

# „Höhere Thermodynamik“

**Prof. Dr.-Ing. habil. Egon Hassel**

**Universität Rostock  
Lehrstuhl für Technische Thermodynamik**

**WS 2011**



# Inhalt

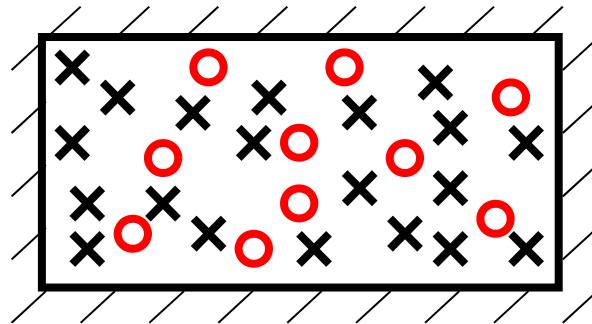
1. Einleitung/Abgrenzung
2. Grundbegriffe
3. Erster Hauptsatz
4. Zweiter Hauptsatz
5. Kreisprozesse
6. Exergie
7. Thermodynamische Eigenschaften reiner Stoffe
8. **Gemische und feuchte Luft**
9. Verbrennung
10. Wärmeübertrager
11. Energieumwandlung Wärme-Arbeit



# Gemische und Mischungsprozesse

Zum Beispiel Mischungen in abgeschlossenen Systemen

Abgeschlossenes System



Komponenten:

× 20 Teilchen

○ 10 Teilchen

Gesamt 30 Teilchen



## Gemische und Mischungsprozesse

**Gemische:**

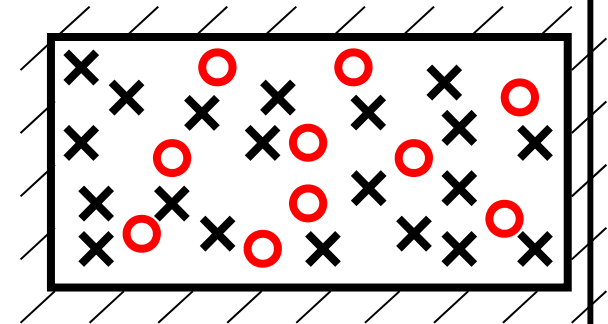
Gemisch aus N Komponenten,  
 $m_i$  = Masse der i-ten Komponente

Gesamtmasse:

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_N$$

Massenanteil:

$$\xi_i = \frac{m_i}{m}$$



$$\Rightarrow \sum_i \xi_i = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N = 1$$

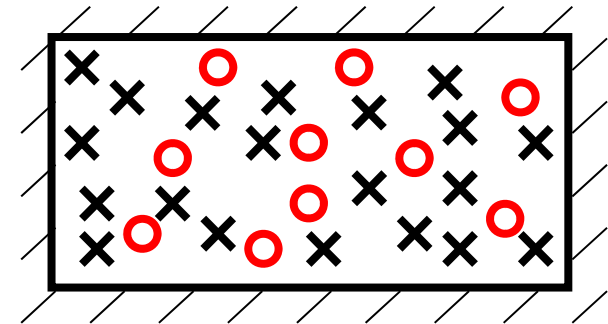


## Gemische

Mol(an)zahl der Komponente i:  $n_i = \frac{m_i}{M_i}$

$M_i$  = Molmasse in (kg/ kmol) oder (g/ mol)

$$m = \sum_{i=1}^N m_i = \sum_{i=1}^N n_i M_i$$



Gesamtmolzahl:  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_N = \sum_i n_i$



## Gemische

Molanteil:

$$\psi_i = \frac{n_i}{n}$$

$$\sum_{i=1}^N \psi_i = \psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_N = 1$$

Durch Einsetzen kann man zeigen:

$$\xi_i = \psi_i \frac{M_i}{M}$$

mit

$$M = \sum_i \psi_i M_i$$

Mittlere  
Molmasse



## Gemische

$$\xi_i = \psi_i \frac{M_i}{M} \quad M = \sum_i \psi_i M_i$$

---

Beweis:  $\xi_i \equiv \frac{m_i}{m} \stackrel{!}{=} \psi_i \frac{M_i}{M} \equiv \frac{n_i}{n} \cdot M_i \frac{1}{\sum \psi_i M_i}$

$$\frac{m_i}{\sum n_i M_i} \stackrel{!}{=} \frac{n_i M_i}{n} \cdot \frac{1}{\sum \frac{n_i}{n} M_i} \quad \text{q.e.d.}$$

*(Red arrows point from the definition of  $m$  to the denominator of the first fraction, and from the definition of  $M$  to the denominator of the second fraction.)*



## Gemische

Definition:  $M =$  Molmasse des Gemisches

Es folgt auch:

$$\frac{1}{M} = \sum_i \frac{\xi_i}{M_i}$$

Von früher:

$$M = \sum_i \psi_i M_i$$

Beweis durch Einsetzen:

$$\frac{1}{\sum \psi_i M_i} = \sum_i \frac{m_i}{m M_i}$$

$$\frac{1}{\sum \frac{n_i}{n} M_i} = \frac{1}{m} \sum n_i \Leftrightarrow \frac{\cancel{n}}{\sum n_i M_i} = \frac{1}{m} \cancel{n} \quad \text{q.e.d.}$$



## Gemische idealer Gase

$$U = \sum_{i=1}^N m_i u_i = m \sum_{i=1}^N \xi_i u_i$$

Die innere Energie  $U$  ist eine extensive Zustandsgröße

$$U = \sum_{i=1}^N n_i U_{mi} = n \sum_{i=1}^N \psi_i U_{mi}$$

Definition:

$U_{mi}$  = molare innere Energie der Komponente  $i$  in kJ/ kmol



## Gemische

Spezifische innere Energie:  $u = \frac{U}{m} = \sum_{i=1}^N \xi_i u_i$

Molare innere Energie:  $U_m = \frac{U}{n} = \sum_{i=1}^N \psi_i U_{mi}$

Entsprechend  $h = \sum_{i=1}^N \xi_i h_i$

$$H_m = \sum_{i=1}^N \psi_i H_{mi}$$



## Gemische

Spezifische Wärmekapazitäten des Gemisches

$$c_v = \sum_{i=1}^N \xi_i c_{vi} \qquad c_p = \sum_{i=1}^N \xi_i c_{pi}$$

Molare Wärmekapazitäten:

$$c_{mv} = \sum_{i=1}^N \psi_i c_{mvi} \qquad c_{mp} = \sum_{i=1}^N \psi_i c_{mpi}$$



## Gemische

Entropie:

$$S = \sum_{i=1}^N m_i s_i$$

Auch die Entropie  
ist eine  
extensive  
Zustandsgröße

Spezifische Entropie:

$$s = \sum_{i=1}^N \xi_i s_i$$

Molare Entropie:

$$S_m = \sum_{i=1}^N \psi_i S_{mi}$$

Die molaren Größen werden mit den Großbuchstaben und Index m bezeichnet z.B.  $S_m$ ,  $H_m$ ,  $U_m$ , ...



# Prozesse zu Mischungen idealer Gase



## Modell eines idealen Gases

Ein ideales Gas besteht aus kleinen nichtelastischen harten Kugeln. Außer beim Stoß, wechselwirken diese nicht miteinander.

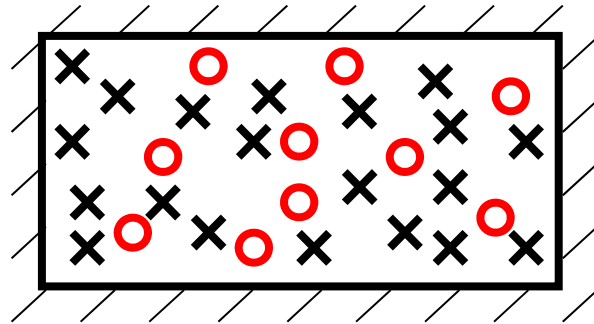
Es gilt:  $pv = RT$

Aber  $c_v$  und  $c_p$  dürfen von der Temperatur abhängen



## Mischungen von idealen Gasen: Gesetz von Dalton

Abgeschlossenes System



Komponenten:

× 20 Teilchen

○ 10 Teilchen

Gesamt 30 Teilchen

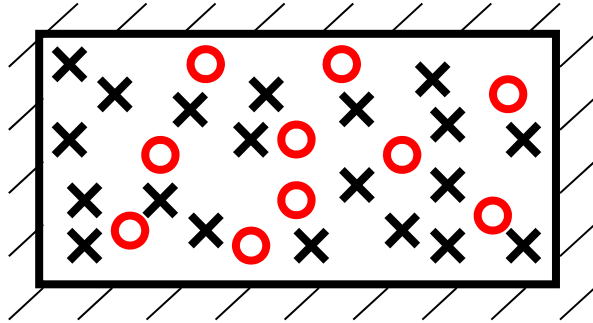
Für jedes Teil-Gas gilt:

$$p_i V = m_i R_i T = n_i R_m T$$

**Gesetz von Dalton**



## Mischungen von idealen Gasen



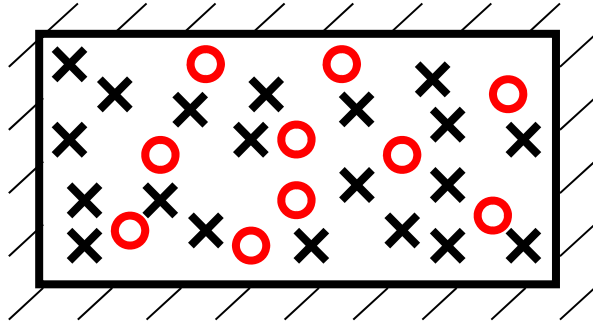
$$p_i V = m_i R_i T = n_i R_{mi} T$$

Für Mischung gilt:  $pV = mRT = nR_m T$

Mit:  $R_m = 8.314 \text{ J/mol K}$  für alle Gase



## Mischungen von idealen Gasen



$$p_1 V = m_1 R_1 T = n_1 R_m T$$

$$p_2 V = m_2 R_2 T = n_2 R_m T$$

$$\Rightarrow (p_1 + p_2) V = (m_1 R_1 + m_2 R_2) T = (n_1 + n_2) R_m T$$

$$\Rightarrow p V = m R T = n R_m T$$



## Mischungen von idealen Gasen

Zur Erinnerung:  $R_m$  = molare Gaskonstante, für alle Gase gleich.

$$p V = n R_m T \qquad n = \sum_{i=1}^N n_i$$

$$p = \sum_{i=1}^N p_i = \sum_{i=1}^N \frac{n_i R_m T}{V} = n \frac{R_m T}{V}$$

$p_i$  = Partialdruck  
 $p$  = Gesamtdruck



## Gemische

Bei Gemischen idealer Gase füllt jedes einzelne Teilgas den ganzen Raum so aus, als ob es alleine vorhanden wäre und nimmt den entsprechenden Partialdruck an.

Der Gesamtdruck  $p$  ist die Summe der Partialdrücke  $p_i$ .

Es folgt weiter:

$$\frac{p_i}{p} = \frac{n_i}{n} = \psi_i$$

Die Partialdrücke verhalten sich wie die Molanteile

Es gilt weiterhin:

$$p_i V = m_i R_i T$$



## Gemische

$$p_i V = m_i R_i T$$

$R_i$  = spezifische Gaskonstante in kJ/ kgK

$$R_i = \frac{R_m}{M}$$

Und mit

$$R = \sum_{i=1}^N \xi_i \frac{R_m}{M_i} = \frac{R_m}{M} \sum_{i=1}^N \psi_i = \frac{R_m}{\sum_{i=1}^N \psi_i M_i} = \frac{R_m}{M}$$

$$\Rightarrow pV = mRT$$



## Gemisch - „trockene Luft“

Gewöhnliche „trockene Luft“ ist ein Gemisch aus:

$$\psi_{N_2} = 0,781 \frac{\text{kmol}N_2}{\text{kmolLuft}} \quad \psi_{O_2} = 0,210 \frac{\text{kmol}O_2}{\text{kmolLuft}}$$

$$\psi_{Ar} = 0,009 \frac{\text{kmol}Ar}{\text{kmolLuft}}$$

Und CO<sub>2</sub>, Ne, He, Kr, Xe, O<sub>3</sub> mit jeweils:  $\psi \leq 0,001$

Gaskonstante:  $R_L = 287 \text{ J/ kgK}$

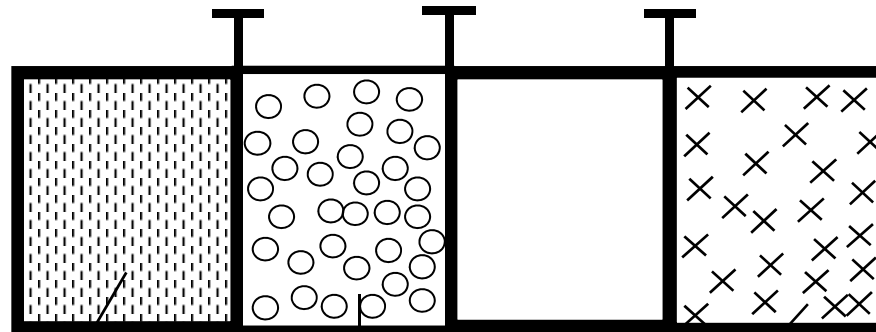
Molmasse:  $M_L = 28,966 \text{ kg/ kmol}$



# Adiabate Mischung idealer Gase (geschlossenes System)

## Mischungsvorgang bei konstantem Volumen

*Zustand I*



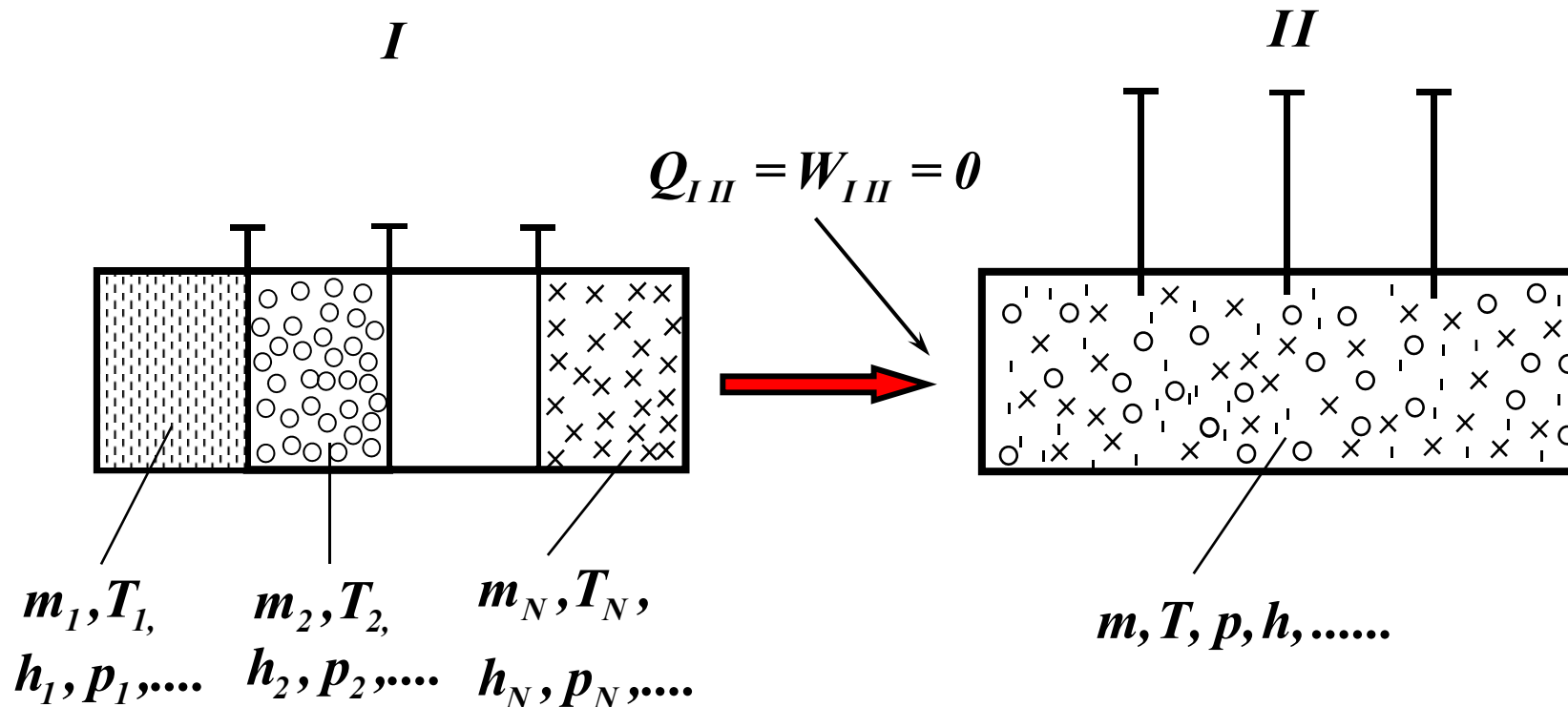
$$\begin{array}{ccc} m_1, T_1, & m_2, T_2, & m_N, T_N, \\ h_1, p_1, \dots & h_2, p_2, \dots & h_N, p_N, \dots \end{array}$$



