Mathematische Methoden für das Lehramt

(Lehramt an Gymnasien & Lehramt an Regionalen Schulen)

Priv.-Doz. Dr. Reinhard Mahnke
Institut für Physik

Lehrveranstaltung Nr. 12557
(Wintersemester 2016/17: 1 SWS V + 2 SWS Ü)

V: Freitag 13.00 bis 13.45 Uhr, HS I Physik, A.-Einstein-Str. 24
Ü-Ch: Mittwoch 7.15 bis 8.45 Uhr, HS III Physik, A.-Einstein-Str. 24
Übungsleiter: MSc. Martins Brics
Ü-Ph: Mittwoch 7.15 bis 8.45 Uhr, SR I Physik, A.-Einstein-Str. 24
Übungsleiter: MSc. Sebastian Rosmej
Tutorium (Nachhilfe) durch Christian Ewert(2): Do, 18.00 Uhr

Die Lehrveranstaltung begann mit der ersten (Einführungs-)Übung für alle am Mittwoch, d. 12.10.2016, 7.15 bis 8.45 Uhr, in den o. g. Hörsälen des Instituts für Physik.

Literaturhinweise:

1. Franz Embacher: Mathematische Grundlagen für LA-Studium Physik
2. Ch. B. Lang & N. Pucker: Mathematische Methoden in der Physik (Heidelberg, 1998, 2. Aufl. 2005)
3. Studienbücherei Physik für Lehrer, Bd. 1: Mathematische Hilfsmittel (Berlin, 1974)

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkungen

• Einsatz des Rechners (Computer ist nicht nur zum Spielen da)

Neben der (reinen, analytischen) Mathematik existieren elektronische Werkzeuge.

Beachte: Computeralgebra-Systeme (CAS) sind nicht unfehlbar, können aber hilfreich sein.

Programmpakete: Mathematika, Maple, Maxima, ...

Ein gratis erhältliches Open-Source-CAS: Maxima

Hinweis:
Um ein mögliches Missverständnis auszuräumen, sei zu Beginn betont, dass die im folgenden behandelte Mathematik – sowohl in ihrer Breite als auch in ihrer Tiefe – weit über das hinausgeht, was Sie in Ihrer künftigen Berufspraxis an Ihre Schülerinnen weitergeben können. Es geht darum, die Naturwissenschaften mit ihrer Mathematik so gut zu kennen, dass Sie Ihren Unterricht souverän und mit Verständnis planen und durchführen können.

Prüfungsterminplanung: Abschlussklausur am 16. Februar 2017 (Do),
9.30 – 11.00 Uhr (1.5 h), Großer Hörsaal Physik (HS I), A.-Einstein-Str. 24

1 Komplexe Zahlen

1.1 Einführung in die komplexen Zahlen

1. *Vorlesung am 14.10.2016* (R. Mahnke)

   Quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ (Variable x, Parameter p, q) zur Nullstellenberechnung, Schulformel

   $$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

   Nutze wegen $0 = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2$
   Satz von Vieta: $x_1 + x_2 = -p$; $x_1 x_2 = q$,

   Einschränkung im Raum der rellen Zahlen,

   Einführung und Definition der komplexen Zahlen $z = x + iy$ und ihre Darstellung in der Gaußschen Zahlenebene,

   Imaginäre Einheit i mit $i^2 = -1$,

   Grundrechenarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation) wie üblich,

   bei Division Erweiterung mit der zu z konjugiert komplexen Zahl $z^* \equiv \overline{z} = x - iy$.

   Im Bereich der komplexen Zahlen ist jede quadratische Gleichung lösbar. Beispiel: $z^2 - 2i = 0$ mit Lösung $z_1 = -z_2 = 1 + i$.

