

Formelsammlung zur Technischen Thermodynamik

Prof. Dr.-Ing. habil. E. Hassel
Lehrstuhl für Technische Thermodynamik
Universität Rostock

Inhaltsverzeichnis

1	Grundbegriffe	3
2	Erster Hauptsatz	3
3	Zweiter Hauptsatz	4
4	Exergiebilanz	4
5	Inkompressible feste und flüssige Stoffe	5
6	Ideale Gase	5
7	Naßdampf	8
8	Kreisprozesse	8
9	Gemische	9
10	Gemische idealer Gase	9
11	Feuchte Luft	10
12	Chemische Reaktionen	10
13	Wärmeübertragung	11
14	Wärmeübertrager	12

Oktober 2002

Umrechnungsbeziehungen des Internationalen Einheitensystems

Krafteinheiten: $1\text{ N} = 1\text{ kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2 = 0,101972\text{ kp}$; $1\text{ kp} = 9,80665\text{ N}$

Temperatureinheiten: $J = T - 273,15\text{ K}$ $\{J\} = ^\circ\text{C}$ $\{T\} = \text{K}$

<u>Druckeinheiten</u>	Pa	bar	kp/cm ²	atm	Torr
1 Pa = 1N/m ² = 1 kg/(m · s ²) =	1	10 ⁻⁵	1,0197 · 10 ⁻⁵	0,9869 · 10 ⁻⁵	7,5006 · 10 ⁻³
1 bar =	10 ⁵	1	1,019716	0,986923	750,062
1 kp/cm ² =	0,980665 · 10 ⁵	0,980665	1	0,967841	735,559
1 atm =	1,01325 · 10 ⁵	1,01325	1,033227	1	760
1 Torr =	133,3224	1,332 · 10 ⁻³	1,3595 · 10 ⁻³	1,3158 · 10 ⁻³	1

<u>Energieeinheiten</u>	J	kpm	kcal	kWh
1 J = 1 Nm = 1 Ws = 1 kgm ² /s ² =	1	0,1019716	2,38846 · 10 ⁻⁴	2,77778 · 10 ⁻⁷
1 kpm =	9,80665	1	2,34228 · 10 ⁻³	2,72407 · 10 ⁻⁶
1 kcal =	4186,8	426,935	1	1,163 · 10 ⁻³
1 kWh =	3,6 · 10 ⁶	0,368 · 10 ⁶	859,845	1

<u>Leistungseinheiten</u>	W	kpm/s	PS	kcal/h
1 W = 1 J/s = 1 Nm/s = 1 kgm ² /s ³ =	1	0,1019716	1,3596 · 10 ⁻³	0,859845
1 kpm/s	9,80665	1	0,013333	8,4324
1 PS =	735,49875	75	1	632,42
1 kcal/h =	1,163	0,118594	1,5812 · 10 ⁻³	1

1 Grundbegriffe

Energetische Zustandsgrößen

Spezifische innere Energie u

Spezifische Enthalpie $h = u + p v$

Spezifische Entropie $s = s_0 + \int_0 \frac{du + p dv}{T}$

Spezifische Wärmekapazitäten $c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p$ $c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v$

Energetische Zustandsgleichungen homogener Systeme

$$u - u_0 = f(T, v) \quad du = c_v dT + \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T dv$$

$$h - h_0 = g(T, p) \quad dh = c_p dT + \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T dp$$

2 Erster Hauptsatz

Definitionen:

Äußere Energie: $E_a = E_{kin} + E_{pot}$ homogenes System: $E_a = m e_a$

Kinetische Energie: $E_{kin} = \int_m \frac{c^2}{2} dm$ homogenes System: $E_{kin} = m \frac{c^2}{2}$

Potentielle Energie: $E_{pot} = g \int_m z dm$ homogenes System: $\Delta E_{pot} = mg \Delta z$

2.1 Geschlossene Systeme

$$W_{12} = W_{R12} + W_{V12} \quad W_{V12} = - \int_1^2 p dV$$

$$W_{12} + Q_{12} = \Delta U + \Delta E_a \quad W_{R12} + \int_1^2 V dp + Q_{12} = \Delta H + \Delta E_a$$