# Anwendung 1. HS geschlossene Systeme



## Mischungsvorgang bei konstantem Volumen



Im Zustand *I* sind die einzelnen Gase getrennt; nach Entfernung der Trennwände können die einzelnen Gase sich über das ganze Volumen ausdehnen, Zustand *II*

## Adiabate Mischung idealer Gase (geschlossenes System)

1.HS ohne äußere Energien:

I – vorher

V = const

II - nachher

$$Q_{I II} + W_{I II} = U_{II} - U_I = 0$$

$$U_{II} - U_I = \sum_{i=1}^N m_i (u_{iII} - u_{iI}) = 0$$

$$U_{II} - U_I = 0 = \sum_{i=1}^N m_i \int_{T_{iI}}^{T_{iII}} c_{vi}(T) dT$$

$$= \sum_{i=1}^N m_i [c_{vi}]_{T_{iI}}^{T_{iII}} (T_{iII} - T_{iI})$$

← ←

⇒ Mischungstemperatur  $T_{II}$  (evtl iterativ)

$$T_{iII} \equiv T_{II}$$



## Adiabate Mischung idealer Gase (geschlossenes System)

$$U_{II} - U_I = 0 = \sum_{i=1}^N m_i [c_{vi}]_{T_{iI}}^{T_{iII}} (T_{iII} - T_{iI}) \quad \begin{array}{l} V = \text{const} \\ T_{iII} \equiv T_{II} \end{array}$$

Mischungstemperatur für ideale Gase in einem abgeschlossen System

$$T_{II} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i T_i [c_{vi}]_{T_i}^{T_{II}}}{m_i [c_{vi}]_{T_i}^{T_{II}}}$$

Iterativ zu lösen, falls

$$c_{vi}(T) \neq \text{const}$$

Zur Erinnerung:

$$[c_v]_{T_1}^{T_2} = \frac{\int_{T_1}^{T_2} c_v(T) dT}{T_2 - T_1}$$



# 2. HS für geschlossene Systeme



## Adiabate Mischung idealer Gase

2. HS für adiabates System:  $S_{irrI,II} = S_{II} - S_I$

$$S_{irrI,II} = S_{II} - S_I = \sum_{i=1}^N m_i \left[ \int_{T_{iI}}^{T_{iII}} \frac{c_{vi}}{T} dT + R_i \ln \frac{V_{iII}}{V_{iI}} \right]$$

Mischungsentropie

Oder auch:

$$S_{irrI,II} = S_{II} - S_I = \sum_{i=1}^N m_i \left[ \int_{T_{iI}}^{T_{iII}} \frac{c_{pi}}{T} dT - R_i \ln \frac{p_{iII}}{p_{iI}} \right]$$



## Adiabate Mischung idealer Gase

$$T_{iII} \equiv T_{II}$$

$$S_{irrI,II} = S_{II} - S_I = \sum_{i=1}^N m_i \left[ \int_{T_{iI}}^{T_{II}} \frac{c_{vi}}{T} dT + R_i \ln \frac{V_{iII}}{V_{iI}} \right]$$

$$S_{irrI,II} = S_{II} - S_I = \sum_{i=1}^N m_i \left[ \int_{T_{iI}}^{T_{II}} \frac{c_{pi}}{T} dT - R_i \ln \frac{p_{iII}}{p_{iI}} \right]$$



## Adiabate Mischung idealer Gase

$$S_{irrI,II} = S_{II} - S_I = \sum_{i=1}^N m_i \left[ \int_{T_{iI}}^{T_{iII}} \frac{c_{pi}}{T} dT - R_i \ln \frac{p_{iII}}{p_{iI}} \right]$$

---

Man sieht, die Gesamtentropie ist gleich der Summe der Entropiedifferenz der Einzelgaskomponenten, „als ob die anderen Komponenten nicht da wären“.

Wichtig ist, genau darauf zu achten, welche  $V_i$  und  $p_i$  man einsetzt !!!



# Gibt es eine reversible Vermischung ?

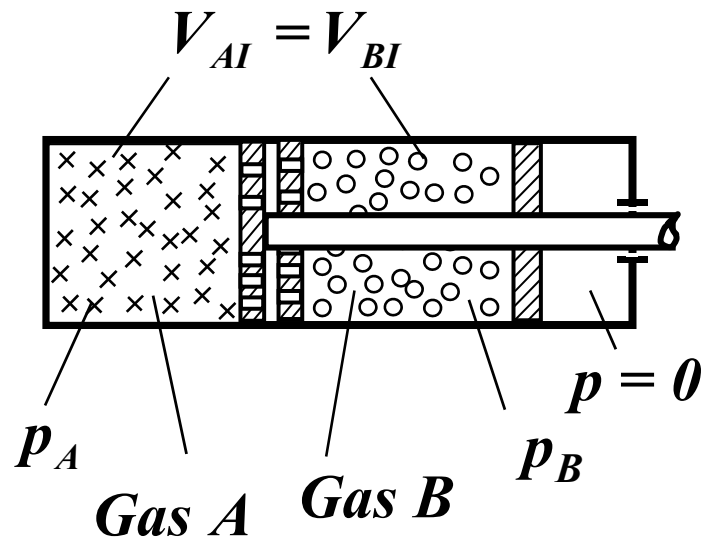
Gedankenpause

Was ist mit der Mischungsentropie ?



## Beispiel für reversible Vermischung idealer Gase:

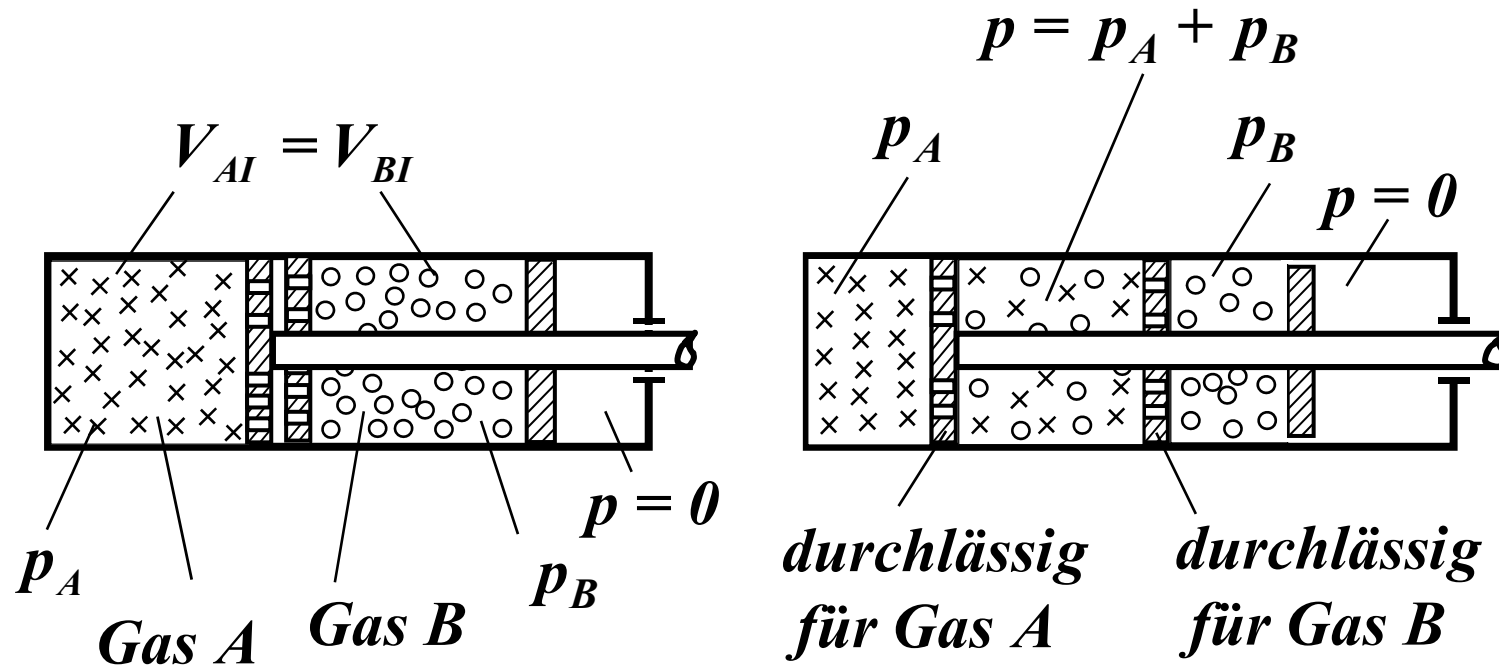
Gedankenexperiment zur reversiblen Vermischung zweier Gase  
(Knoche, Bosnjacovic)



Der linke (bewegliche) Kolben sei durchlässig nur für Gas A, der mittlere (unbewegliche) nur für Gas B und der rechte Kolben gasundurchlässig.

➡ Langsame Verschiebung der Kolben

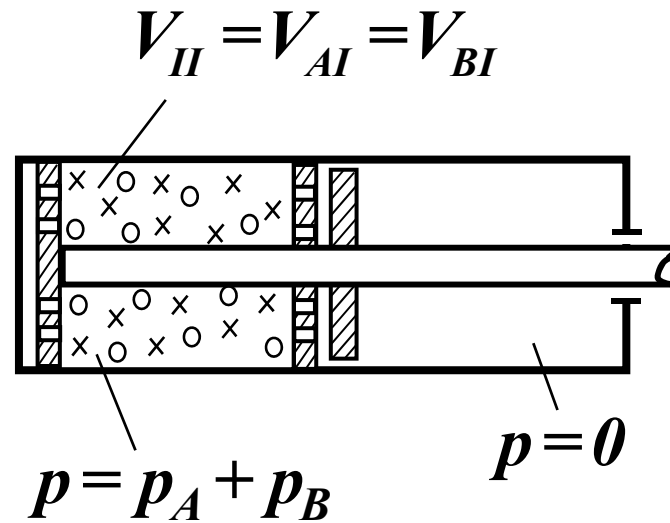
## Beispiel für reversible Vermischung idealer Gase:



Bei langsamer Bewegung erfolgt die Verschiebung der Kolben im mechanischen Gleichgewicht (von links und von rechts wirken die Drücke  $p_A$  und  $p_B$  auf das bewegliche Kolbensystem)

## Beispiel für reversible Vermischung idealer Gase:

Ergebnis:



Ja, es gibt eine reversible Vermischung

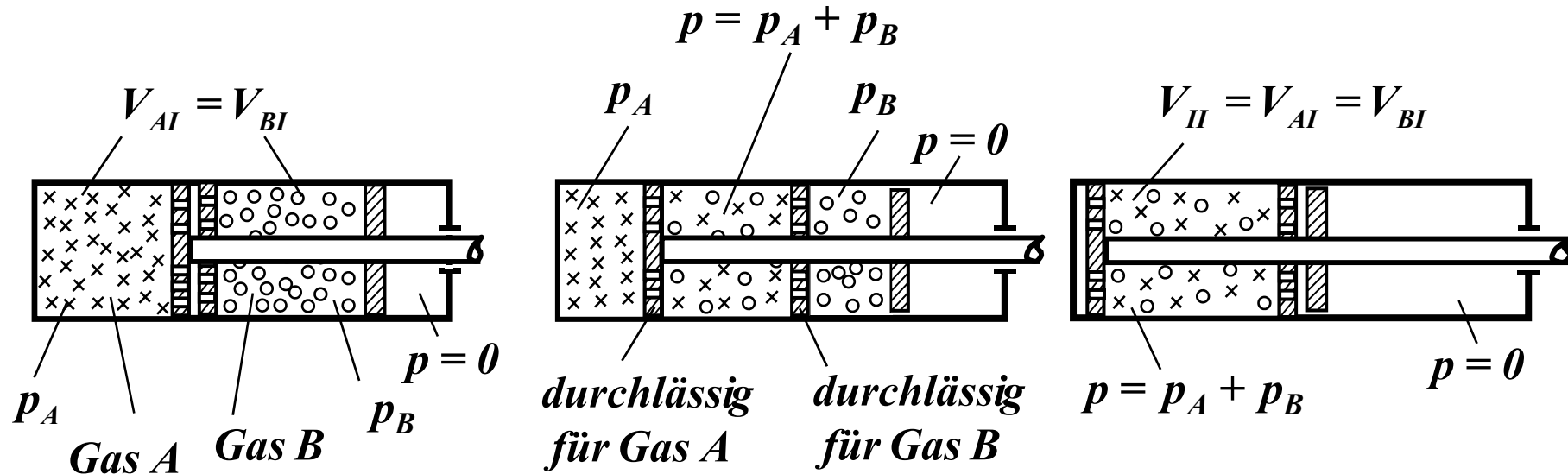
## Beispiel für reversible Vermischung idealer Gase:

Ergebnis: Ja, es gibt eine reversible Vermischung  
(bei Idealen Gasen)

Die Entropieerhöhung bei der Mischung idealer Gase kommt daher, dass die Teilgase nach der Mischung ein anderes Volumen annehmen können als vorher, bzw. nach der Mischung andere (Partial-)drücke haben als vorher.