   Ein Beispiel, berechnet mit Maxima:

   $$solve(z^2 - 2 * z + 4 = 0, z); \quad \rightarrow \quad z = 1 - sqrt(3) * i, z = 1 + sqrt(3) * i$$

   wobei

   $$z = x + i\,y \quad \text{mit der imaginären Einheit} \quad i^2 = -1\ .$$

   Polardarstellung einer komplexen Zahl z mit Hilfe trigonometrischer Funktionen $z = r(\cos\alpha + i \sin\alpha)$,

   Hin– und Rücktransformation zwischen kartesischen (x, y) und polaren Koordinaten (r, α)

   $$\begin{aligned} x &= r\cos\alpha \qquad ; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ y &= r\sin\alpha \qquad ; \quad \alpha = \arctan(y/x) \quad \text{für } x > 0 \end{aligned}$$

1.2 Darstellungen der komplexen Zahlen

2. *Vorlesung am 21.10.2016* (Th. Bornath)

Die komplexe Zahl z hat verschiedene Darstellungsarten. Wir zeigen weiter unten, dass folgendes, genannt Euler–Formel, gilt:

$$\exp(i\alpha) = \cos\alpha + i\sin\alpha \ .$$

Neue (dritte) Darstellung einer komplexen Zahl z mittels Euler–Formel, z. B. $z = 1 + i = \sqrt{2}\,(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)) = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$,
einfache Berechnung von Multiplikation und Division

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2\,(\cos(\alpha_1+\alpha_2) + i\sin(\alpha_1+\alpha_2)) = r_1 r_2 e^{i(\alpha_1+\alpha_2)} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}\,(\cos(\alpha_1-\alpha_2) + i\sin(\alpha_1-\alpha_2)) = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\alpha_1-\alpha_2)} \end{aligned}$$

sowie von Potenzen z^n durch Euler–Darstellung:

$$z^n = r^n e^{in\alpha}$$

Beweis der Euler–Formel mittels Reihendarstellung

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \ .$$

Aus

$$(\exp(i\alpha))^n = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$$

und

$$\exp(in\alpha) = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)$$

folgt Satz von Moivre

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha) \ .$$

Periodizität der komplexen e-Funktion $e^{\pm i2\pi k} = 1$ beachten.
2π–Periodizität der komplexen Exponentialfunktion

$$e^{i\alpha} = e^{i(\alpha\pm2\pi k)} \text{ mit } k = 0, 1, 2, \ldots \ .$$

Als Beispiel aus den Naturwissenschaften:
Komplexe Exponentialfunktion $F(z(t)) = A\exp(i\alpha)$ mit $\alpha = \omega t$.

1.3 Nullstellenberechnung in der komplexen Ebene

4. *Vorlesung am 28.10.2016* (R. Mahnke)

   Zusammenfassung der drei Darstellungsarten einer komplexen Zahl z:

$$
\begin{aligned}
z &= x + iy \text{ — kartesische Koordinaten },\\
z &= r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \text{ — Polarkoordinaten },\\
z &= r\exp(i\alpha) \text{ — komplexe Exponentialfunktion }.
\end{aligned}
$$

Wichtig ist die Nullstellenberechnung $F(z) = 0$.

Ausblick auf die Gleichung $F(z) = z^n - 1 = 0$ mit $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Merke: Für jedes $z \neq 0$ gibt es genau n komplexe Zahlen, deren n-te Potenz z ist:

$$z = re^{i\alpha} = re^{i(\alpha+2\pi k)} = \left(\sqrt[n]{r}\, e^{i(\alpha+2\pi k)/n}\right)^n \text{ für } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \,.$$

Nullstellen der Funktion $F(z) = z^n - 1$ liegen auf dem Einheitskreis ($r = 1$) und lauten

$$z_k = e^{i2\pi k/n} \qquad \text{mit} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \,.$$

• Nullstellenberechnung analytisch oder mit Hilfe von Computer-Algebra-Systemen (z. B. mit WxMaxima)

```
solve(z^3=8*\%i,z);
polarform(%);
rectform(%);
```

1.4 Zusammenfassung: Komplexe Zahlen

Bitte selbst ergänzen:

- Imaginäre Einheit, komplexe Ebene
- Kartesische Darstellung (algebraische Form)
- Polardarstellung (trigonometrische Form)
- Exponentialdarstellung (komplexe Exp-Funktion)
- Eulerformel
- Satz von Moivre
- Grundrechenarten, Potenzieren und Wurzelziehen
- Nullstellenberechnung
- Merke: Für jedes $z \neq 0$ gibt es genau n komplexe Zahlen, deren $n-$te Potenz z ist.

  $$z = re^{i\alpha} = re^{i(\alpha+2\pi k)} = \left(\sqrt[n]{r}\, e^{i(\alpha+2\pi k)/n}\right)^n \text{ für } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \,.$$

- Der *schönste mathematische Ausdruck der Welt*

  $$e^{i\pi} + 1 = 0$$

  folgt aus der Eulerformel. Warum?