2.2 Offene Systeme

$$\dot{W}_t + \dot{Q} + \sum_i (h_{t_i} + g z_i) \dot{m}_i = \frac{dU}{dt} + \frac{dE_a}{dt} \quad \text{mit} \quad h_t = h + \frac{c^2}{2}$$

2.3 Stationäre Fließprozesse

$$\dot{W}_t + \dot{Q} + \dot{m} \left[h_a - h_b + \frac{c_a^2}{2} - \frac{c_b^2}{2} + g(z_a - z_b) \right] = 0$$

2.4 Mechanische Energiebilanz

$$w_{t12} - w_{R12} - \int_1^2 v dp = \frac{c_2^2}{2} - \frac{c_1^2}{2} + g(z_2 - z_1)$$

3 Zweiter Hauptsatz

$$S_{\text{irr}} \geq 0$$

3.1 Geschlossene Systeme

Definition der Entropie (Fundamentalrelation): $dS = \frac{dU + pdV}{T} = \frac{dH - Vdp}{T}$

Entropiebilanzen:

$$\frac{dQ}{T} + \frac{dW_R}{T} = dS \quad dS_Q = \frac{dQ}{T} \quad dS_{\text{irr}} = \frac{dW_R}{T} \quad 1)$$

3.2 Offene Systeme

$$\sum_j \frac{\dot{Q}_j}{T_j} + \dot{S}_{\text{irr}} + \sum_i s_i \dot{m}_i = \frac{dS}{dt} \quad 2)$$

3.3 Stationäre Fließprozesse

$$\sum_j \frac{\dot{Q}_j}{T_j} + \dot{S}_{\text{irr}} + \dot{m}(s_a - s_b) = 0$$

4 Exergiebilanz

Exergie einer Stoffmenge: $E_{1,U} = U_1 - U_U + E_{\text{kinl}} + E_{\text{potl}} + p_U(V_1 - V_U) - T_U(S_1 - S_U)$

Exergie eines Stoffstromes: $\dot{E}_{1,U} = \dot{m} \left[h_1 - h_U + \frac{c_1^2}{2} + gz_1 - T_U(s_1 - s_U) \right] = \dot{m} e_{1,U}$

Exergie eines Wärmestromes: $\dot{E}_Q = \int (1 - \frac{T_U}{T}) d\dot{Q}$

¹⁾ In der Literatur auch $S_{\text{irr}} = S_{\text{Prod}}$ und $S_Q = S_{\text{aust}}$ üblich.

²⁾ Für T bzw. T_j kann die äußere Temperatur T_a der Umgebung oder die Temperatur des Systems T_i benutzt werden, je nachdem ob S_{irr} infolge Wärmeübertragung an die Umgebung einbezogen wird ($T = T_a$) oder nicht.

Exergieverluststrom: $\dot{E}_V = T_U \dot{S}_{irr}$

Exergiebilanzen:

4.1 Geschlossene Systeme

$$E_{W12} + E_Q = E_{2,U} - E_{1,U} + E_V \quad E_{W12} = -\int_1^2 (p - p_u) dV + W_{R12}$$

4.2 Offene Systeme

$$\dot{W}_t + \dot{E}_Q + \sum_i e_{i,U} \dot{m}_i = \frac{dE_U}{dt} + \dot{E}_V$$

4.3 Stationäre Fließprozesse

$$\dot{W}_t + \dot{E}_Q + \dot{E}_{a,U} - \dot{E}_{b,U} = \dot{E}_V$$

5 Inkompressible feste und flüssige Stoffe

$$v \approx const. \quad c_p \approx c_v \approx c_F$$

$$u_2 - u_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_F dT \quad h_2 - h_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_F dT + v(p_2 - p_1)$$

$$s_2 - s_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{c_F}{T} dT$$

6 Ideale Gase

6.1 Thermische Zustandsgleichung

$$pV = mRT$$

$$pV = nR_m T \quad n = \frac{m}{M} \quad R = \frac{R_m}{M} \quad R_m = 8,3143 \text{ kJ / (kmolK)}$$