# Gedankenexperiment zur reversiblen Vermischung zweier Gase (Knoche, Bosnjacovic)



Der linke (bewegliche) Kolben sei durchlässig nur für Gas A, der mittlere (unbewegliche) nur für Gas B und der rechte Kolben gasundurchlässig. Bei langsamer Bewegung erfolgt die Verschiebung der Kolben im mechanischen Gleichgewicht (von links und von rechts wirken die Drücke  $p_A$  und  $p_B$  auf das bewegliche Kolbensystem)

## Stationärer und adiabater Mischungsprozess im stationären Fließprozess

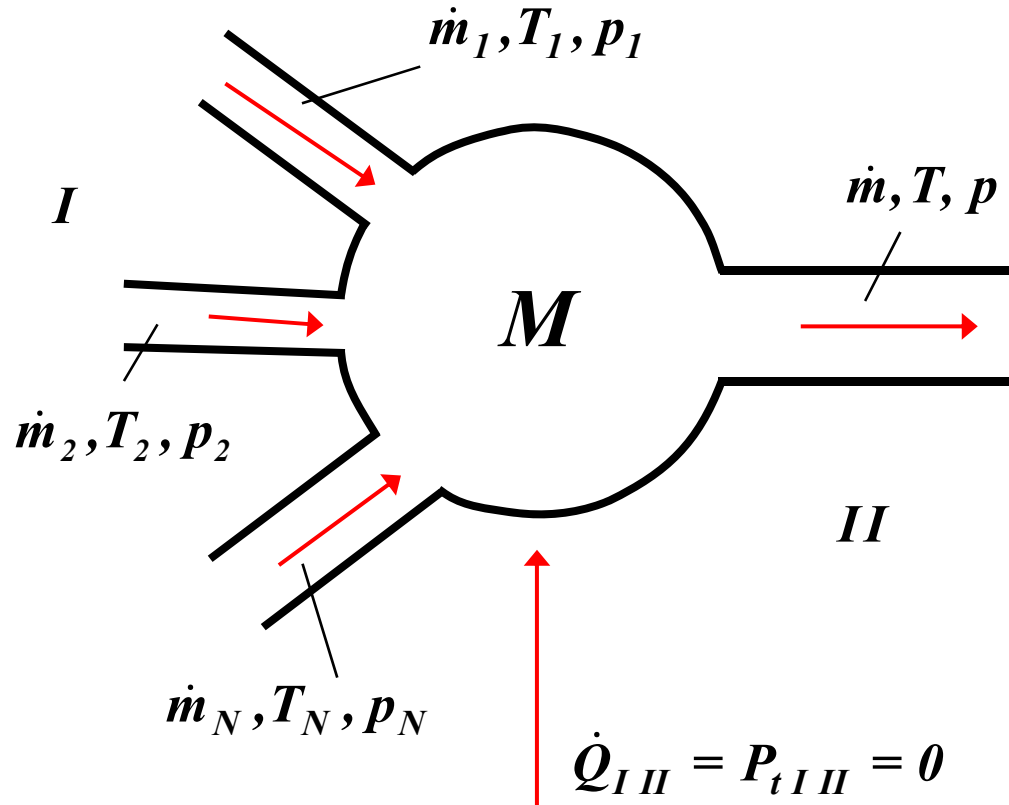


Bild:  
Stationäre Vermischung

M: Mischkammer,  
 $I$ : Zustand vor der Vermischung  
 $II$ : Zustand nach der Vermischung

## Stationärer und adiabater Mischungsprozess im stationären Fließprozess

Massenbilanz:

$$\dot{m} = \sum_{i=1}^N \dot{m}_i$$

1. HS:

$$\dot{Q}_{I,II} + \dot{W}_{tl,II} = \dot{H}_{II} - \dot{H}_I + \Delta \dot{E}_{al,II}$$

$$\cancel{\dot{Q}_{I,II}}^0 + \cancel{\dot{W}_{tl,II}}^0 = \dot{H}_{II} - \dot{H}_I + \cancel{\Delta \dot{E}_{al,II}}^0$$

$$\Rightarrow 0 = \dot{H}_{II} - \dot{H}_I = \sum_i \dot{m}_i (h_{iII} - h_{iI})$$



## Stationärer und adiabater Mischungsprozess im stationären Fließprozess

$$0 = \dot{H}_{II} - \dot{H}_I = \sum_i \dot{m}_i (h_{iII} - h_{iI})$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_i \dot{m}_i \left[ c_p \right]_{T_i}^T (T - T_i)$$

$$\Rightarrow T = \frac{\sum_i \xi_i \left[ c_{pi} \right]_{T_i}^T T_i}{\sum_i \xi_i \left[ c_{pi} \right]_{T_i}^T}$$

Mischungstemperatur,  
iterativ zu lösen,  
Stationärer Fließprozess



## Stationärer und adiabater Mischungsprozess im stationären Fließprozess

$$\dot{m} = \frac{p\dot{V}}{RT} \qquad \dot{m}_i = \frac{p_i\dot{V}_i}{R_iT_i}$$

$\dot{V}$  = Volumenstrom in z.B. m<sup>3</sup>/h

$$\dot{V} = \frac{RT}{p} \dot{m} = \frac{T}{p} \sum_i m_i = \frac{T}{p} \sum_i \frac{p_i\dot{V}_i}{T_i}$$



Stationärer und adiabater Mischungsprozess im stationären  
Fließprozess, 2. HS:

$$\begin{aligned}\dot{S}_{irrI,II} &= \dot{S}_{II} - \dot{S}_I = \sum_{i=1}^N \dot{m}_i (s_{iII} - s_{iI}) \\ &= \sum_{i=1}^N \dot{m}_i \left\{ \int_{T_i}^T \frac{c_{vi}}{T} dT + R_i \ln \frac{\dot{V}}{\dot{V}_i} \right\}\end{aligned}$$

Beachte hier:  $\ln\left(\frac{\dot{V}}{\dot{V}_i}\right)$        $\dot{V}_i$  meint  $\dot{V}_{iI}$

Also  $\dot{V}_i = \dot{V}_{iI}$  und  $\dot{V} = \dot{V}_{II}$  für alle i.



## 2. HS adiabates System Entropierzeugung

Daher 
$$\ln \frac{\dot{V}}{\dot{V}_i} = \ln \frac{\dot{V}_{iII}}{\dot{V}_{iI}} = -\ln \frac{p_{iII}}{p_{iI}} + \ln \frac{T}{T_i}$$

$$(p_i \dot{V}_i = \dot{m}_i R_i T)$$

$$\dot{S}_{irrI,II} = \sum_{i=1}^N \dot{m}_i \left\{ \int_{T_i}^T \frac{c_{pi}}{T} dT - R_i \ln \frac{p_{iII}}{p_{iI}} \right\}$$

Ist die Irreversibilität der Vermischung;  
diese ist die Summe der Entropieänderungen der Einzelgase, die durch die Temperaturänderung und die Änderung des Partialdruckes zustande kommt.



Weil dies für das Verständnis wichtig ist, Vergleich mit Literatur und einige Umformungen.

**Nach Baehr:**

Spezifische Entropie ideales Gasgemisch, geschlossenes System:

$$s = \sum_{i=1}^N \xi_i s_i(T, p) - R \sum_{i=1}^N \psi_i \ln \psi$$

Baehr definiert Mischungsentropie:

$$\Delta s = -R \sum_{i=1}^N \psi_i \ln \psi$$

S bedeutet dabei nach der Mischung



Wir wollen mit unserem Ausdruck vergleichen und bilden daher die Differenz:

Nachher – vorher: Hierzu benötigen wir  $S_i(T, p)$  nach Baehr.

Wir nehmen der Einfachheit nur zwei Gase A und B,  $e_p = \text{konstant}$ .

$$m = m_A + m_B$$



$$\begin{aligned}
s_{nach} - s_{vor} = & \frac{m_A}{m} \left( c_{pA} \ln \frac{T}{T_{AI}} - R_A \ln \frac{p}{p_{AI}} \right) \\
& + \frac{m_B}{m} \left( c_{pB} \ln \frac{T}{T_{AII}} - R_B \ln \frac{p}{p_{BI}} \right) \\
& - R \left( \frac{p_{AII}}{p} \ln \frac{p_{AII}}{p} - \frac{p_{BII}}{p} \ln \frac{p_{BII}}{p} \right)
\end{aligned}$$



Diese Gleichung ist kritisch zu betrachten.

Wie  $R$  eine gemittelte Gaskonstante für das Gemisch bedeutet, aber nur als mathematische Definition, so wird bei  $s_i(T, p)$  der Gesamtdruck eingesetzt, aber für jede einzelne Komponente gerechnet, die ja nur einen Partialdruck von  $p_i$  hat.

Den Temperaturterm lassen wir aus Bequemlichkeit weg, er stimmt überein.



Und wir multiplizieren die Gleichung mit  $m$  und vergleichen die restlichen Terme:

Behauptung:

$$\begin{aligned}
 & -m_A R_A \ln \frac{p}{T_{AI}} - m_B R_B \ln \frac{p}{p_{BI}} - mR \left( \frac{p_{AII}}{p} \ln \frac{p_{AII}}{p} + \frac{p_{BII}}{p} \ln \frac{p_{BII}}{p} \right) \stackrel{!}{=} \\
 & = -m_A R_A \ln \frac{p_{AII}}{T_{AI}} - m_B R_B \ln \frac{p_{BII}}{p_{BI}}
 \end{aligned}$$

Einsetzen  $mR = m_A R_A + m_B R_B$



Ausmultiplizieren

$$\begin{aligned} & -m_A R_A \ln p + m_A R_A \ln p_{AI} - m_B R_B \ln p + m_B R_B \ln p_{BI} \\ & -m_A R_A \frac{p_{AII}}{p} \ln p_{BI} - m_A R_A \frac{p_{BII}}{p} \ln p_{BII} - m_B R_B \frac{p_{AII}}{p} \ln p_{AII} \\ & -m_B R_B \frac{p_{BII}}{p} \ln p_{BII} + m_A R_A \frac{p_{AII}}{p} \ln p + m_A R_A \frac{p_{BII}}{p} \ln p \\ & -m_B R_B \frac{p_{AII}}{p} \ln p_{BII} + m_B R_B \frac{p_{BII}}{p} \ln p = \\ & = -m_A R_A \ln p_{AII} - m_B R_B \ln p_{BII} + m_A R_A \ln p_{AI} + m_B R_B \ln p_{BI} \end{aligned}$$



Beachte:  $p_{AII} + p_{BII} = p$

Gilt auch: (bzgl. Term mit  $\ln p_{AII}$  )

$$(-m_A R_A - m_B R_B) \psi_A = -m_A R_A$$

$$m_A R_A \frac{n_A}{n} - m_B R_B \frac{n_A}{n} = -m_A R_A$$

$$n_A = \frac{m_A}{M_A}$$

$$n = n_A + n_B$$



$$(-m_A R_A - m_B R_B) n_A = (n_A + n_B) m_A R_A$$

$$n_A m_B R_B = n_B m_A R_A$$

$$\frac{m_A}{M_A} m_B R_B = \frac{m_B}{M_B} m_A R_A$$

$$R_B M_B = R_m = R_A M_A$$

q.e.d.



# Jetzt kommt Feuchte Luft



## Feuchte Luft

Feuchte Luft ist ein Spezialfall eines Gas- Dampf- Gemisches.  
Dieses ist ein ideales Gasgemisch bei welchen aber in betrachteten  
T- Bereich eine Komponente kondensieren kann.

Anwendungen u.a. in der Klima- und Gebäudetechnik.

Das Gemisch besteht also  
aus trockener Luft + Wasserdampf + flüssigem Wasser oder  
aus trockener Luft + Wasserdampf + Eis (= Schnee, Hagel).

Ausnahme Tripelpunkt: Am Tripelpunkt liegt Wasser gleichzeitig  
in allen drei Phasen (fest, flüssig, dampf) vor.



## Feuchte Luft

### Modellannahmen:

- Gemisch:                   ideales Gemisch
  
- Trockene Luft:           ein eines ideales Gas (solange Zusammensetzung der Luft unverändert bleibt)
  
- Wasser:
  - Eis                       inkompressibler Festkörper
  - Wasser                 inkompressible Flüssigkeit
  - Dampf                 ideales Gas

Die Annahme eines idealen Gemisches idealer Gase für das Luft-Wasserdampf-Gemisch ist nur für kleine Drücke um 0,1 MPa bis max. 1 MPa zulässig.



## Feuchte Luft

**Frage:** Wieviel Wasserdampf kann die trockene Luft maximal aufnehmen?

**Antwort:** Soviel, wie dem Sättigungsdruck = Dampfdruckkurve des Wassers bei der betreffenden Temperatur entspricht  
z.B. bei  $24,1^{\circ}\text{C}$   $p_s(\vartheta) = 0,030 \text{ bar}$

Siehe Tabelle.

Genauere Rechnungen zeigen, dass  $p_s$  auch vom Gesamtdruck abhängt  $p_s(\vartheta, p_{\text{ges}})$ . Dies wirkt sich aber erst merklich bei höheren Drücken aus, hier Annahme  $p_{\text{max}} = p_s(\vartheta)$



## Feuchte Luft

Jetzt kommen zunächst wieder einige Nominal-Definitionen, damit wir die feuchte Luft formelmäßig erfassen können.



## Feuchte Luft - Zustandsgrößen

Masse:  $m = m_L + m_W$

$m_L$  = Masse trockene Luft,  
 $m_W$  = Masse Wasser gesamt

Def: Wassergehalt:  $x = \frac{m_W}{m_L}$

**Vorsicht nicht mit Dampfgehalt im Zweiphasengebiet bei Realgasverhalten verwechseln!**

$x = 0 \rightarrow$  trockene Luft

$x \rightarrow \infty \rightarrow$  reines Wasser

Wasser kann flüssig (Nebel, Niederschlag), fest (Eis, Schnee) und gasförmig (überhitzter Dampf) vorliegen.