2 Differenzen- und Differentialrechnung

2.1 Differenzenverfahren

5. *Vorlesung am 04.11.2016* (R. Mahnke)

   Schrittweise Berechnung von x_{m+1} aus x_m mittels einer Iterations- bzw. Differenzengleichung

   $$x_{m+1} = f(x_m) \quad \text{mit} \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

   Aus dem gegebenen Startwert x_0 folgt der erste Folgewert x_1, daraus x_2 usw.

   Beispiel: Lineare Funktion $f(x) = R\,x$ (unbegrenztes Wachstum).
   Aus $x_0 = 1$ folgt $x_1 = f(x_0) = R\,x_0 = R$. Danach gilt $x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = R^2$. Für die $m-$Iteration gilt $x_m = R^m$ (Potenzfunktion). Falls die Wachstumsrate R größer Eins, dann wächst die Population über alle Grenzen (divergiert gegen unendlich).

   Wachstumsmodelle von Populationen mit Dämpfung. Berücksichtigung einer Kapazitätsgrenze führt auf eine nichtlineare Iteration, genannt logistische Gleichung

   $$x_{m+1} = r x_m (1 - x_m) \ .$$

   Startwert aus $0 < x_0 < 1$. Parameter aus $0 < r \leq 4$. Viele interessante Resultate: Fixpunkte, periodische Lösungen, deterministisches Chaos, Feigenbaum–Diagramm, Ljapunov–Exponenten, ...

   Wichtig ist die Newton–Iteration zur Nullstellenberechnung reeller Funktionen

   $$x_{m+1} = N(x_m) = x_m - \frac{f(x_m)}{f'(x_m)} \ .$$

   Sie folgt aus

   $$f'(x_m) \equiv \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_m} \approx \frac{f(x_{m+1}) - f(x_m)}{x_{m+1} - x_m} = \frac{0 - f(x_m)}{x_{m+1} - x_m} \ .$$

   Die Nullstellen x_{null} (aus $f(x_{null}) = 0$) sind die Fixpunkte $N(x_{null}) = x_{null}$ der Newton-Iteration.

2.2 Newton–Iteration im Komplexen

6. *Vorlesung am 11.11.2016* (R. Mahnke)

   Nullstellenberechnung numerisch mit Newton–Iterationsverfahren

   Die Newton–Iteration zur Nullstellenberechnung komplexer Funktionen $F(z) = 0$ (bekannt als Newton–Verfahren) lautet analog zur Differenzengleichung im Reellen

$$z_{m+1} = N(z_m) \quad \text{mit} \quad N(z) = z - \frac{F(z)}{F'(z)} \; .$$

   Ein Beispiel: Für $F(z) = z^3 - 1$ sind die Nullstellen bekannt. Welcher Startwert $z_{start} \equiv z_0$ führt auf welche Nullstelle z_k^{null}? Wie sieht das Einzugsgebiet der Nullstellen aus? Es hat fraktale Ränder. Warum? Der Koordinatenursprung ist ein divergenter Punkt; er gehört zur Julia-Menge.

   Interessante Fragestellungen in diesem Zusammenhang:

   i) Berechnen Sie für das Beispiel der kubischen Gleichung $F(z) = z^3 - 1$ die Newton–Iterationsformeln getrennt für den Real– und Imaginarteil.

   ii) Betrachten Sie speziell die Iteration auf der reellen Achse ($y = 0$). Welche Punkte ($x_i < 0 \; ; y = 0$) konvergieren auf den divergenten Punkt ($x = 0 \; ; y = 0$) ?