$$R = c_p - c_n \quad \mathbf{k} = \frac{c_p}{c_n}$$

6.2 Energetische Zustandsgleichungen

$$u = u(T) \quad h = h(T)$$

$$u_2 - u_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_v dT$$

$$h_2 - h_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_p dT = [c_p]_{T_1}^{T_2} (T_2 - T_1) \quad [c_p]_{T_1}^{T_2} = \frac{(T_2 - T_0)[c_p]_{T_0}^{T_2} - (T_1 - T_0)[c_p]_{T_0}^{T_1}}{T_2 - T_1}$$

$$s_2 - s_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{c_v}{T} dT + R \ln \frac{v_2}{v_1} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{c_p}{T} dT - R \ln \frac{p_2}{p_1}$$

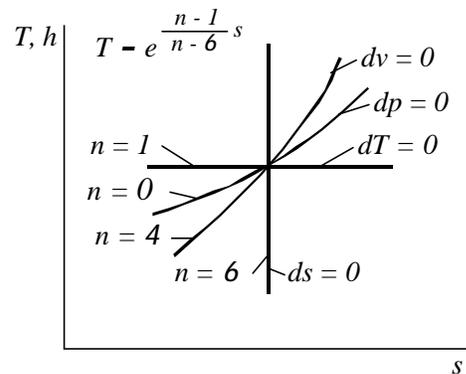
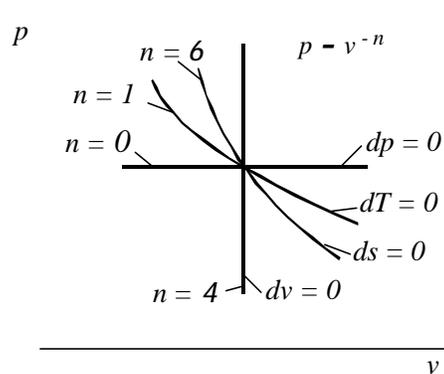
bei $c_p = \text{const.}$:

$$u_2 - u_1 = c_v (T_2 - T_1) \quad h_2 - h_1 = c_p (T_2 - T_1)$$

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{v_2}{v_1} = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}$$

6.3 Zustandsänderungen

Polytrope: $pv^n = \text{const}$



Polytrope Zustandsänderungen idealer Gase: $p v^n = \text{const.}$

Zustandsänderung	Polytrope	Isobare (p=const)	Isochore (v=const)	Isotherme (T=const)	Isentrope (s=const)
Polytropenexponent	n	$n = 0$	$n \rightarrow \infty$	$n = 1$	$n = \kappa$
$\frac{p}{p_1} =$	$\left(\frac{T}{T_1}\right)^{\frac{n}{n-1}} = \left(\frac{n}{n_1}\right)^{-n}$	1	$\frac{T}{T_1}$	$\frac{n_1}{n}$	$\left(\frac{T}{T_1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \left(\frac{n}{n_1}\right)^{-\kappa}$
$\frac{n}{n_1} =$	$\left(\frac{T}{T_1}\right)^{-\frac{1}{n-1}} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{-\frac{1}{n}}$	$\frac{T}{T_1}$	1	$\frac{p_1}{p}$	$\left(\frac{T}{T_1}\right)^{-\frac{1}{\kappa-1}} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{1}{\kappa}}$
$\frac{T}{T_1} =$	$\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \left(\frac{n}{n_1}\right)^{-(n-1)}$	$\frac{n}{n_1}$	$\frac{p}{p_1}$	1	$\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \left(\frac{n}{n_1}\right)^{-(\kappa-1)}$
$w_V = -\int_1^p p dn =$	$\frac{1}{n-1} RT_1 \left(\frac{T}{T_1} - 1\right)$	$-RT_1 \left(\frac{T}{T_1} - 1\right)$	0	$RT_1 \ln \frac{p}{p_1}$	$\frac{1}{\kappa-1} RT_1 \left(\frac{T}{T_1} - 1\right)$
$\int_1^p n dp =$	$n w_V$	0	$RT_1 \left(\frac{T}{T_1} - 1\right)$	w_V	κw_n
$[q + w_R]_{T_1}^T =$	$\frac{n-\kappa}{n-1} c_n T_1 \left(\frac{T}{T_1} - 1\right)$	$c_p T_1 \left(\frac{T}{T_1} - 1\right)$	$c_n T_1 \left(\frac{T}{T_1} - 1\right)$	$-w_V$	0
$s - s_1 = c_p \ln \frac{T}{T_1} - R \ln \frac{p}{p_1} =$	$\frac{n-\kappa}{n-1} c_n \ln \frac{T}{T_1}$	$c_p \ln \frac{T}{T_1}$	$c_n \ln \frac{T}{T_1}$	$-R \ln \frac{p}{p_1} =$	0