## Feuchte Luft - Zustandsgrößen

Nomenklatur:

$$m_W = m_{W_{fl}} + m_{W_f} + m_{W_d}$$

$$x = x_{fl} + x_f + x_d$$

Für	$t > 0^\circ \text{ C}$	$\rightarrow x_f = 0$
	$t < 0^\circ \text{ C}$	$\rightarrow x_{fl} = 0$

Sowohl die Luft als auch der Wasserdampf werden hier als ideale Gase angesehen (nachdenken).

$$\Rightarrow p_L = \frac{m_L R_L T}{V} \qquad p_d = \frac{m_{Wd} R_d T}{V}$$



## Feuchte Luft - Zustandsgrößen

Gesamtdruck:  $p = p_L + p_d$

Es gilt auch  $M_d R_d = R_m = M_L R_L$

$$x_d = \frac{m_{wd}}{m_L} = \frac{p_d V R_L T}{R_d T p_L V} = \frac{p_d M_d}{p_L M_L} = \frac{p_d}{p - p_d} \frac{M_d}{M_L}$$

$$\frac{M_d}{M_L} = \frac{18,02}{28,96} = 0,622$$

$$p = p_L + p_d = \frac{m_L R_d T}{V} \left( \frac{M_d}{M_L} + x_d \right)$$



## Feuchte Luft - Zustandsgrößen

Beweis durch Einsetzen:

$$p = \frac{m_L R_d T}{V} \left( \frac{M_d}{M_L} + \frac{p_d}{p - p_d} \right)$$

$$\frac{M_d}{M_L} \left( 1 + \frac{p_d}{p - p_d} \right) = \frac{M_d}{M_L} \left( \frac{p - p_d + p_d}{p - p_d} \right)$$

$$p = \frac{m_L R_d T}{V} \frac{M_d}{M_L} \frac{p}{p_L} = \frac{m_L R_d T}{V} \frac{M_d}{M_L} \frac{p \cdot V}{m_L R_d T}$$

q.e.d.

$$V = \frac{m_L R_d T}{p} \left( \frac{M_d}{M_L} + x_d \right)$$

Gasvolumen (tr. Luft + Wasser)



## Feuchte Luft - Zustandsgrößen

$$V = \frac{m_L R_d T}{p} \left( \frac{M_d}{M_L} + x_d \right)$$

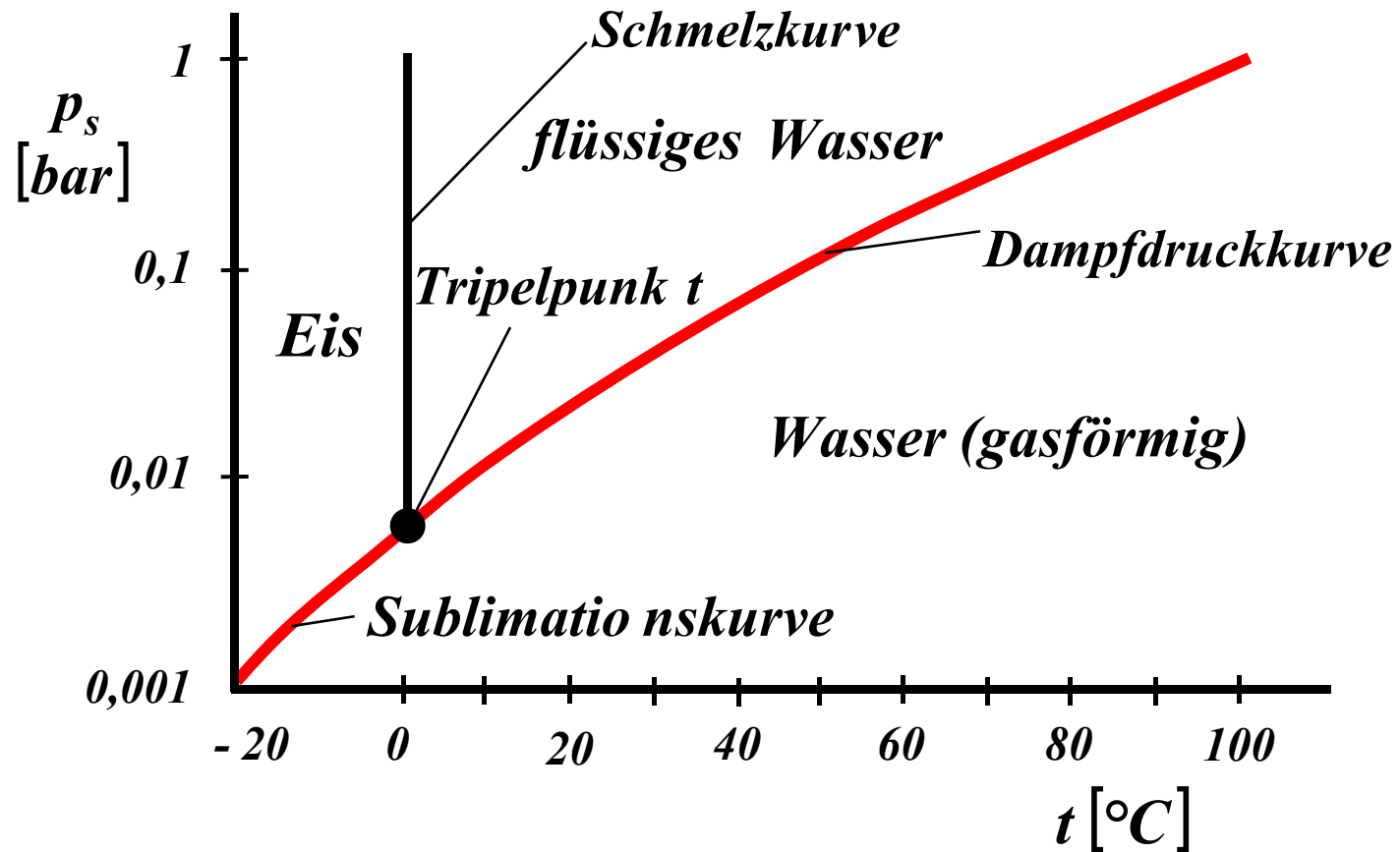
$$R_d = 461 \text{ J/kgK}$$

Das Volumen des festen und flüssigen Niederschlags ist i.d.R. vernachlässigbar gegen das Gasvolumen.

$$p_{d \max} = p_s(\vartheta, p) \approx p_s(\vartheta)$$



# p,t-Diagramm für Wasser



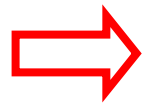
## Relative Feuchte

*Definition der relativen Feuchte:*

$$\varphi = \frac{p_d}{p_s}$$

$$0 \leq \varphi \leq 1$$

$\varphi = 0 \rightarrow$  trockene Luft  
 $\varphi = 1 \rightarrow$  gesättigte Luft



$$x_d = \frac{\varphi \cdot p_s}{p - \varphi \cdot p_s} \cdot 0,622 = \frac{p_s(\vartheta)}{\frac{p}{\varphi} - p_s(\vartheta)} \cdot 0,622$$



## Relative Feuchte

$$x_d = \frac{\varphi \cdot p_s}{p - \varphi \cdot p_s} \cdot 0,622 = \frac{p_s(\vartheta)}{\frac{p}{\varphi} - p_s(\vartheta)} \cdot 0,622$$

d.h.:

$$\left. \begin{array}{l} \vartheta = \text{const} \\ x_d = \text{const} \end{array} \right\} \frac{p}{\varphi} = \text{const}$$



## Relative Feuchte

$$x_d = \frac{\varphi \cdot p_s}{p - \varphi \cdot p_s} \cdot 0,622 = \frac{p_s(\vartheta)}{\frac{p}{\varphi} - p_s(\vartheta)} \cdot 0,622$$

---

mit  $\varphi = 1 \quad \Rightarrow \quad x_s = 0,622 \frac{p_s}{p - p_s}$

Wassergehalt bei Sättigung



## Relative Feuchte

$$x_s = 0,622 \frac{p_s}{p - p_s}$$

Wassergehalt bei Sättigung

$x \leq x_s \Rightarrow x_f = x_{fl} = 0$  Es liegt nur Wasserdampf vor

$x > x_s \Rightarrow x_f > 0$  und/ oder  $x_{fl} > 0$



## Relative Feuchte

Def. Sättigungsgrad für  $x \leq x_s$

$$X = \frac{x_d}{x_s} = \frac{p_d}{p - p_d} \frac{p - p_s}{p_s} = \frac{\varphi \cdot p_s (p - p_s)}{(p - \varphi \cdot p_s) p_s} =$$



$$X = \varphi \cdot \frac{p - p_s}{p - \varphi \cdot p_s} \quad \text{Sättigungsgrad} \quad 0 \leq X \leq 1$$

Für niedrige Temperaturen:  $p_s \ll p \Rightarrow x \approx \varphi$

Der Sättigungsgrad wird von uns nicht viel verwendet



## Enthalpie feuchter Luft

Gemäß  $h = \frac{H}{m_L} = \sum_{i=1}^N \xi_i h_i$  Bezogen auf Masse trockener Luft



⇒

$$H = m_L h_L + m_{Wfl} h_{Wfl} + m_{Wf} h_{Wf} + m_{wd} h_{wd}$$

⇒

$$h = h_L + x_{fl} h_{Wfl} + x_f h_{Wf} + x_d h_{Wd}$$



## Enthalpie feuchter Luft

Nullpunktfestlegung willkürlich  $\vartheta_0 = 0^\circ \text{ C} \rightarrow h_L = h_{Wfl} = 0$

$$h_L(\vartheta) = c_{pL} \cdot \vartheta$$

$$h_{Wfl}(\vartheta) = c_{pWfl} \cdot \vartheta$$

$$h_{Wf}(\vartheta) = c_{pWf} \cdot \vartheta - r_{f0}$$

$$h_{Wd}(\vartheta) = c_{pWd} \cdot \vartheta + r_{d0}$$

$$c_{pl} = 1,004 \text{ kJ/ kgK}$$

$$c_{Wfl} = 4,19 \text{ kJ/ kgK}$$

$$c_{Wf} = c_{pWf} = 2,05 \text{ kJ/ kgK}$$

$$c_{pWd} = 1,86 \text{ kJ/ kgK}$$

$$r_{f0} = 333 \text{ kJ/ kg}$$

$$r_{d0} = 2500 \text{ kJ/ kg (bei } 0^\circ \text{ C)}$$

$r_{f0} = \text{Schmelzwärme}$        $r_{d0} = \text{Verdampfungswärme}$       bei  $0^\circ \text{ C}$



## Enthalpie feuchter Luft

Zahlenwerte:

$$c_{pl} = 1,004 \text{ kJ/ kgK}$$

$$c_{wfl} = 4,19 \text{ kJ/ kgK}$$

$$c_{wf} = c_{pwf} = 2,05 \text{ kJ/ kgK}$$

$$c_{pWd} = 1,86 \text{ kJ/ kgK}$$

$$r_{f0} = 333 \text{ kJ/ kg}$$

$$r_{d0} = 2500 \text{ kJ/ kg (bei } 0^\circ \text{ C)}$$



Großer Wert

Bemerkung:

$$r_d = r_d(\mathcal{G}) = h''(\mathcal{G}) - h'(\mathcal{G})$$



## Enthalpie feuchter Luft

Betrachte Fehler, Abweichung von Tabelle zu den Formeln eben:

Betrachte 1kg flüssiges Wasser,  $\vartheta = 0^\circ \text{ C}$

- a) verdampft bei  $0^\circ \text{ C}$ , Dampf  $0^\circ \text{ C} \rightarrow 100^\circ \text{ C}$
- b) Tabelle

a)  $h_{\text{wd}} = (1,86 \cdot 100 + 2500) \text{ kJ/kg} = 2686 \text{ kJ/kg}$

- b) Tabelle (von vorne):

Nullpunkt beachten:  $h_{\text{wd}} = 2676 \text{ kJ/kg}$

Die Abweichung ist genügend klein.



## Enthalpie feuchter Luft (Randmaßstab)

Es folgen drei Fälle im Detail:

Ungesättigte Luft ( $x = x_d < x_s$ )

Gesättigte Luft mit  $\vartheta > 0^\circ\text{C}$

Gesättigte Luft mit  $\vartheta < 0^\circ\text{C}$

Das führt auf den Randmaßstab im h-x-Diagramm



## Enthalpie feuchter Luft (Randmaßstab)

Ungesättigte Luft



$$(x = x_d < x_s)$$

$$h = h_L + x \underline{h_{wd}}$$

$$h = c_{pl} \mathcal{G} + x \underline{(c_{pWd} \mathcal{G} + r_{d0})}$$

$$\left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)_{p, \mathcal{G}} = c_{pWd} \mathcal{G} + r_{d0} = \underline{h_{wd}}$$



## Enthalpie feuchter Luft (Randmaßstab)

Gesättigte Luft mit  $\vartheta > 0^\circ\text{C}$

$$\Rightarrow \quad x \geq x_s \quad x_f = 0$$

$$h = h_L + x_s h_{Wd} + x_{fl} h_{Wfl}$$

$$h = c_{pl} \vartheta + x_s (c_{pWd} \vartheta + r_{d0}) + (x - x_s) c_{Wfl} \cdot \vartheta$$

$$\left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)_{p, \vartheta} = c_{Wfl} \vartheta = h_{Wfl}$$



## Enthalpie feuchter Luft (Randmaßstab)

Gesättigte Luft mit  $\vartheta < 0^\circ\text{C}$   $\Rightarrow x_{fl} = 0$

---

$$h = h_L + x_s h_{wd} + x_f h_{wf}$$

$$h = c_{pl} \vartheta + x_s (c_{pWd} + r_{d0}) + (x - x_s) (c_{wf} \cdot \vartheta - r_{f0})$$

$$\left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)_{p, \vartheta} = c_{wf} \vartheta - r_{f0} = h_{wf}$$

Das führt auf den Randmaßstab im h-x-Diagramm



## Mollier $h,x$ -Diagramm der feuchten Luft (schematisch)

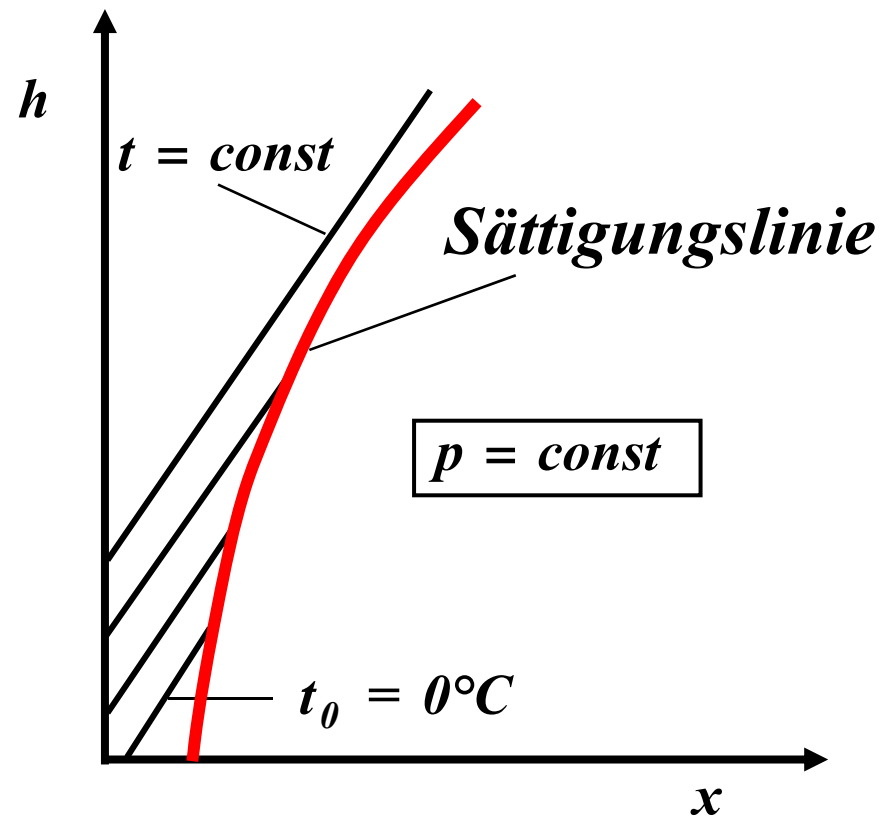
Jetzt folgt die Erklärung des sehr wichtigen

$h$ - $x$ -Diagramms für feuchte Luft

Man kann damit viele Prozesse verstehen und quantitative Ergebnisse gewinnen, ohne zu rechnen.



## Mollier $h,x$ -Diagramm der feuchten Luft (schematisch)



Im rechtwinkligen  $h,x$ -Diagramm verlaufen die Isothermen sehr steil.

