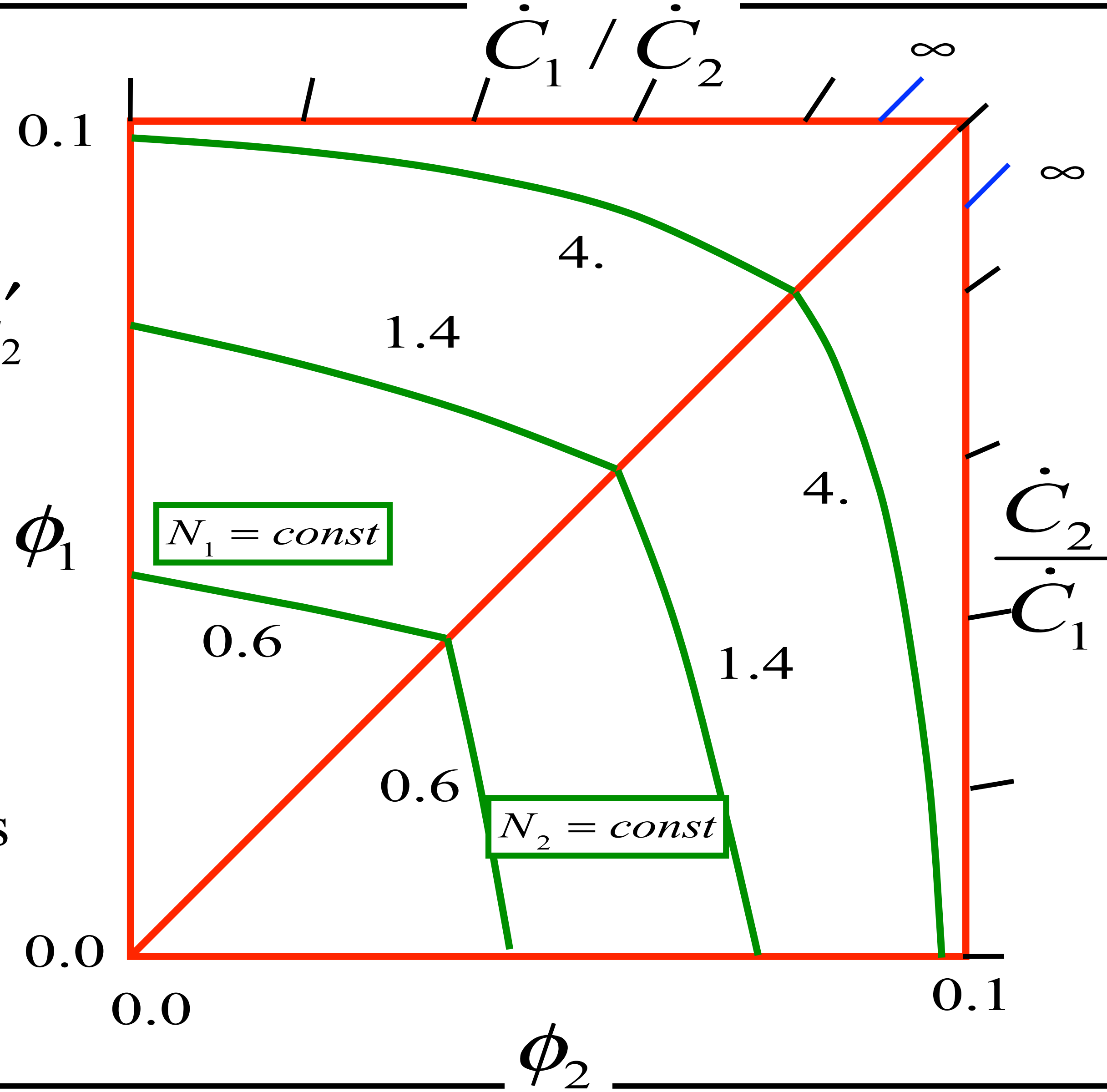


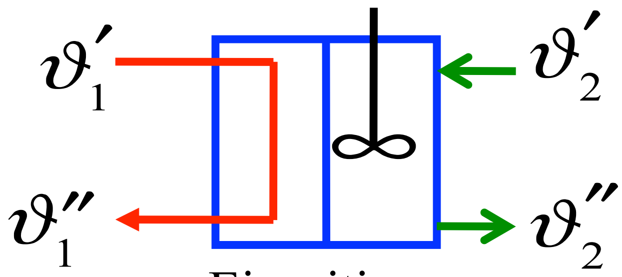
Schematisches Diagramm zur Berechnung von Wärmeüber-tragern