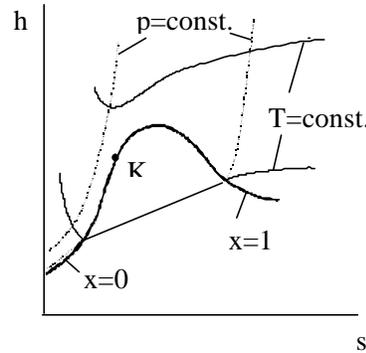
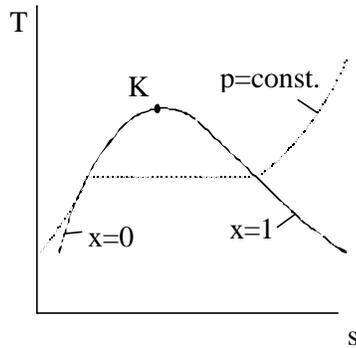
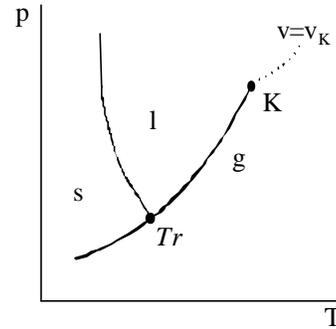
7 Naßdampf

$$x = \frac{m''}{m' + m''} = \frac{m_g}{m}$$

$$z = (1-x)z' + xz'' \quad \text{für } z = v, u, h, s$$

($'$) - Eigenschaften der siedenden Flüssigkeit

($''$) - Eigenschaften des trocken gesättigten Dampfes



Clapeyron-Clausius-Gleichung:

$$h'' - h' = T(s'' - s') = T(v'' - v') \frac{dp}{dT}$$

8 Kreisprozesse

Rechtsläufiger Kreisprozeß:

$$|\dot{W}_t| = |\dot{Q}_{zu}| - |\dot{Q}_{ab}|$$

$$\text{thermischer Wirkungsgrad: } h_{th} = \frac{|\dot{W}_t|}{|\dot{Q}_{zu}|}$$

$$\text{Carnotprozeß: } h_{th,C} = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max}}$$

Linksläufiger Kreisprozeß:

$$|\dot{W}_t| = |\dot{Q}_{ab}| - |\dot{Q}_{zu}|$$

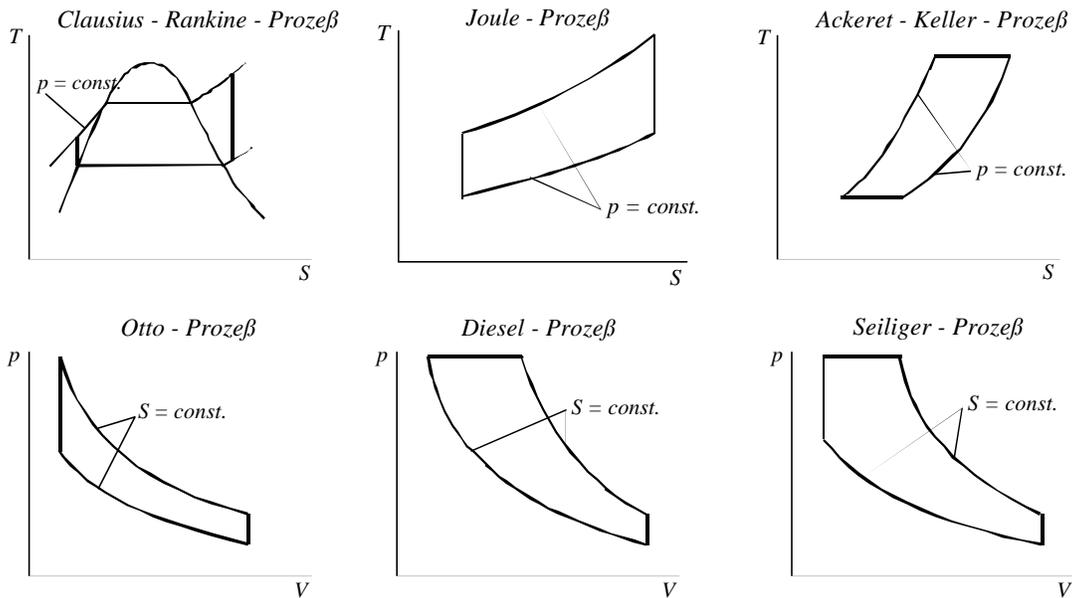
$$\text{Leistungsziffer der Wärmepumpe: } e_W = \frac{|\dot{Q}_{ab}|}{|\dot{W}_t|}$$

$$\text{Carnotprozeß: } e_{W,C} = \frac{T_{\max}}{T_{\max} - T_{\min}}$$

$$\text{Leistungsziffer des Kälteprozesses: } e_K = \frac{|\dot{Q}_{zu}|}{|\dot{W}_t|}$$

$$\text{Carnotprozeß: } e_{K,C} = \frac{T_{\min}}{T_{\max} - T_{\min}}$$

8.1 Technische Vergleichsprozesse



9 Gemische

$$\text{Masse} \quad m = \sum_i m_i \quad \text{Molmenge} \quad n = \sum_i n_i$$

$$\text{Massenanteil} \quad \mathbf{x}_i = \frac{m_i}{m} \quad \text{Molanteil} \quad \mathbf{y}_i = \frac{n_i}{n}$$

$$\text{Molare Masse} \quad M_i = \frac{m_i}{n_i} \quad \text{Molare Masse} \quad M = \frac{m}{n}$$

Molare Masse des Gemisches:

$$M = \frac{1}{\sum_i \frac{\mathbf{x}_i}{M_i}} = \sum_i (\mathbf{y}_i M_i) \quad \mathbf{x}_i = \mathbf{y}_i \frac{M_i}{M}$$

$$\mathbf{r}_i = \frac{m_i}{V} \quad \mathbf{r} = \frac{m}{V}$$

$$p_i = \mathbf{y}_i p \quad p = \sum_i p_i$$

10 Gemische idealer Gase

$$R = \sum_i \mathbf{x}_i R_i \quad c_p = \sum_i \mathbf{x}_i c_{p_i} \quad c_n = \sum_i \mathbf{x}_i c_{n_i}$$

$$pV_i = p_i V = m_i R_i T = n_i R_m T$$

für $Z = H, U$:

$$Z(T) = \sum_i Z_i(T) \quad z(T) = \sum_i \mathbf{x}_i z_i(T) \quad z_m(T) = \sum_i \mathbf{y}_i z_{m_i}(T)$$

$$S(T, p) = \sum_i S_i(T, p_i) \quad s(T, p) = \sum_i x_i s_i(T, p_i) \quad s_m(T, p) = \sum_i y_i s_{m_i}(T, p_i)$$