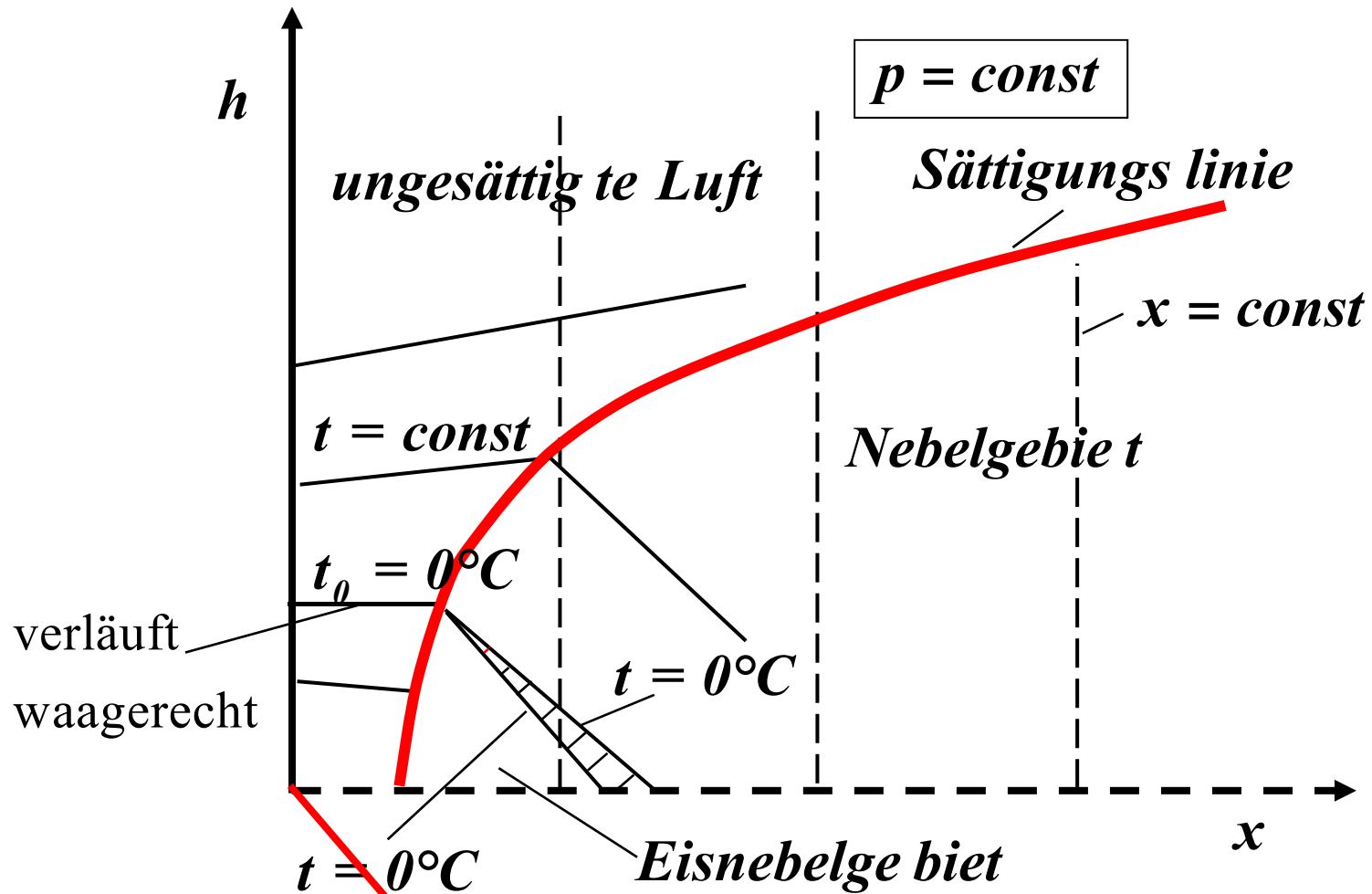


## Mollier $h,x$ -Diagramm der feuchten Luft (schematisch)

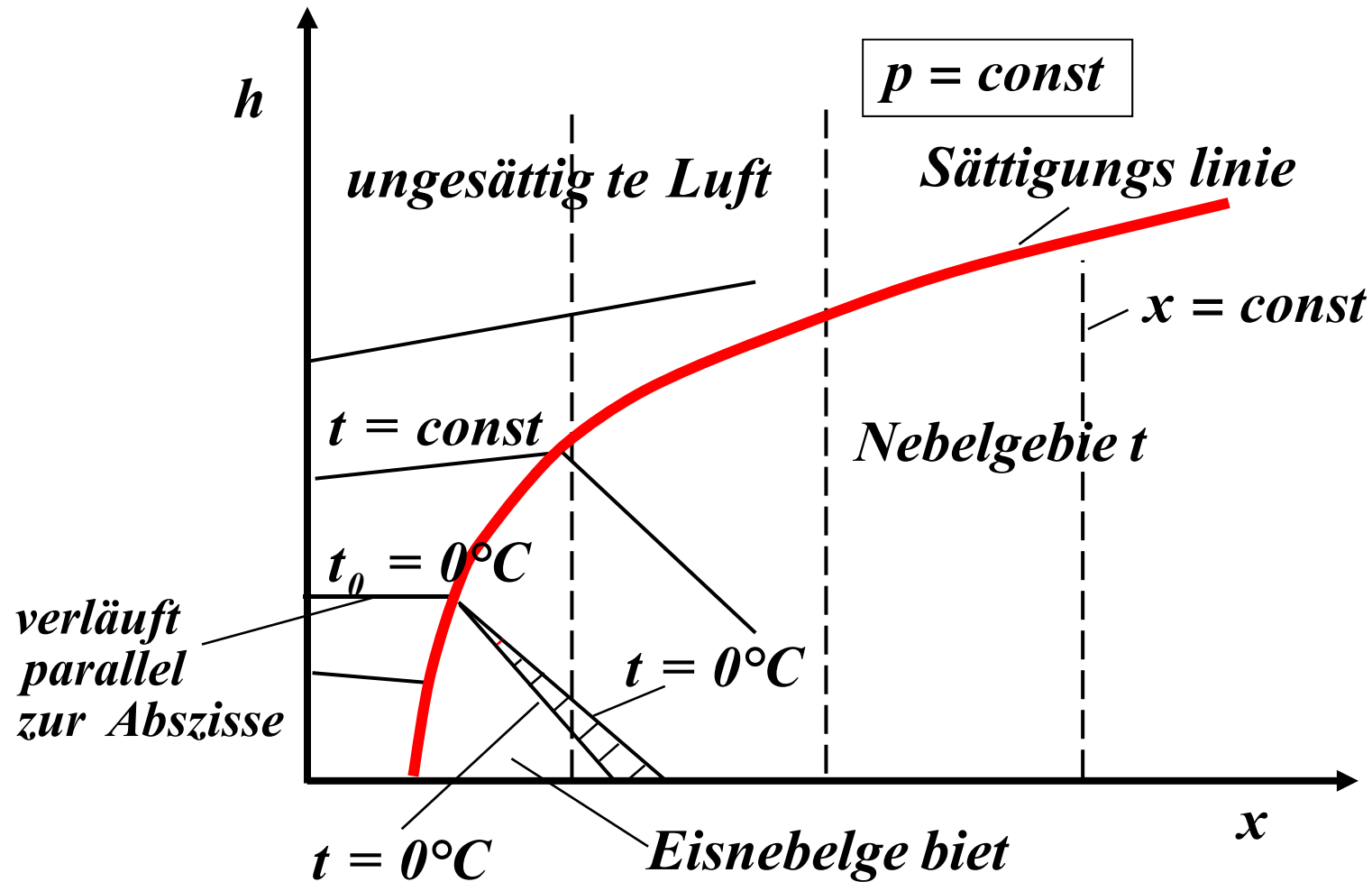
Zur besseren Übersichtlichkeit werden schiefwinklige Diagramme verwendet, deren Enthalpielinien gegen die Abszisse geneigt sind und zwar so, dass die  $0^{\circ}\text{C}$ -Isotherme horizontal verläuft



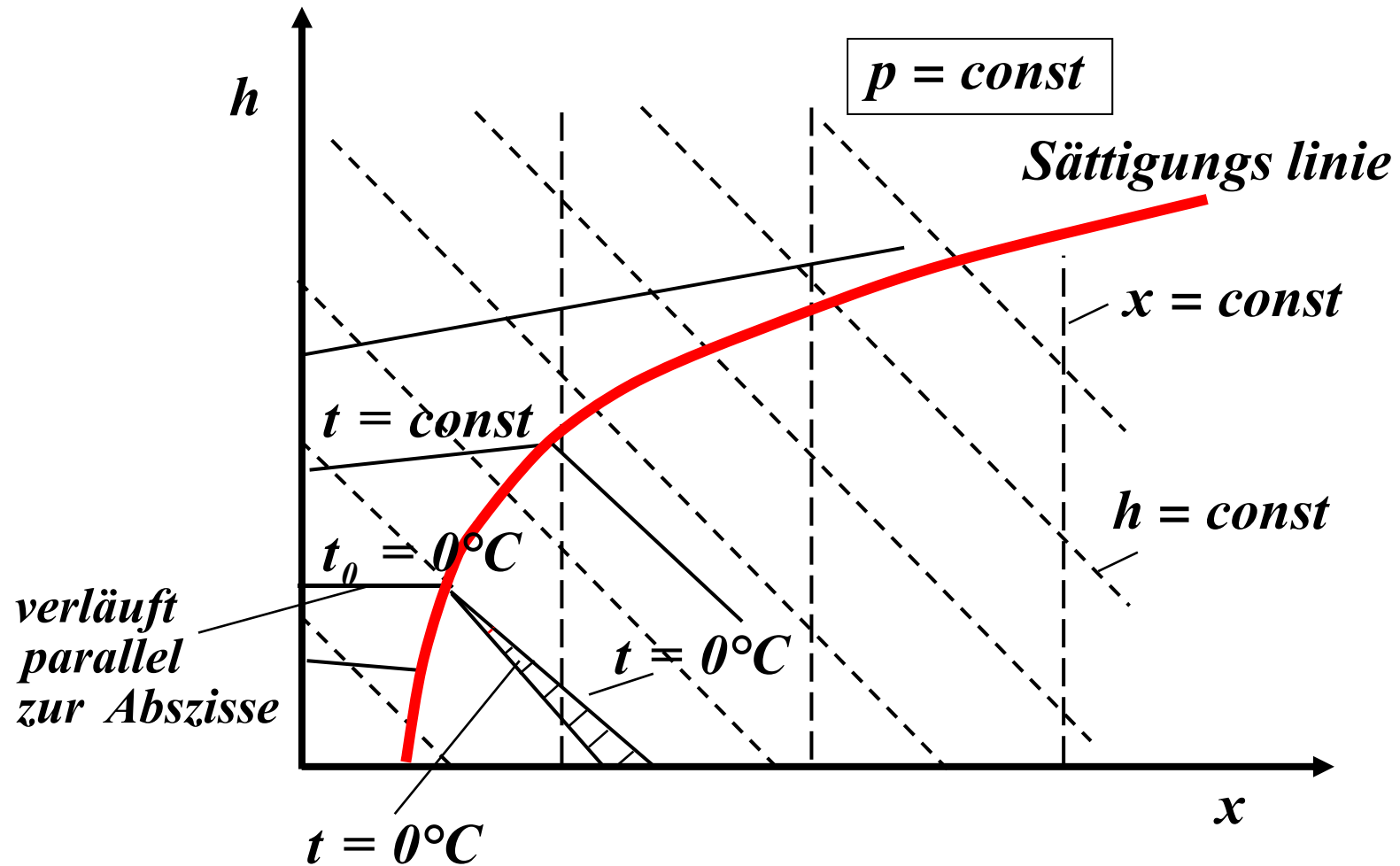
# Mollier $h,x$ -Diagramm der feuchten Luft (schematisch)



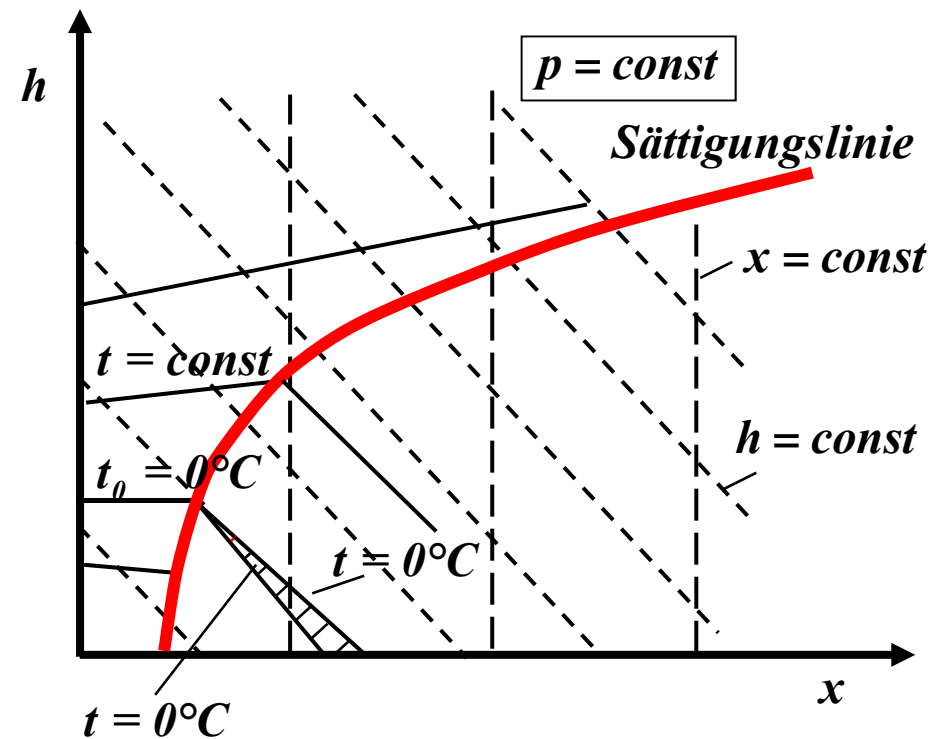
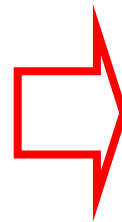
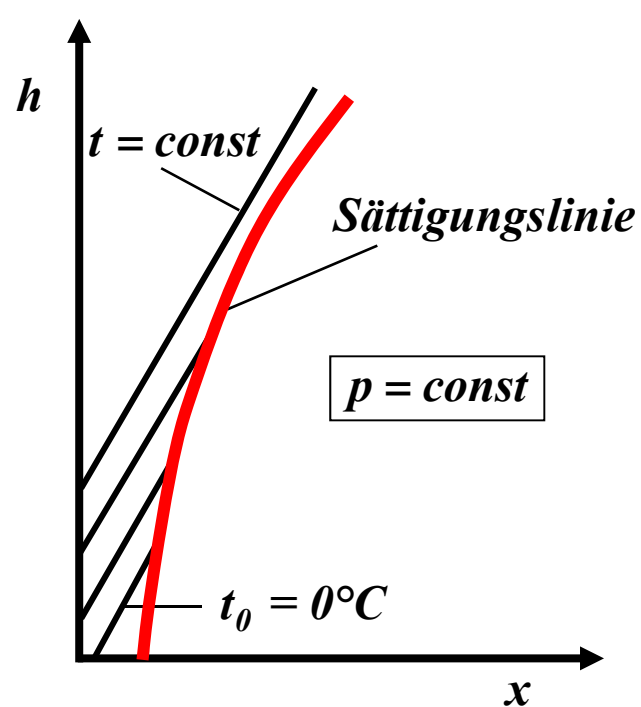
# Mollier $h,x$ -Diagramm der feuchten Luft (schematisch)