   Berechnen Sie die Anfangsbedingung ($x_0 < 0 \; ; y_0 = 0$), die nach genau einer Iteration auf den Koordinatenursprung führt.

2.3 Differentialquotient und Taylor-Entwicklung

7. *Vorlesung am 11. + 18.11.2016* (R. Mahnke)

   Definition der ersten Ableitung $f'(x)$ als Differentialquotienten $df(x)/dx$ und Vergleich mit dem Differenzenquotienten $\Delta f(x)/\Delta x$. Berechnung der ersten Ableitung am Beispiel $f(x) = \sqrt{x}$. Zweite und höhere Ableitungen $f^{(n)}(x)$.

   Beispiele aus den Naturwissenschaften (Momentangeschwindigkeit und –beschleunigung):

   $$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad ; \quad a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

   Gewöhnliche Ableitungen werden zu partiellen (∂) Ableitungen bei Funktionen mehrerer Variablen, z. B. $f(x_1, x_2, x_3)$. Partielle Ableitungen (z. B. $\partial f(x_1, x_2, x_3)/\partial x_1$) und Ableitungen höherer Ordnung; Vertauschbarkeit der zweiten Ableitungen prüfen (Satz von Schwarz) Beispiel: $f(x_1, x_2) = x_1^3 x_2 - e^{x_1 x_2}$.

   Aus der Taylor-Entwicklung

   $$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \mathcal{O}\left((\Delta x)^2\right)$$

   folgt als Näherung in 1. Ordnung

   $$f'(x)\Delta x \approx \Delta f(x)$$

   ein Zusammenhang zwischen dem Differential– und dem Differenzenquotienten

   $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \ .$$

   Die Taylor-Formel lautet

   $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \ .$$

   Eine äquivalente Formulierung lautet

   $$f(x + \Delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\Delta x)^n \ .$$

2.4 Differentialgleichung und totales Differential

8. *Vorlesung am 18.11.2016* (R. Mahnke)

   Lösung einer (gewöhnlichen) Differentialgleichung durch Integration. Beispiel: Lineare Differentialgleichung

   $$\frac{dx}{dt} = \lambda\, x$$

   wird mittels Trennung der Variablen integriert. Lösung lautet

   $$x(t) = Ce^{\lambda\, t} \; .$$

   Richtigkeit durch Probe (Einsetzen der Lösung in geg. Gleichung) überprüfen.

   Was ist ein Anfangswertproblem? Siehe o. g. Beispiel:

   $$\frac{dx}{dt} = 2\, x \qquad \text{mit} \qquad x(t=0) = x_0$$

   Die Lösung lautet $x(t) = x_0\, e^{2t}$.

   Analoges mit Differenzengleichung: $x_{m+1} = 2x_m \quad \to \quad x_m = x_0\, 2^m$.

   Vergleich zwischen Differenz und Differential am Beispiel des Kugelvolumens $V(r) = (4\pi/3)r^3$, Differenz $\Delta V(r) = V(r+\Delta r) - V(r)$, Differential $dV(r) = (dV(r)/dr)dr$.
   Totales Differential einführen

   $$df(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \; .$$

   Die Diffusionsgleichung ist ein Beispiel einer partiellen Differentialgleichung

   $$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = D\, \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} \; .$$

   Die Funktion

   $$p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}}\, \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt} \right) \; ,$$

   genannt Gauss-Verteilung, löst tatsächlich die Diffusionsgleichung, d. h. durch die Probe mittels Einsetzen und partieller Differentiation kann dies bewiesen werden.

3 Integralrechnung

3.1 Integralbegriff und Integration

9. Vorlesung am 25.11.2016 (R. Mahnke)

   Definition des Integrals im Riemannschen Sinne als Grenzwert; Eigenschaften des bestimmten Integrals; geometrische (als Fläche stets positiv, somit Betrag des Integrals) und physikalische Bedeutung (mit Vorzeichen) des Integrals; Mittelwertsatz der Integralrechnung; unbestimmte Integration mit additiver Integrationskonstante; Integrationsregeln (Summe, Differenz) und partielle Integration, Substitutionsmethode; Verweis auf Integrationstabellen und numerischer Integration.