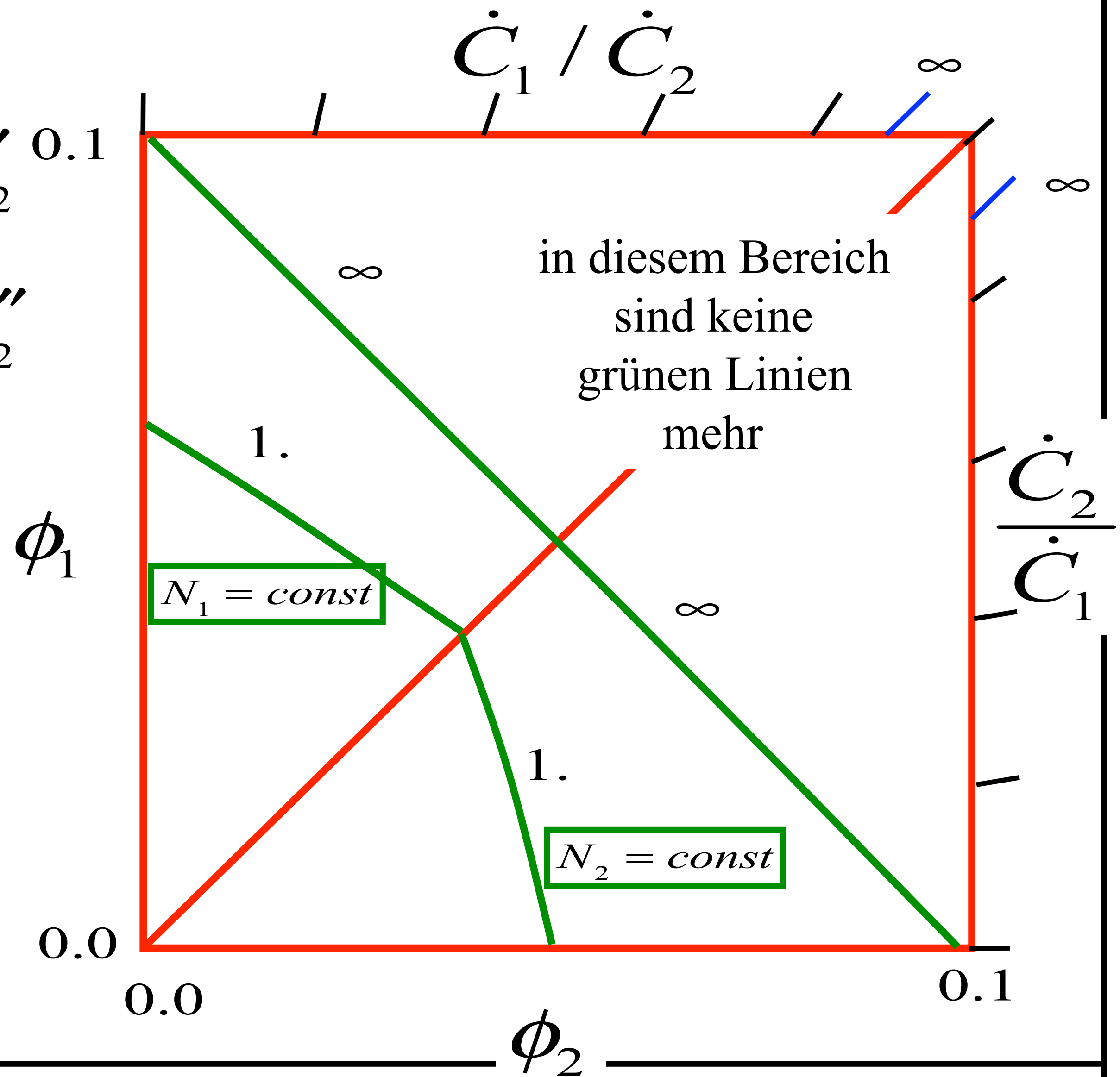
Reiner Gegenstrom

Berechung von
Wärmeübertragern
Bsp: VDI Wärmeatlas





Einseitiger Rührkessel



Berechung von Wärmeübertragern
Bsp: VDI Wärmeatlas

Ende Kapitel Wärmeübertrager
Fehler bitte melden, z.B. unter
egon.hassel@mbst.uni-rostock.de
Oder eine/n Assistentin/en

siehe auch:
www.LTT-Rostock.de oder

http://web.me.com/egon.hassel