# Mollier $h,x$ -Diagramm der feuchten Luft (schematisch)



## Mollier h,x-Diagramm der feuchten Luft (schematisch) (Knoche)

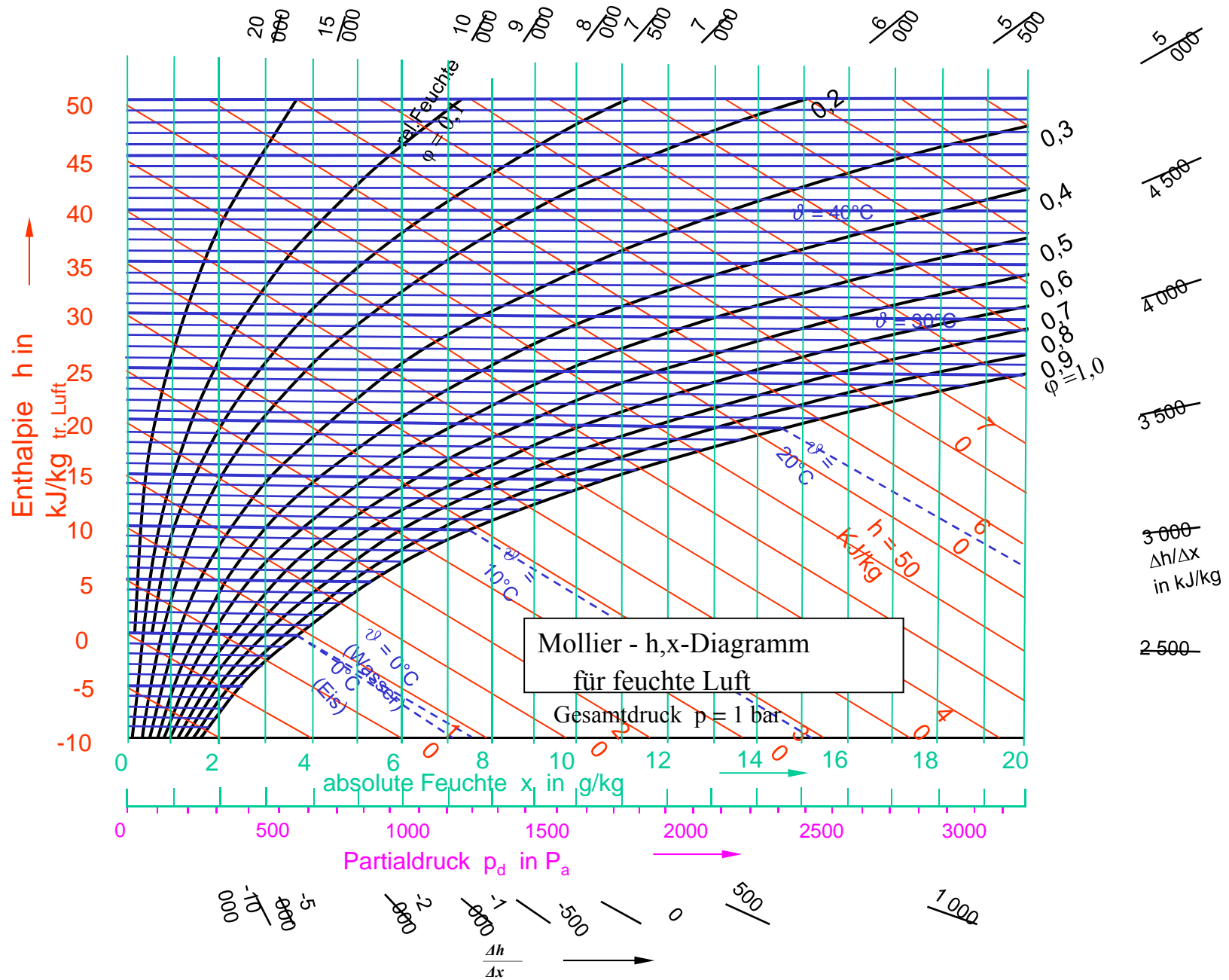


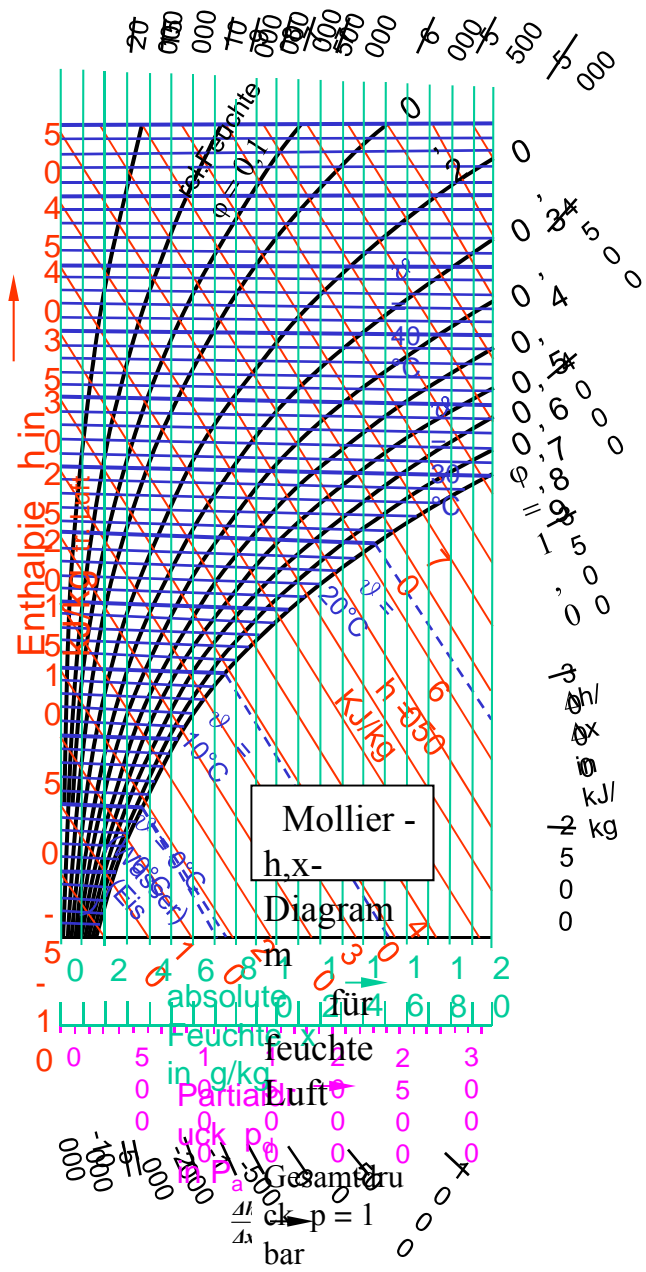
Im rechtwinkligen  $h,x$ -Diagramm verlaufen die Isothermen sehr steil. Zur besseren Übersichtlichkeit werden schiefwinklige Diagramme verwendet, deren Enthalpielinien gegen die Abszisse geneigt sind und zwar so, dass die  $0^\circ\text{C}$ -Isotherme horizontal verläuft

## Mollier h,x-Diagramm der feuchten Luft (schematisch) (Knoche)

Jetzt der Versuch, das ausgegebene h-x-Dia, welches viel Information enthält, in PowerPoint darzustellen.



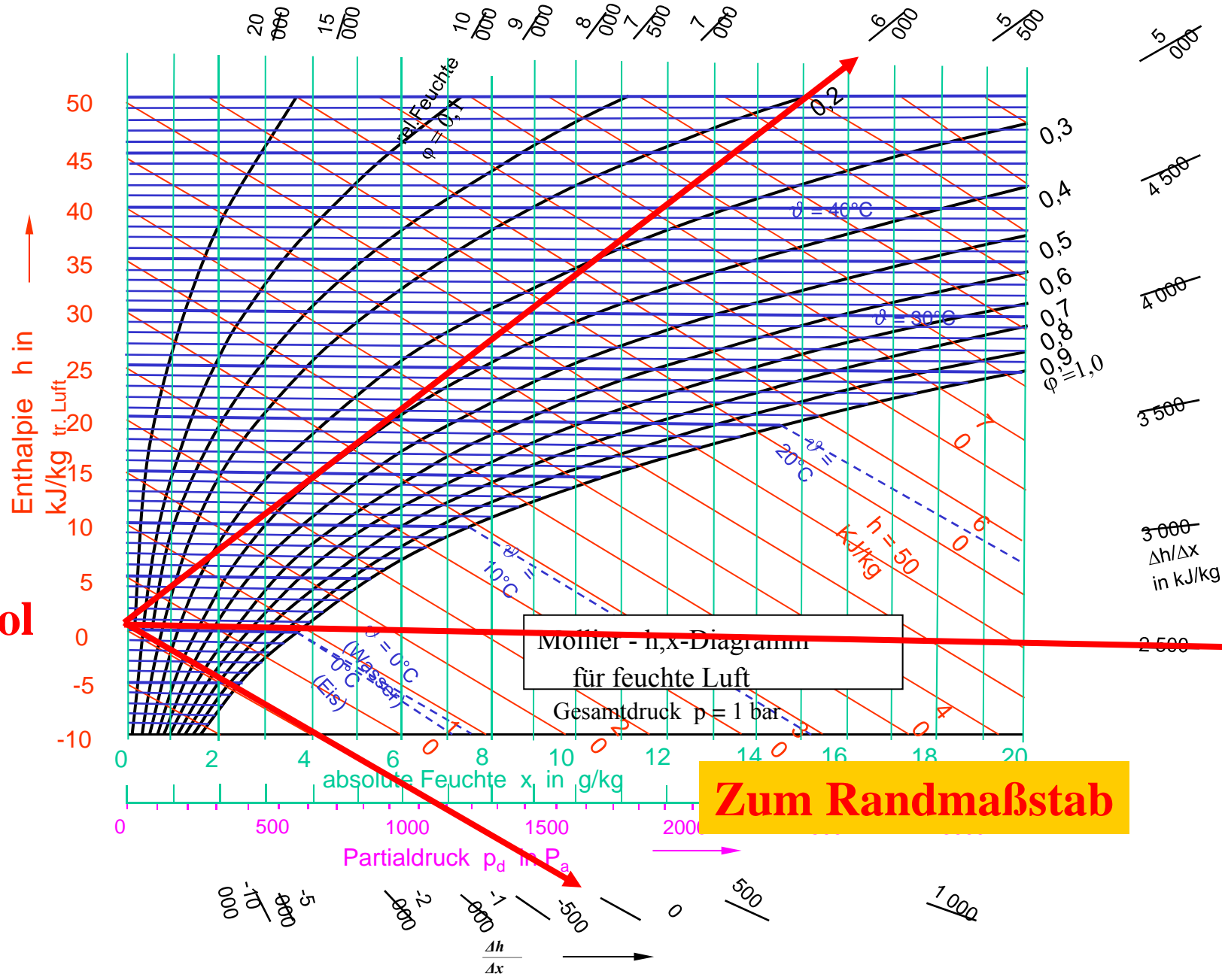




# Mollier h,x-Diagramm der feuchten Luft, Randmaßstab



**Pol**



## Mollier h,x-Diagramm der feuchten Luft (schematisch)

- 1) Randmaßstab dient der bequemen Ableitung der Isothermenneigung
- 2) Isothermen im Nebelgebiet sind nicht parallel zu Isenthalpen, sondern positive Steigung  $\mathcal{I} > 0$   
oder negative Steigung  $\mathcal{I} < 0$



# Mollier h,x-Diagramm der feuchten Luft, andere Drücke



## Mollier h,x-Diagramm der feuchten Luft

Im Gebiet ungesättigter Luft sind die Isothermen unabhängig vom Druck, siehe Gleichung vorne. Dies liegt an der Annahme idealen Gases, für Wasserdampf und Luft.

Im Nebelgebiet gehen wir auch von inkompressibler Flüssigkeit bzw. Festkörpern aus.

Aber  $\varphi$ -Linien sind vom Druck abhängig, insbesondere  $\varphi = 100\%$ .



## Mollier h,x-Diagramm der feuchten Luft

Für konstantes  $\mathcal{G}$  und  $x_d$  gilt, siehe vorne

$$\frac{p}{\varphi} = \text{konst.} = \frac{p_0}{\varphi_0} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{p_0}{p} \varphi$$

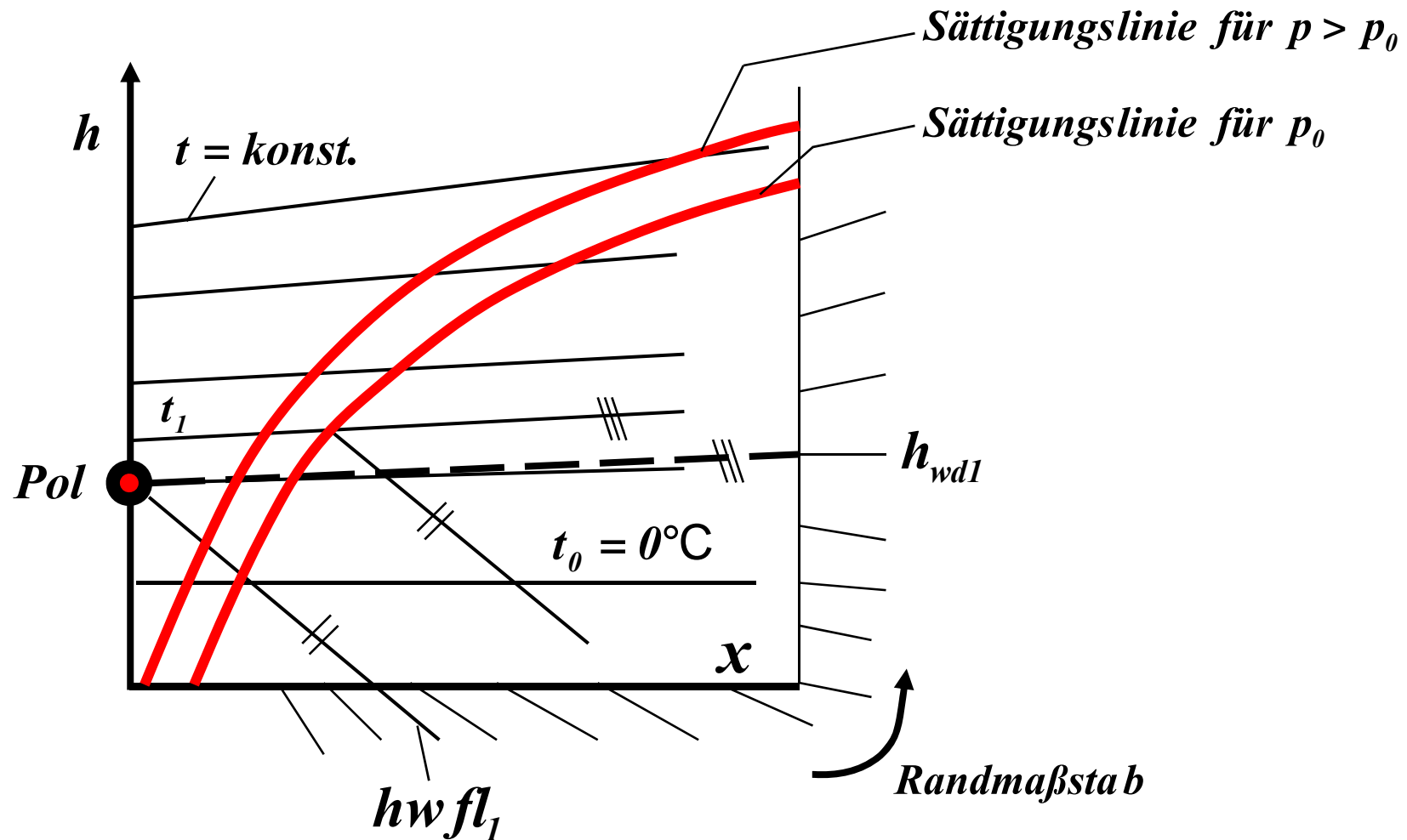
Beispiel: Gesamtdruck  $p = 1,25 p_0$ , Sättigungslinie für  $p$ ?

