

Übungsaufgaben Serie 13

(sind vor Beginn der 13. Übung am 21.01.2015 mit Rechenweg abzugeben)

Wahlaufgabe (13a) Gegeben ist das Skalarfeld $g(x, y, z) = x^2y$. Berechnen Sie:

- (a) den Gradienten: $\text{grad } g$ [2 Punkte]
- (b) die Quellstärke des Gradienten: $\text{div grad } g$ [2 Punkte]
- (c) die Wirbelstärke des Gradienten: $\text{rot grad } g$ [2 Punkte]

Wahlaufgabe (13b) Gegeben ist das Vektorfeld $\vec{u}(\vec{r}) = (2yz, xy + z^2, -z^2)$. Berechnen Sie:

- (a) die Quellstärke: $\text{div } \vec{u}$ [2 Punkte]
- (b) die Wirbelstärke: $\text{rot } \vec{u}$ [2 Punkte]
- (c) den Gradienten der Divergenz: $\text{grad div } \vec{u}$ [2 Punkte]
- (d) die Divergenz der Rotation: $\text{div rot } \vec{u}$ [+2 Punkte]

Hinweis: Sie können sich zwischen den Wahlaufgaben (13a) und (13b) entscheiden. Wenn beide gemacht werden, zählt die Bessere.

(13c) Gegeben ist der Laplace-Operator $\Delta = \vec{\nabla} \bullet \vec{\nabla}$ in dreidimensionalen kartesischen Koordinaten.

- (a) Stellen Sie $\Delta = \vec{\nabla} \bullet \vec{\nabla}$ kartesisch dar. [2 Punkte]
- (b) Wann gilt: $\Delta f = \text{div grad } f$? [+2 Punkte]
- (c) Wann gilt: $\Delta \vec{v} = \text{grad div } \vec{v}$? [+2 Punkte]

(13d) Wenden Sie den Laplace-Operator $\Delta = \vec{\nabla} \bullet \vec{\nabla}$ auf die folgenden skalaren Felder an.

- (a) $f(x, y) = x^2y$ (2-dimensional) [1 Punkt]
- (b) $g(x, y, z) = x^2 + (y - x^3)z^2$ (3-dimensional) [2 Punkte]
- (c) $h(x, y, z) = r^2$ (3-dimensional) [1 Punkt]

(13e) Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $\vec{F}(x, y, z)$, gegeben durch

$$\vec{F} = (2x + y) \vec{i} + (x - y^2) \vec{j} + 0 \vec{k},$$

konservativ ist, d.h. prüfen Sie, ob $\text{rot } \vec{F} = 0$ gilt. Berechnen Sie danach die Skalarfunktion $\varphi(x, y, z)$ mittels

$$\vec{F} = -\text{grad } \varphi.$$

[6 Punkte]

Zusatzaufgaben auf der nächsten Seite!!!

(13f) Koordinatentransformationen:

Stellen Sie für kartesische, Zylinder- und Kugelkoordinaten folgende Formeln zusammen:

(a) Ortsvektor $\vec{r}$ [+1 Punkte]

(b) totales Differential $d\vec{r}$ [+2 Punkte]

(c) Nabla $\vec{\nabla}$ [+3 Punkte]

(13g) Kreuzen Sie das Zutreffende an: [+10 Punkte]

Aussage (+1 Pkt. wenn richtig, -1 Pkt. wenn falsch, 0 Pkt. wenn frei gelassen)	wahr	falsch
Der Gradient ist eine eindeutige Zuordnung, bei der einem Vektorfeld ein Vektorfeld zugewiesen wird.		
Die Divergenz ist eine eindeutige Zuordnung, bei der einem Vektorfeld ein Skalarfeld zugewiesen wird.		
Die Rotation ist eine eindeutige Zuordnung, bei der einem Skalarfeld ein Skalarfeld zugewiesen wird.		
Der Laplace-Operator ist ein skalarer Operator, der angewandt auf ein Skalarfeld linear (additiv und homogen) ist.		
Wendet man den Laplace-Operator auf ein Vektorfeld $\vec{w}$ an, so gibt er die Differenz zwischen grad div und rot rot an.		
Jedes wirbelfreie Feld $\vec{z}$ besitzt keine Divergenz $\text{div } \vec{z} = 0$.		
Der Gradient von jedem Skalarfeld ist quellenfrei.		
Die Transformation der Rotation von den kartesischen Koordinaten in die Zylinderdarstellung ist stets eindeutig.		
Die Transformation des Laplace-Operators von den Zylinderkoordinaten in Kugelkoordinaten ist nicht eindeutig.		
Jedes Vektorfeld $\vec{F}$ lässt sich als Überlagerung von einem wirbelfreien Quellfeld F_Q und einem quellenfreien Wirbelfeld F_W darstellen: $\vec{F} = \vec{F}_Q + \vec{F}_W$.		