   Zur Berechnung von unbestimmten und bestimmten Integralen; Lösung mittels Substitution und/oder partieller Integration; Beispiele sind

   $$\int x e^x \, dx \ , \ \int \cos^2 x \, dx \ , \ \int \ln x \, dx \ .$$

   Einführung des Begriffs des Kurvenintegrals und Vorbereitungen zur Berechnung von Kurvenintegralen an Beispielen, z. B. Bogenlänge. Berechnung der Bogenlänge eines Viertelkreises ist in kartesischen Koordinaten schwierig; Berechnung nach Transformation in Polarkoordinaten

   $$L = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_0^{\pi/2} R \, d\alpha = R \, \frac{\pi}{2}$$

   einfach. Verwendete Transformation: $x = R \cos\alpha$; $y = R \sin\alpha$.

3.2 Mehrfachintegration

10. Vorlesung am 02.12.2015 (R. Mahnke)

    Erweiterung des Integralbegriffs auf mehrdimensionale Integrale. Verwendung von zweidimensionalen Integralen zur Massenberechnung bei inhomogener Dichteverteilung $\rho(x, y)$

    $$M = \int\int_{\text{Fläche}} \rho(x, y)\, dx\, dy \ .$$

    Berechnung von Volumen mittels dreidimensionaler Integration; Beispiel: Volumen einer Kugel (Radius R) mittels dreidimensionaler Integration

    $$V = \int\int\int_{\text{Kugel}} dx\, dy\, dz \ .$$

    Rechnung in kartesischen Koordinaten sehr kompliziert; nach Transformation in Kugelkoordinaten unter Berücksichtigung der Jakobi-Determinante wird Rechnung viel einfacher; sinnvoll bei radialsymmetrischen Körpern.

    Was ist eine Jacobi-Determinante?

    Differentialformen in mehreren Dimensionen werden mit Hilfe der Jacobi-Determinate J transformiert. In der Ebene (zwei Dimensionen) gilt unter Verwendung der Polarkoordinaten

    $$x = r\cos\alpha \qquad\qquad y = r\sin\alpha$$

    die Transformation

    $$A = \int\int_F dA = \int\int_{(x,y)\in F} dx\, dy = \int\int_{(r,\alpha)\in F} r\, dr\, d\alpha \ .$$

    Somit gilt für die Jacobi-Determinante $J = r$.

    Im dreidimensionalen Fall (Kugelkoordinaten) gilt $J = r^2 \sin\vartheta$, damit $dV = dx\, dy\, dz = J\, dr\, d\vartheta\, d\alpha = r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\alpha$.

4 Vektoralgebra und Vektoranalysis

4.1 Vektoren und ihre Verknüpfungen

11. Vorlesung am 09.12.2016 (R. Mahnke)

    Naturwissenschaftliche Größen sind entweder Skalare oder Vektoren, z. B. Ortsvektor $\vec{r} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$ in Komponentendarstellung. Elementare Rechenregeln der Addition und Subtraktion von Vektoren. Speziell: Einheitsvektor und Nullvektor.

    Verknüpfung von Vektoren:
    (a) Skalarprodukt (inneres Produkt $\vec{a} \cdot \vec{b} = s$) und
    (b) Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{v}$).

    Basisvektoren sind linear unabhängig. Verweis auf vektorwertige Funktionen, z. B. zeitlich veränderlicher Ortsvektor als Raumkurve $\vec{r}(t)$.