$$\varphi_0 = \frac{p_0}{1,25 p_0} \cdot 100\% = 80\%$$

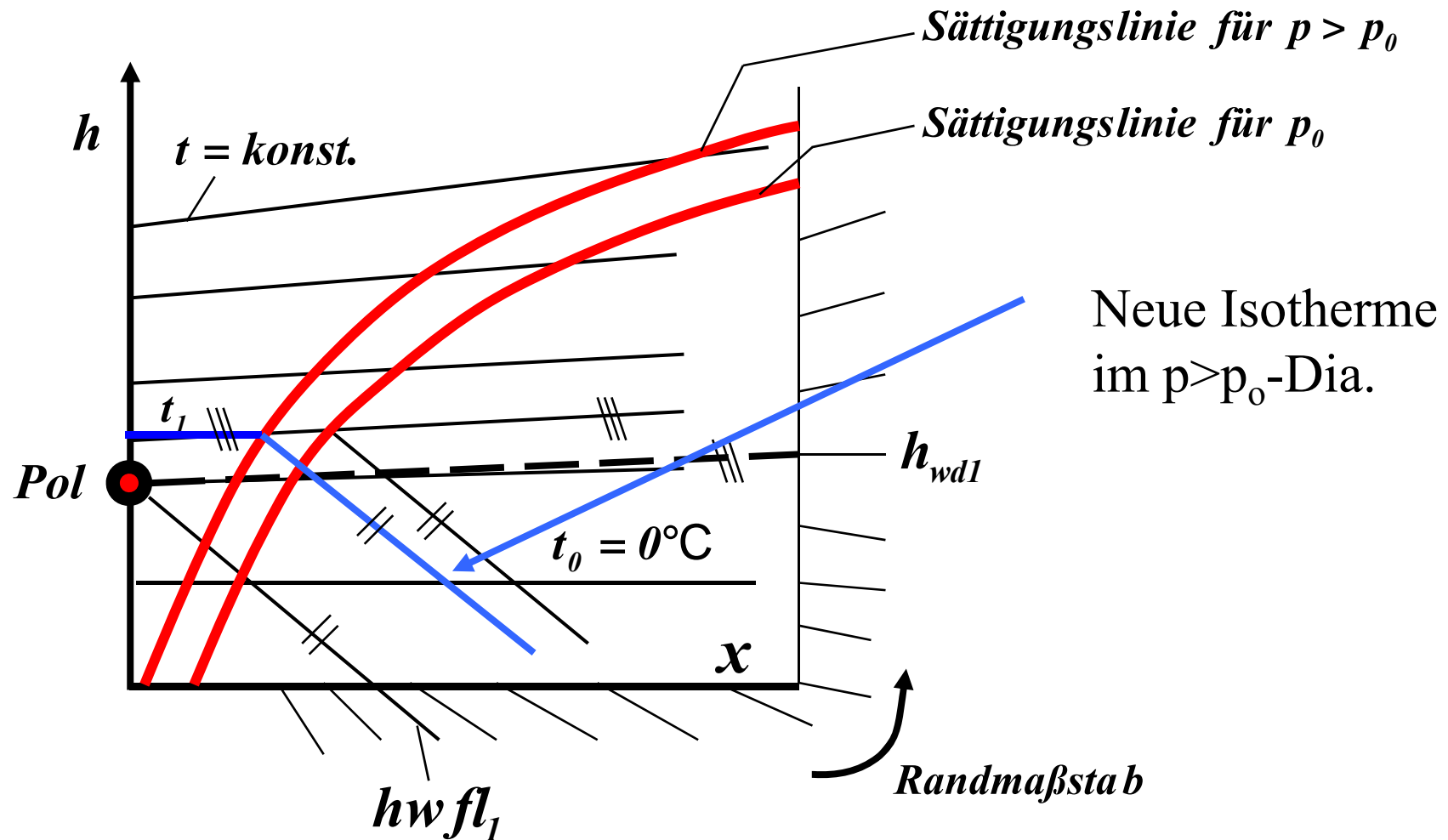
Also, die 80%-Linie im alten Diagramm (1bar) entspricht der 100%-Linie im neuen Diagramm (1.25bar).



## h-x-Diagramm für verschiedene Drücke



## h-x-Diagramm für verschiedene Drücke



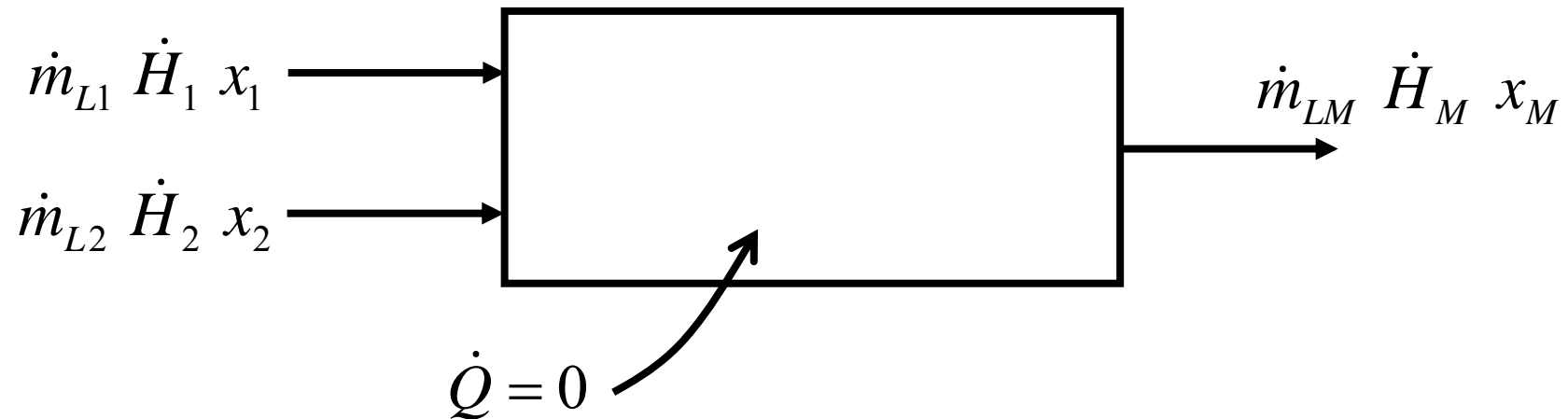
## 3 Fälle von Prozessen, auch im h-x-Dia

Alle in Form von stationären Fließprozessen gezeigt



### 3 Fälle von stationären Fließprozessen

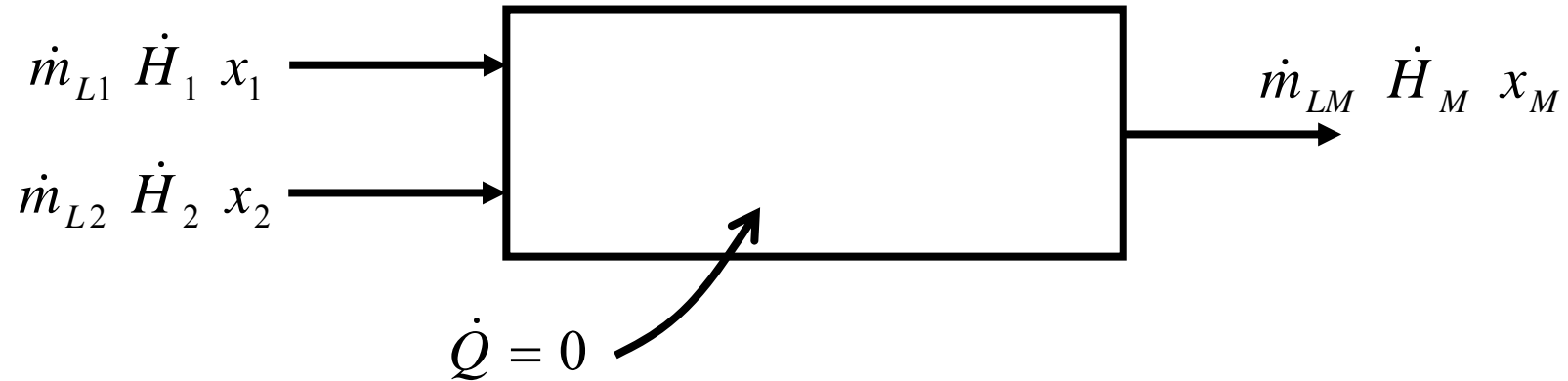
#### 1. Stationäre und adiabate Mischungsvorgänge mit feuchter Luft



Wenn Zustandspunkt 1 und 2 bekannt sind, wo liegt dann M?



## Stationäre und adiabate Mischungsvorgänge mit feuchter Luft



Massenerhaltung der Luft:  $\dot{m}_{LM} = \dot{m}_{L1} + \dot{m}_{L2}$

Massenerhaltung Wasser:

$$x_M \dot{m}_{LM} = x_M (\dot{m}_{L1} + \dot{m}_{L2}) = x_1 \dot{m}_{L1} + x_2 \dot{m}_{L2}$$



## Stationäre und adiabate Mischungsvorgänge mit feuchter Luft

1.HS ohne  $\dot{Q}$ ,  $\dot{W}_t$ ,  $\Delta\dot{E}_a$

$$0 = \dot{H}_M - \dot{H}_1 - \dot{H}_2 = (\dot{m}_{L1} + \dot{m}_{L2})h_M - \dot{m}_{L1}h_1 - \dot{m}_{L2}h_2$$

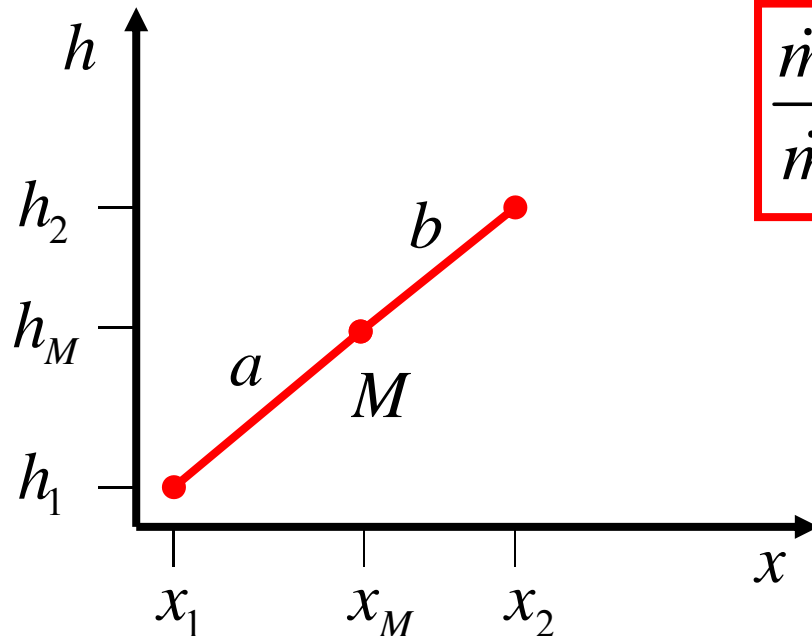
Aus beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{\dot{m}_{L2}}{\dot{m}_{L1}} = \frac{x_M - x_1}{x_2 - x_M} = \frac{h_M - h_1}{h_2 - h_M} \stackrel{\wedge}{=} \frac{a}{b}$$



## Stationäre und adiabate Mischungsvorgänge mit feuchter Luft

$$\frac{\dot{m}_{L2}}{\dot{m}_{L1}} = \frac{x_M - x_1}{x_2 - x_M} = \frac{h_M - h_1}{h_2 - h_M} \stackrel{\wedge}{=} \frac{a}{b}$$



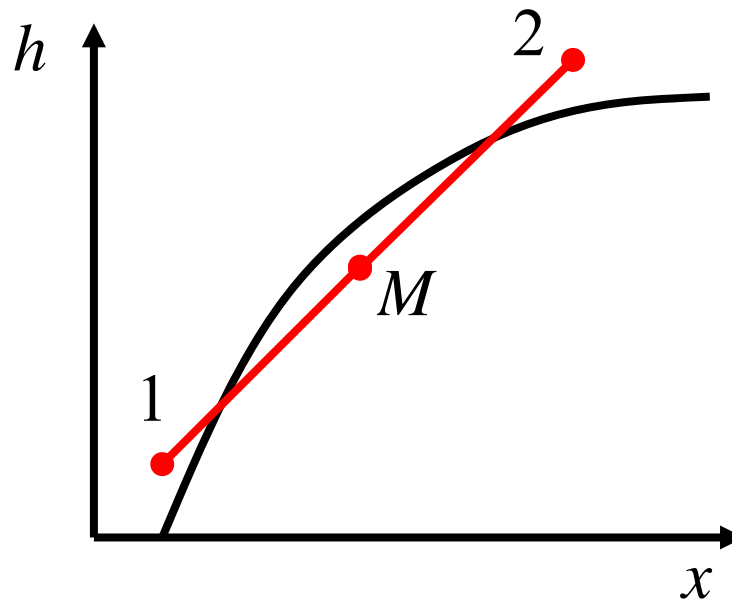
$$\frac{\dot{m}_{L2}}{\dot{m}_{L1}} = \frac{x_M - x_1}{x_2 - x_M} = \frac{h_M - h_1}{h_2 - h_M} \stackrel{\wedge}{=} \frac{a}{b}$$

Gesetz der abgewandten  
Hebelarme



# Stationäre und adiabate Mischungsvorgänge mit feuchter Luft

## Beispiel

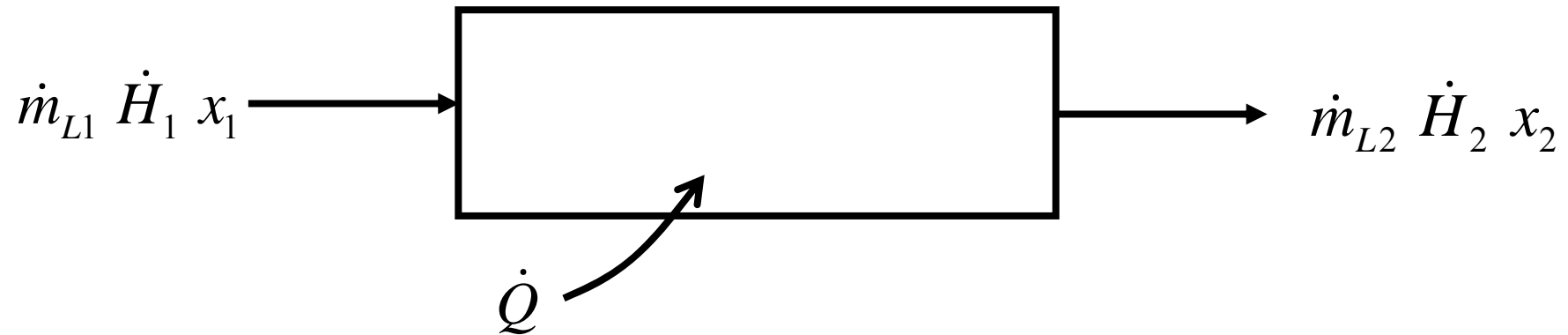


Adiabate Mischung:  
Der Mischungspunkt zweier  
ungesättigter Luftströme kann  
im Nebelgebiet liegen

z.B. die Atemwolke im Winter



## 2. Stationäre Wärmezufuhr/ abfuhr



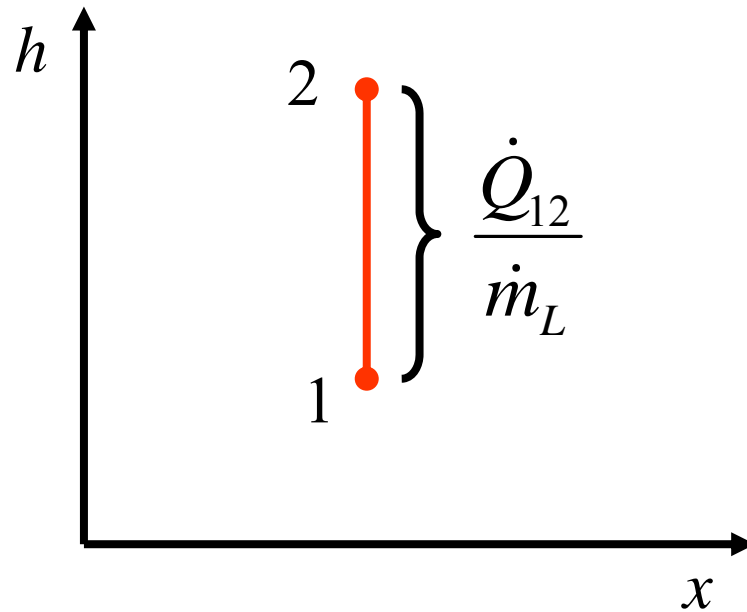
$$\dot{m}_{L2} = \dot{m}_{L1} = \dot{m}_L \quad x_2 = x_1 = x$$

