

Vergleich zwischen periodischen
Zufallswanderern mit diskreten und konti-
nuierlichen Koordinaten bei kontinuierlicher
Zeit

Von Tobias Deffge

Inhaltsverzeichnis

1. Bekannte Gleichungen
2. Von Mastergleichung zur Drift-Diffusions-Gleichung
3. Übergang der diskreten zur kontinuierlichen Lösung
4. Grafische Beispiele
5. Kramers-Moyal-Entwicklung

1. Bekannte Gleichungen

Kontinuierliche Zeit und diskrete Koordinaten

Mastergleichung (konstante Schrittweiten):

$$\frac{\partial P(x_m, t)}{\partial t} = W_+ P(x_m - a, t) + W_- P(x_m + a, t) - (W_+ + W_-) P(x_m, t)$$

Lösung für Bewegung auf einen Kreis:

$$P(x_m, t) = \frac{1}{M} \sum_k e^{-\lambda'_k t} [\cos(\lambda''_k t) * \cos(k[x_m - x_0]) + \sin(\lambda''_k t) * \sin(k[x_m - x_0])]$$

$$\lambda'_k = (W_+ + W_-)(1 - \cos(ka))$$

$$\lambda''_k = (W_+ - W_-)\sin(ka)$$

$$k = \frac{2\pi l}{Ma}$$

$$l = 0, 1, 2, \dots, M - 1$$

1. Bekannte Gleichungen

Kontinuierliche Zeit und kontinuierliche Koordinaten

Drift-Diffusions-Gleichung:

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} - v_d \frac{\partial p(x, t)}{\partial x}$$

Lösung für Bewegung auf einen Kreis:

$$p(x, t) = \frac{1}{L} \sum_k e^{-\lambda'_k t} [\cos(\lambda''_k t) * \cos(k[x - x_0]) + \sin(\lambda''_k t) * \sin(k[x - x_0])]$$

$$\lambda'_k = Dk^2$$

$$\lambda''_k = v_d k$$

$$k = \frac{2\pi l}{L}$$

$$l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

2. Von Mastergleichung zur Drift-Diffusions-Gleichung

Wiederholung

$$\frac{\partial P(x_m, t)}{\partial t} = W_+ P(x_m - a, t) + W_- P(x_m + a, t) - (W_+ + W_-) P(x_m, t)$$

$$\Downarrow$$
$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} - v_d \frac{\partial p(x, t)}{\partial x}$$

2. Von Mastergleichung zur Drift-Diffusions-Gleichung

Wiederholung

$$\frac{\partial P(x_m, t)}{\partial t} = W_+ P(x_m - a, t) + W_- P(x_m + a, t) - (W_+ + W_-) P(x_m, t)$$

$$\Downarrow$$
$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} - v_d \frac{\partial p(x, t)}{\partial x}$$

$$\frac{\frac{\partial P(x_m, t)}{\partial t}}{a} = \frac{1}{a} \left[a^2 \frac{W_+ + W_-}{2} \frac{P(x_m + a, t) - 2P(x_m, t) + P(x_m - a, t)}{a^2} - a(W_+ - W_-) \frac{P(x_m + a, t) - P(x_m - a, t)}{2a} \right]$$

2. Von Mastergleichung zur Drift-Diffusions-Gleichung

Wiederholung

$$\frac{\partial P(x_m, t)}{\partial t} = W_+ P(x_m - a, t) + W_- P(x_m + a, t) - (W_+ + W_-) P(x_m, t)$$

$$\Downarrow$$
$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} - v_d \frac{\partial p(x, t)}{\partial x}$$

$$\frac{\frac{\partial P(x_m, t)}{\partial t}}{a} = \frac{1}{a} \left[a^2 \frac{W_+ + W_-}{2} \frac{P(x_m + a, t) - 2P(x_m, t) + P(x_m - a, t)}{a^2} - a(W_+ - W_-) \frac{P(x_m + a, t) - P(x_m - a, t)}{2a} \right]$$

$$\xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \left[a^2 \frac{W_+ + W_-}{2} \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} - a(W_+ - W_-) \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \right]$$