4.2 Skalar– und Vektorfelder: Gradient, Divergenz, Rotation

12. Vorlesung am 09. und 16.12.2016 (R. Mahnke)

    Begriff des Gradienten $\operatorname{grad} \varphi$: Man ordnet einer vorgegeben Skalarfunktion (Skalarfeld) eine Vektorfunktion (Vektorfeld) zu, genannt Richtungsableitung. Der Gradientenvektor steht senkrecht auf der Tangentialebene $\varphi(x, y, z) = \text{const}$. Beispiele sind Potential (potentielle Energie $V(\vec{r})$ und Kraft $\vec{F}(\vec{r})$ mit $\vec{F} = -\operatorname{grad} V$.
    Begriff der Divergenz $\operatorname{div} \vec{F}$: Man ordnet einem Vektorfeld eine skalare Funktion zu, genannt Quellstärke oder Quelldichte. Einfaches Beispiel: $\operatorname{div} \vec{r} = 3$.
    Verweis auf den Vektoroperator Nabla $\vec{\nabla}$ (in kartesischen Koordinaten).
    Begriff der Rotation $\operatorname{rot} \vec{F}$: Man ordnet einem Vektorfeld eine neue Vektorfunktion zu, genannt Rotation, Wirbelstärke oder Wirbeldichte.
    Zwei wichtige Formeln:
    $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varphi \equiv \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0$ und $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \equiv \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = 0$.

    Weitere wichtige Integralformeln: Stoke'scher Satz und Gauß'scher Satz (siehe F. Embacher, Lehrbuch Kap. 14, S. 219/220).

5 Matrizen und lineare Gleichungssysteme

5.1 Matrixschreibweise und Lösung von linearen Systemen

13. Vorlesung am 06.01.2017 (R. Mahnke)

    Eine Matrix A ist beispielsweise die folgende 2 x 2 Anordnung in Zeilen und Spalten

    $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} .$$

    Addition und Multiplikation von Matrizen. Was ist ein Kommutator? Die Inverse A^{-1} (inverse Matrix) folgt aus $A^{-1}A = E$, wobei E die Einheitsmatrix ist.

    Algebraische lineare Gleichungssysteme in Matrixschreibweise $Y = AX$ mittels Invertierung $X = A^{-1}Y$ lösen.

    Eindimensionale lineare Differentialgleichung $dx/dt = \lambda\, x$ mit Anfangsbedingung $x(t = 0) = x_0$ besitzt die Lösung $x(t) = x_0 \exp{(\lambda t)}$. Erweiterung auf mehrdimensionale lineare Gleichungssysteme $dX/dt = M\, X$. Superpositionslösung (unter Verwendung von Eigenwerten λ aus $\det(M - \lambda E) = 0$ und Eigenvektoren U aus ($M\, U = \lambda E\, U$) lautet

    $$X(t) = \sum_i c_i\, U_i\, e^{\lambda_i t} .$$

    Die Koeffizienten c_i sind aus den Anfangsbedingungen $X(t = 0) = X_0$ zu ermitteln.

    Eine typische Aufgabe lautet beispielsweise:
    Lösen Sie das folgende Differentialgleichungssystem

    $$\frac{dx}{dt} = -y\,, \qquad x(t=0) = x_0\,,$$
    $$\frac{dy}{dt} = x\,, \qquad y(t=0) = y_0$$

    unter Berücksichtigung der vorgegebenen Anfangswerte.

5.2 Koordinaten-Transformationsmethode

14. Vorlesung am 13.01.2017 (R. Mahnke)

    Qualitative Theorie von Differentialgleichungssystemen und Diskussion der Lösung als Bahnkurve im Zustandsraumdiagramm. Dynamisches System, Fixpunkte und ihre Stabilität.

    Ein Beipiel: Diskussion eines Systems von zwei gekoppelten Differentialgleichungen (in Matrixschreibweise) am Beispiel

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y) = -x + y \quad ; \quad x(t=0) = x_0 \; ;$$
$$\frac{dy}{dt} = g(x,y) = -x - y \quad ; \quad y(t=0) = y_0 \; .$$

    Die algebraische Lösungsmethode erfordert die Kenntnis der Begriffe Matrix, Determinante, Eigenwert, Eigenvektor.

    Die Lösung der Eigenwertgleichungen und die Anwendung der Superpositionsmethode liefern als Resultat der o. g. linearen Differentialgleichungen die Funktionen

$$x(t) = e^{-t}\,(x_0 \cos t + y_0 \sin t) \; ;$$
$$y(t) = e^{-t}\,(y_0 \cos t - x_0 \sin t) \; .$$

    Wiederholung zur Transformation zwischen kartesischen und Polarkoordinaten; Berechnung der Transformation der Geschwindigkeiten; Lösung des o. g. dynamischen Systems in Polardarstellung; die resultierende Bahnkurve ist eine logarithmische Spirale; grafische Darstellung in der $x - y$–Zustandsebene.