1.HS:  $\dot{Q}_{12} + \cancel{\dot{W}_{t12}} = \dot{H}_2 - \dot{H}_1 \quad /: \dot{m}_L$

$$\frac{\dot{Q}_{12}}{\dot{m}_L} = h_2 - h_1$$



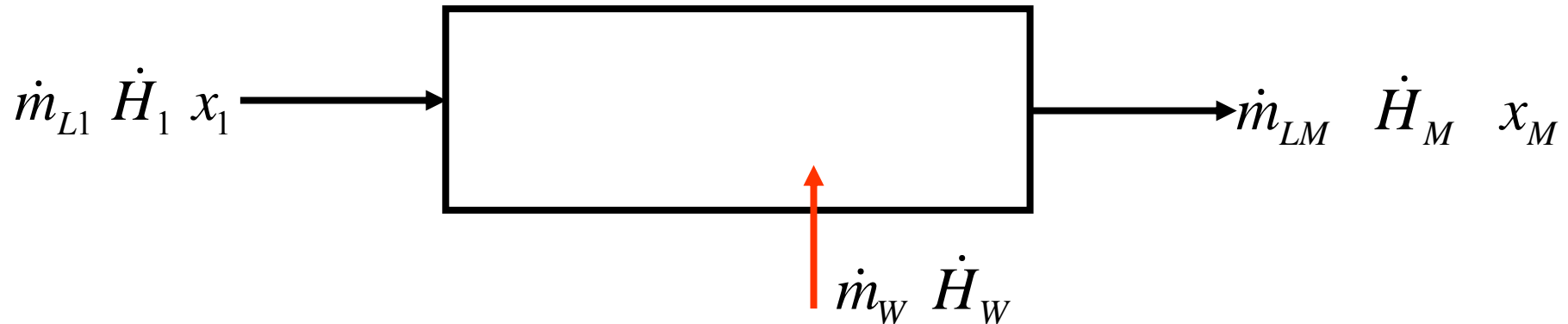
## Stationäre Wärmezufuhr/ abfuhr



$$\frac{\dot{Q}_{12}}{\dot{m}_L} = h_2 - h_1$$



### 3. Stationäre und adiabate Zumischung von reinem Wasser oder Wasserdampf oder Eis



$$\dot{m}_{LM} = \dot{m}_{L1} = \dot{m}_L$$

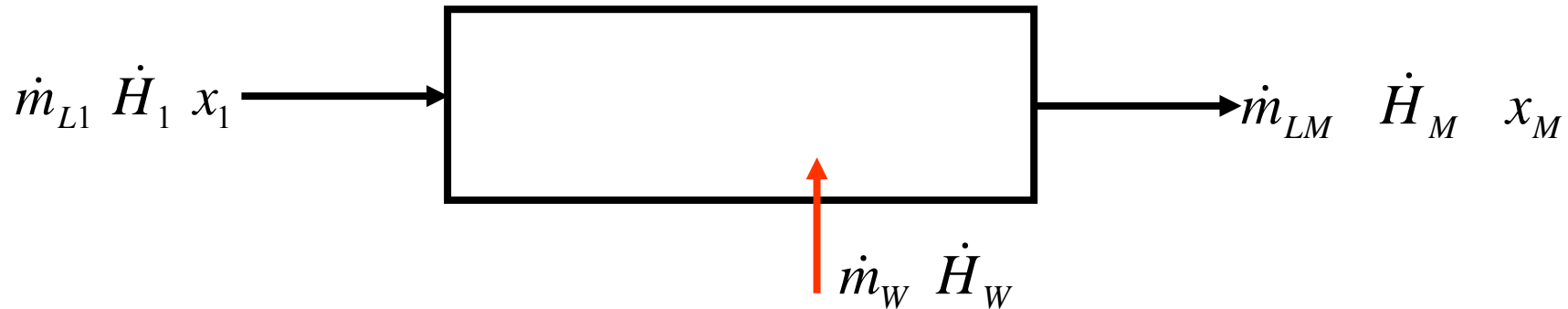
1.HS: 
$$0 = \dot{H}_M - \dot{H}_1 - \dot{H}_W = \dot{m}_L (h_M - h_1) - \dot{m}_W h_W$$

**Vorsicht:**  $h_W$  ist auf die Wassermenge  $m_w$  bezogen

$$x_1 \dot{m}_L + \dot{m}_W = x_M \dot{m}_L$$



## Stationäre und adiabate Zumischung von reinem Wasser oder Wasserdampf oder Eis



$$0 = \dot{H}_M - \dot{H}_1 - \dot{H}_W = \dot{m}_L (h_M - h_1) - \dot{m}_W h_W$$

$$x_1 \dot{m}_L + \dot{m}_W = x_M \dot{m}_L$$

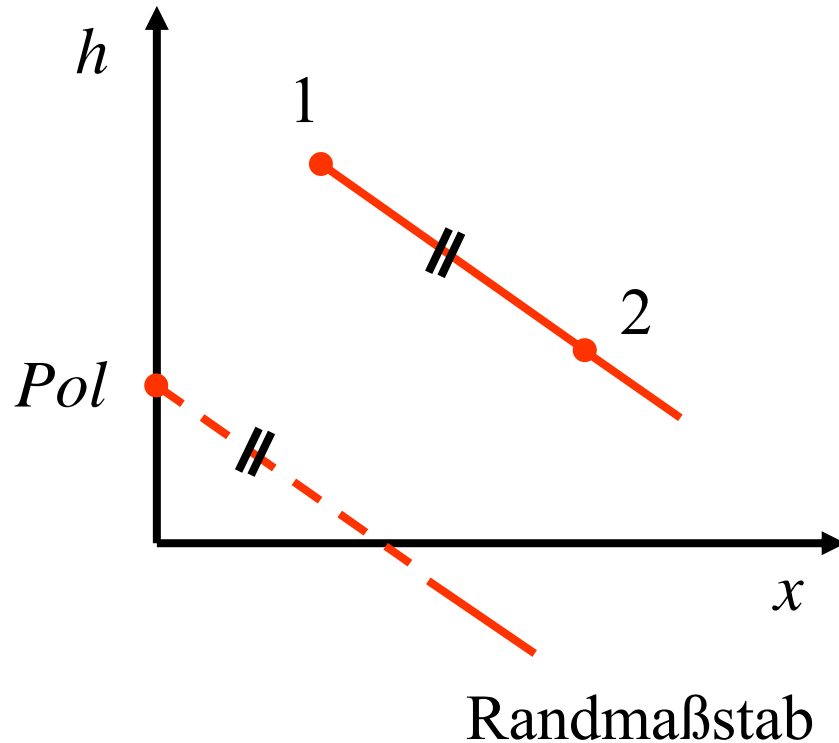
Einsetzen:

$$\Rightarrow \frac{h_M - h_1}{x_M - x_1} = h_W = \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)_{p, \vartheta_w}$$



# Stationäre und adiabate Zumischung von reinem Wasser oder Wasserdampf oder Eis

Entweder mit dem Randmaßstab



$$(x_2 - x_1) \dot{m}_L = \dot{m}_W$$

Randmaßstab:  $\frac{\Delta h}{\Delta x} \text{ in } \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$

Wasser



## Stationäre und adiabate Zumischung von reinem Wasser oder Wasserdampf oder Eis

*Besonderheit:* Falls man flüssiges Wasser oder Eis von  $-5^{\circ}\text{C}$  bis  $30^{\circ}\text{C}$  zumischt, kann man statt des Randmaßstabes auch die Isothermen im Nebelgebiet als Maßstab für die Steigung nehmen.

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_{p,t} = c_{W\,fl} \mathcal{G} \quad \text{oder} \quad c_{pwf} \cdot \mathcal{G}$$

Siehe nächste Folie:



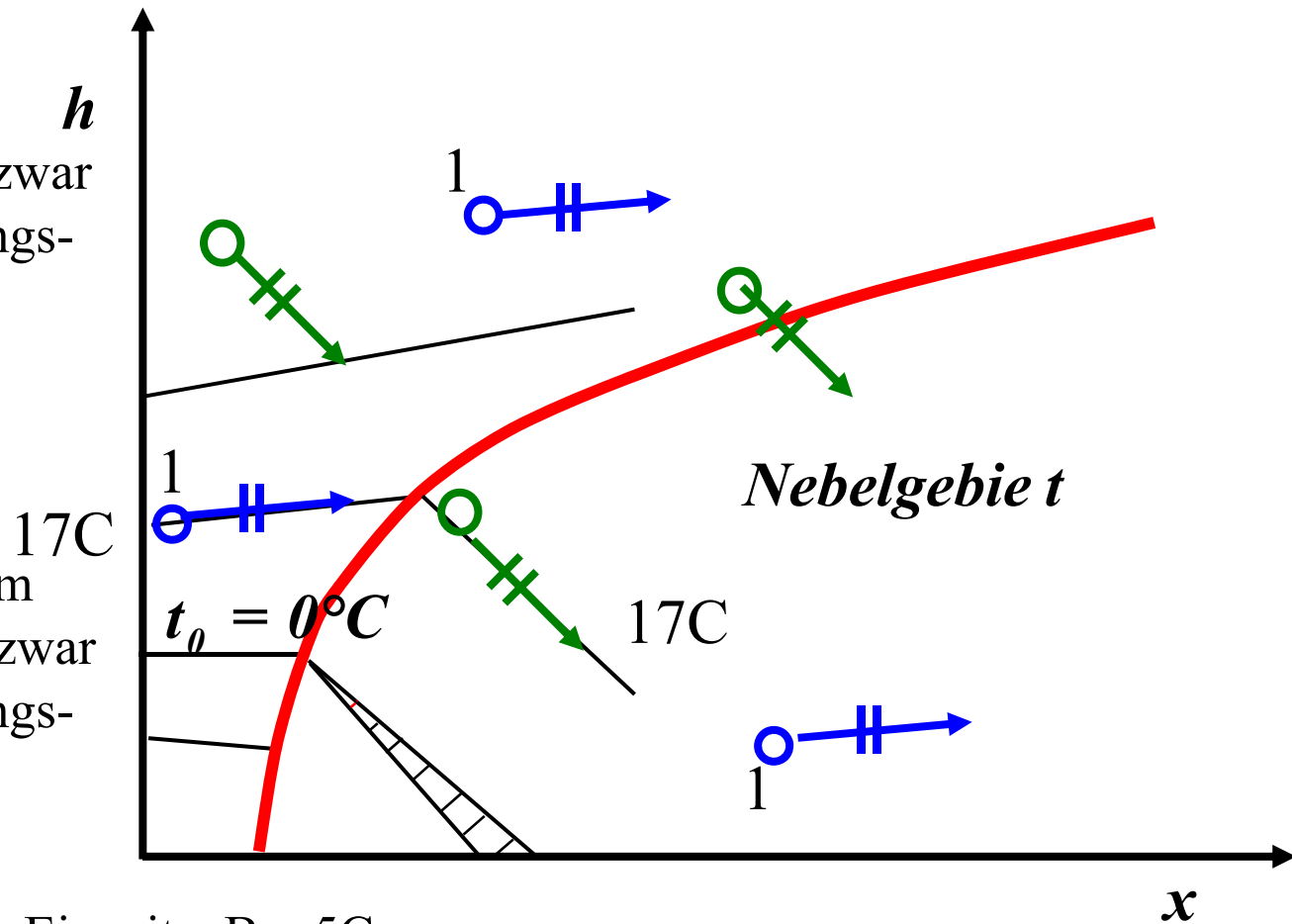
# Mollier h,x-Diagramm der feuchten Luft (schematisch)



Zuführen von Wasser-  
Dampf mit 17 C, und zwar  
bei beliebigem Ausgangs-  
zustand



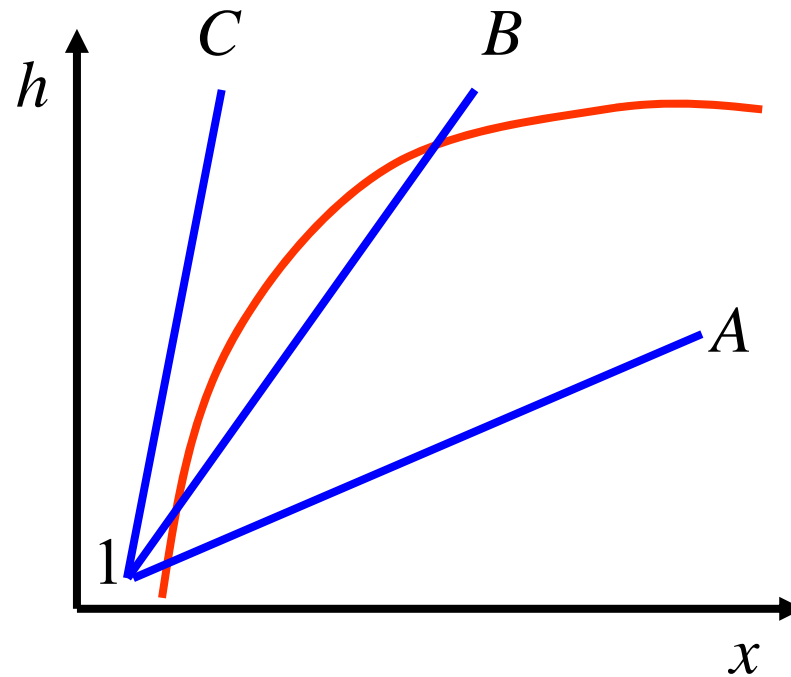
Zuführen von flüssigem  
Wasser mit 17 C, und zwar  
bei beliebigem Ausgangs-  
Zustand



Analog: Zuführen von Eis mit z.B. -5C



## Stationäre und adiabate Zumischung von reinem Wasser oder Wasserdampf oder Eis



Zumischen von Wasserdampf kann zu den Wegen A,B oder C führen



$$p_{d \max} = p_s(\mathcal{G}, p) \approx p_s(\mathcal{G})$$

$$\dot{m}$$

$$\eta = .9$$



$$-p_2 v_2 \Delta m < 0$$

$$W_{12}$$



$$\Delta m$$

$$\dot{Q}_{12}$$



# Phasengleichgewichtskurven im p,T-Diagramm