11 Feuchte Luft

W - Wasser (d, fl, f-Phase)

$$m = m_W + m_L$$

L - trockene Luft

$$m_W = m_{Wd} + m_{Wfl} + m_{Wf}$$

$$p = p_L + p_d$$

Wassergehalt:

$$x = \frac{m_W}{m_L} = x_d + x_{fl} + x_f$$

Relative Feuchte:

$$j = \frac{p_d(J)}{p_s(J)}$$

$$x_d = \frac{p_s(J)}{\left(\frac{p}{j} - p_s(J)\right)} \cdot \frac{M_d}{M_L}$$

Sättigungsgrad:

$$X = \frac{x_d}{x_s} = j \cdot \frac{p - p_s(J)}{p - p_d(J)}$$

$$V = m_L \frac{R_d T}{p} \left(\frac{M_d}{M_L} + x_d \right)$$

$$h = \frac{H}{m_L} = h_L + x_d h_{Wd} + x_{fl} h_{Wfl} + x_f h_{Wf}$$

Molare Massen:

trockene Luft: $M_L = 28,96 \text{ kg/kmol}$

Wasser: $M_W = 18 \text{ kg/kmol}$

³⁾

trockene Luft

$$h_L(J) = c_{pL} J$$

$$c_{pL} = 1,004 \text{ kJ / (kg K)}$$

überhitzter Wasserdampf

$$h_{Wd}(J) = c_{pWd} J + r_{d0}$$

$$c_{pWd} = 1,86 \text{ kJ / (kg K)}$$

flüssiger Niederschlag

$$h_{Wfl}(J) = c_{pWfl} J$$

$$c_{pWfl} = 4,19 \text{ kJ / (kg K)}$$

fester Niederschlag

$$h_{Wf}(J) = c_{pWf} J - r_{f0}$$

$$c_{pWf} = 2,05 \text{ kJ / (kg K)}$$

Verdampfungsenthalpie bei

$$J = 0 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$r_{d0} = 2500 \text{ kJ / kg}$$

Schmelzenthalpie bei

$$J = 0 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$r_{f0} = 333 \text{ kJ / kg}$$

12 Chemische Reaktionen

$$l = \frac{\dot{n}_{Ox}}{\dot{n}_{Ox,stoech}}$$

³⁾ In der Literatur $M_W/M_L = 0,622$ üblich.

13 Wärmeübertragung

Wärmestrom $\dot{Q} = \frac{dQ}{dt}$ Wärmestromdichte $\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{A}$

Arten der Wärmeübertragung

Wärmeleitung (eindimensional) $\dot{q}_x = -l \frac{dT}{dx}$

Wärmeübergang $\dot{q} = a (T_F - T_W)$

Kennzahlen bei der Anwendung der Ähnlichkeitstheorie zur Ermittlung des Wärmeübergangskoeffizienten a :

$$Nu = \frac{al}{l} \quad Re = \frac{cl}{n} \quad Gr = \frac{gl^3 \Delta p}{n^2 r}$$

$$St = \frac{a}{rc_p c} \quad Pr = \frac{n}{a} \quad a = \frac{l}{rc_p}$$

erzwungene Konvektion: $Nu = Nu(Re, Pr)$

$$St = St(Re, Pr)$$

freie Konvektion:

$$Nu = Nu(Gr, Pr)$$

Wärmestrahlung

Emissionsdichte $\frac{\dot{E}}{A} = \epsilon \mathbf{s}_s T^4$

Φ_s - Strahlungskoeffizient des schwarzen Körpers $\Phi_s = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K}^4)$

$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{A_1} = C_{12} (T_1^4 - T_2^4)$ C_{12} - Strahlungsaustauschkoeffizient

eingeschlossener Körper: $C_{12} = \frac{\mathbf{s}_s}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{1}{\epsilon_2} - 1 \right)}$

beliebig zueinander liegende Flächen bei Vernachlässigung der Reflexion: $C_{12} = \mathbf{y}_{12} \epsilon_1 \epsilon_2 \mathbf{s}_s$