2. Von Mastergleichung zur Drift-Diffusions-Gleichung

Wiederholung

$$\frac{\partial P(x_m, t)}{\partial t} = W_+ P(x_m - a, t) + W_- P(x_m + a, t) - (W_+ + W_-) P(x_m, t)$$

$$\Downarrow$$
$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} - v_d \frac{\partial p(x, t)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P(x_m, t)}{\partial t} = \frac{1}{a} \left[a^2 \frac{W_+ + W_-}{2} \frac{P(x_m + a, t) - 2P(x_m, t) + P(x_m - a, t)}{a^2} - a(W_+ - W_-) \frac{P(x_m + a, t) - P(x_m - a, t)}{2a} \right]$$

$$\xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \left[a^2 \frac{W_+ + W_-}{2} \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} - a(W_+ - W_-) \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \right]$$

$$\text{mit } p(x, t) = \frac{P(x, t)}{a}, \quad D = a^2 \frac{W_+ + W_-}{2}, \quad v_d = a(W_+ - W_-)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} - v_d \frac{\partial p(x, t)}{\partial x}$$

3. Übergang der diskreten zur kontinuierlichen Lösung

Parameter λ'_k und λ''_k

Für diskrete Lösung: $\lambda'_k = (W_+ + W_-)(1 - \cos(ka))$
 $\lambda''_k = (W_+ - W_-)\sin(ka)$

3. Übergang der diskreten zur kontinuierlichen Lösung

Parameter λ'_k und λ''_k

Für diskrete Lösung: $\lambda'_k = (W_+ + W_-)(1 - \cos(ka))$
 $\lambda''_k = (W_+ - W_-)\sin(ka)$

Taylorentwicklung 2. Ordnung nach a mit Entwicklungsstelle $a = 0$:

$$\begin{aligned}\lambda'_k &\approx (W_+ + W_-)(1 - \cos(0)) + (W_+ + W_-)\sin(0)ka + \frac{W_+ + W_-}{2}\cos(0)k^2a^2 \\ &= \frac{W_+ + W_-}{2}k^2a^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda''_k &\approx (W_+ - W_-)\sin(0) + (W_+ - W_-)\cos(0)ka - \frac{W_+ - W_-}{2}\sin(0)k^2a^2 \\ &= (W_+ - W_-)ka\end{aligned}$$

3. Übergang der diskreten zur kontinuierlichen Lösung

Parameter λ'_k und λ''_k

Für diskrete Lösung: $\lambda'_k = (W_+ + W_-)(1 - \cos(ka))$
 $\lambda''_k = (W_+ - W_-)\sin(ka)$

Taylorentwicklung 2. Ordnung nach a mit Entwicklungsstelle $a = 0$:

$$\begin{aligned}\lambda'_k &\approx (W_+ + W_-)(1 - \cos(0)) + (W_+ + W_-)\sin(0)ka + \frac{W_+ + W_-}{2}\cos(0)k^2a^2 \\ &= \frac{W_+ + W_-}{2}k^2a^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda''_k &\approx (W_+ - W_-)\sin(0) + (W_+ - W_-)\cos(0)ka - \frac{W_+ - W_-}{2}\sin(0)k^2a^2 \\ &= (W_+ - W_-)ka\end{aligned}$$

Für kontinuierliche Lösung:

$$\begin{aligned}\lambda'_k &= Dk^2 \\ \lambda''_k &= v_d k\end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned}D &= \frac{W_+ + W_-}{2}a^2 \\ v_d &= (W_+ - W_-)a\end{aligned}$$

3. Übergang der diskreten zur kontinuierlichen Lösung

Weitere Anpassungen

$$\frac{P(x_m, t)}{a} = \frac{1}{Ma} \sum_k e^{-\lambda'_k t} [\cos(\lambda''_k t) * \cos(k[x_m - x_0]) + \sin(\lambda''_k t) * \sin(k[x_m - x_0])]$$

$$\longrightarrow p(x, t) = \frac{1}{L} \sum_k e^{-\lambda'_k t} [\cos(\lambda''_k t) * \cos(k[x - x_0]) + \sin(\lambda''_k t) * \sin(k[x - x_0])]$$

$$\text{Zusätzlich } l = 0, 1, 2, \dots, M - 1 \rightarrow l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{M - 1}{2}$$