    Das transformierte Gleichungsystem ist entkoppelt

$$\frac{dr}{dt} = -r \quad ; \quad r(t=0) = r_0 \; ;$$
$$\frac{d\alpha}{dt} = -1 \quad ; \quad \alpha(t=0) = \alpha_0 \; .$$

    und die Lösung ist mittels elementarer Integration möglich

$$r(t) = r_0 \exp(-t) \; ;$$
$$\alpha(t) = -\,t + \alpha_0$$

    und lautet als Bahnkurve

$$r(\alpha) = r_0 \exp(\alpha - \alpha_0) \; .$$

    Die Rücktransformation liefert die bekannten Resultate $x = x(t)$ und $y = y(t)$.

6 Fourier-Transformation

15. Vorlesung am 20.01.2017 (R. Mahnke)

    Kontinuierliche symmetrische eindimensionale Fourier-Transformation zwischen Funktion im Ortsraum $f(x)$ und Funktion $g(k)$ im reziproken Raum (Wellenzahlraum $k = 2\pi/L$)

    $$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+ikx} g(k) dk \\ g(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} f(x) dx \end{aligned}$$

    Analoges gilt für eine Funktion abhängig von Zeit t und transformierte Funktion abhängig von Kreisfrequenz ω mit $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$.

    Anwendung auf die Diffusionsgleichung. Beachte: Integrale enthalten komplexe Exponentialfunktion. Somit exakte Auswertung der rellen Integrale mithilfe der Euler-Formel.

7 Spezielle Funktionen

16. Vorlesung am 20.01.2017 (R. Mahnke)

    Die Dirac'sche Deltafunktion $\delta(x)$ und die Heaviside'sche Sprungfunktion $\theta(x)$ sind sog. Distributionen. Sie spielen in den Naturwissenschaften zur kontinuierlichen Beschreibung von Feldern, z. B. ist die Ladungsdichte $\varrho(\vec{r}) = Q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ eine Delta–Funktion, und bei Ein- und Ausschaltvorgängen eine Rolle.
    Die Deltafunktion bzw. Delta–Distribution ist die erste Ableitung der Sprungfunktion. Sie ist auch über das folgende Integral

    $$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0)$$

    definiert.

    Hinweise auf die Fourier–Transformation und die Fourier–Darstellung der Deltafunktion.

8 Zusammenfassung

17. Vorlesung am 27.01.2017 (R. Mahnke)

    Themenschwerpunkte:

    - Komplexe Zahlen
    - Differentiation
    - Integration
    - Vektoroperationen
    - Reihenentwicklungen
    - Matrizen, Determinaten, EW und EV
    - Differentialgleichungssysteme (lineare)
    - Fouriertransformation (einfaches zum Verständnis)

    Probeklausur:

    (a) Die Gleichung $x^2 + 2x + 2 = 0$ ist zu lösen.

    (b) Ermitteln Sie die erste Ableitung von $\ln(\tan(x+1))$.

    (c) Berechnen Sie alle (9) zweiten partiellen Ableitungen von $F(x,y,z) = x + y + xy\sin z$.

    (d) Ermitteln Sie $\int x \sin(x^2)\, \mathrm{d}x$.

    (e) Ermitteln Sie $\int x \ln x \, \mathrm{d}x$.

    (f) Berechnen Sie die Divergenz des (dreidimensionalen) Ortsvektors $\vec{r}$.

    (g) Multiplizieren Sie die beiden Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und berechnen Sie danach die Determinante davon.

    (h) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren der Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

    (i) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem

    $$\frac{dx}{dt} = y\,,$$
    $$\frac{dy}{dt} = x\,,$$

    unter Berücksichtigung der gegebenen Anfangswerte $x(t=0) = x_0$ and $y(t=0) = y_0$.