13.1 Stationäre Wärmeübertragung

$\dot{Q} = \frac{-\Delta J}{R}$ Reihenschaltung: $R = \sum R_i$

Parallelschaltung: $\frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_i}$

Übertragungswiderstände

Leitung: $R_L = \frac{d}{l A_m}$ für $A = \text{const.}$ (ebene Wand): $A_m = A$

für $A = 2 B r l$ (Rohr): $A_m = \frac{A_b - A_a}{\ln \frac{A_b}{A_a}}$

für $A = B r^2$ (Kugel): $A_m = \sqrt{A_b \cdot A_a}$

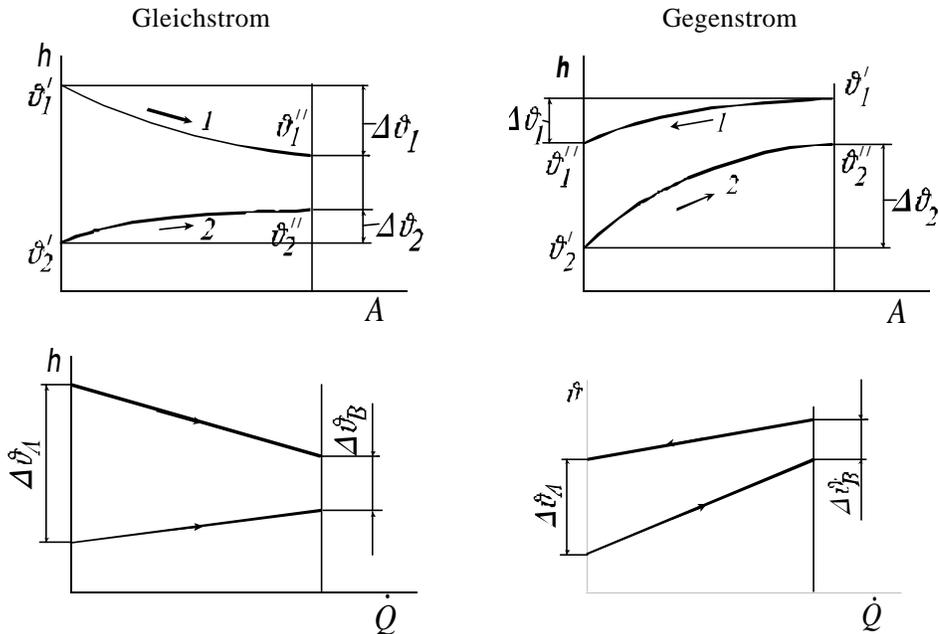
Übergang: $R_{ij} = \frac{1}{a A}$

Wärmedurchgang:
$$R = \frac{1}{(\mathbf{a}A)_i} + \sum \frac{d}{l A_m} + \frac{1}{(\mathbf{a}A)_a} = \frac{1}{kA}$$

k - Wärmedurchgangskoeffizient (bezüglich Fläche A)

14 Wärmeübertrager

In diesem Abschnitt bedeuten dh , dQ bzw. h , \dot{Q} Beträge dieser Größen!



$$\dot{Q} = \dot{C}_1 \Delta J_1 \quad \text{Wärmekapazitätsstrom:} \quad \dot{C} = \dot{m} c_p$$

$$\dot{Q} = \dot{C}_2 \Delta J_2$$

$$\dot{Q} = k A \Delta J_m$$

Mittlere logarithmische Temperaturdifferenz

$$\text{für Gleich- und Gegenstrom:} \quad \Delta J_m = \frac{\Delta J_A - \Delta J_B}{\ln \frac{\Delta J_A}{\Delta J_B}}$$

Diagramme zur Berechnung von Wärmeübertragern (siehe VDI-Wärmeatlas)

Einführung charakteristischer dimensionsloser Größen:

$$P_1 = \frac{\dot{Q}}{\dot{C}_1 |(J_1' - J_2')|} = \frac{|(J_1'' - J_1')|}{|(J_1' - J_2')|} \quad R_1 = \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2} \quad NTU_1 = \frac{kA}{\dot{C}_1}$$

$$P_2 = \frac{\dot{Q}}{\dot{C}_2 |(J_1' - J_2')|} = \frac{|(J_2'' - J_2')|}{|(J_1' - J_2')|} \quad R_2 = \frac{\dot{C}_2}{\dot{C}_1} \quad NTU_2 = \frac{kA}{\dot{C}_2}$$

$|(J_1' - J_2')|$ Betrag der Differenz der Eintrittstemperaturen, maximale Temperaturdifferenz

$$P_1 = P_1(NTU_1, R_1)$$

$$P_2 = P_2(NTU_2, R_2)$$