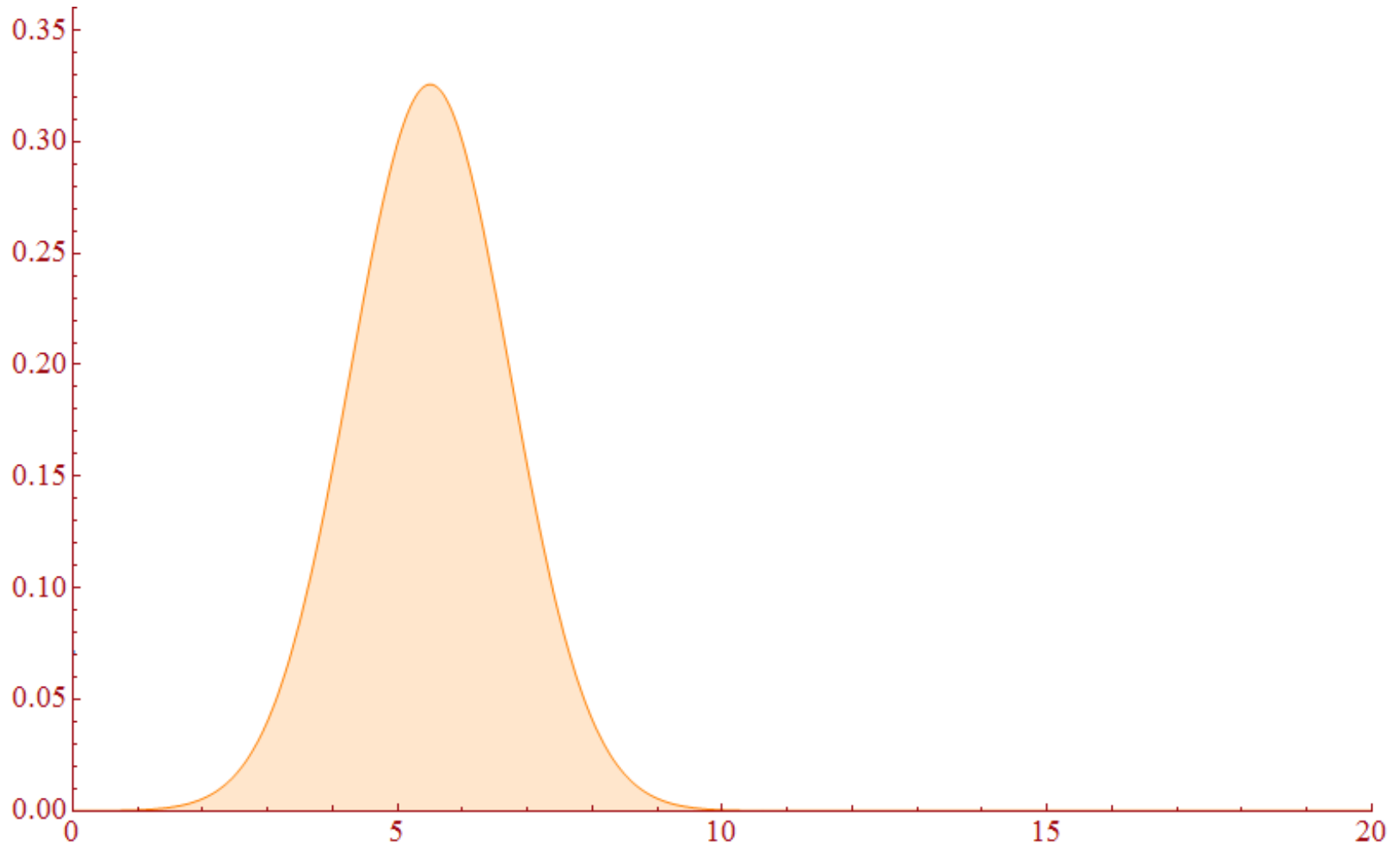
$$\xrightarrow{a \rightarrow 0} l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{da } M \rightarrow \infty)$$

Nach diesen Änderungen ist die diskrete Lösung komplett in die kontinuierlichen Lösung übergegangen.

4. Grafische Beispiele

$x_0 = 5$ | $t = 0,25$ | $D = 3$ | $v_d = 2$ | $L = 20$

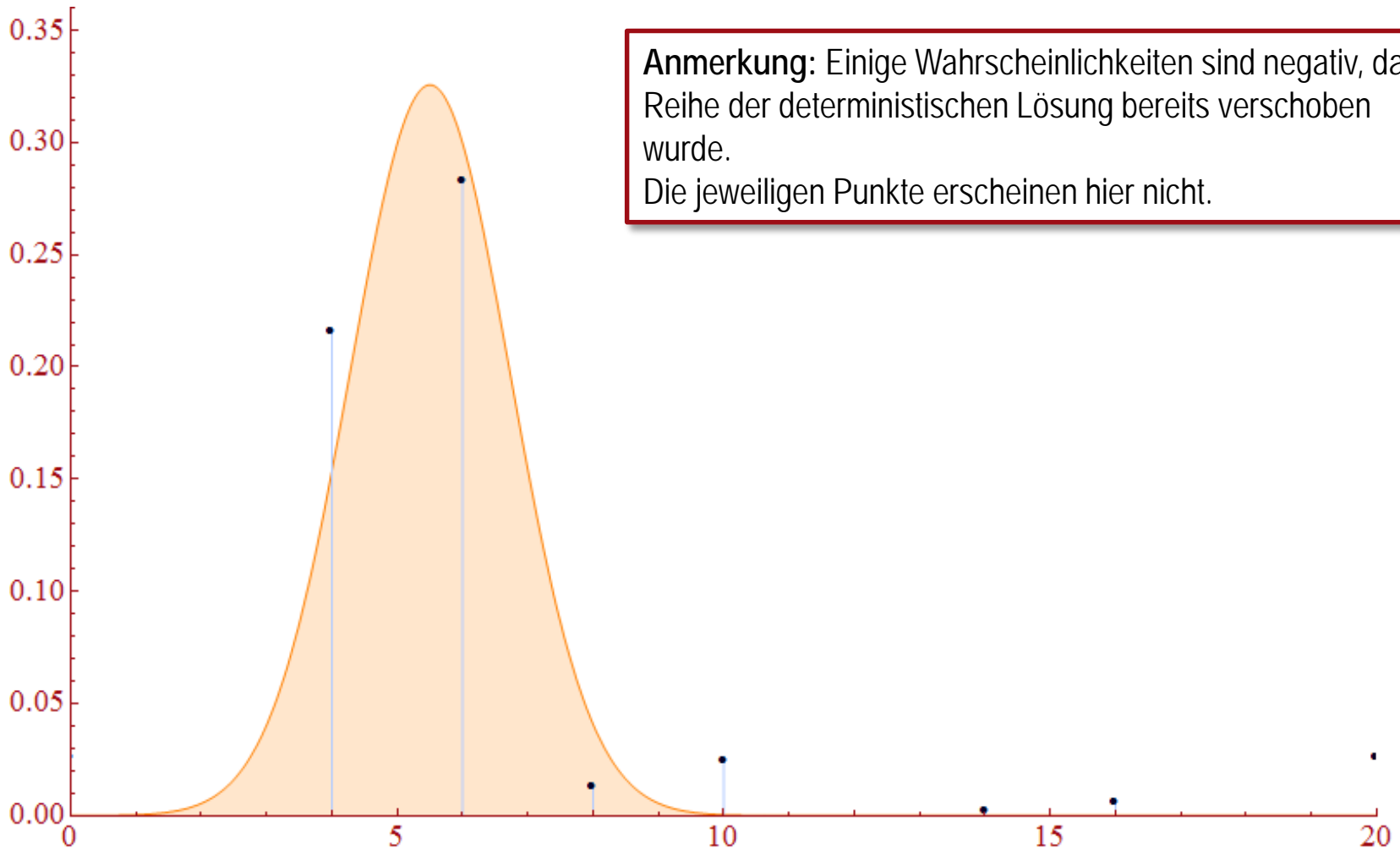
Nur kontinuierliche Funktion



4. Grafische Beispiele

$$x_0 = 5 \mid t = 0,25 \mid D = 3 \mid v_d = 2 \mid L = 20$$

$$a = 2$$

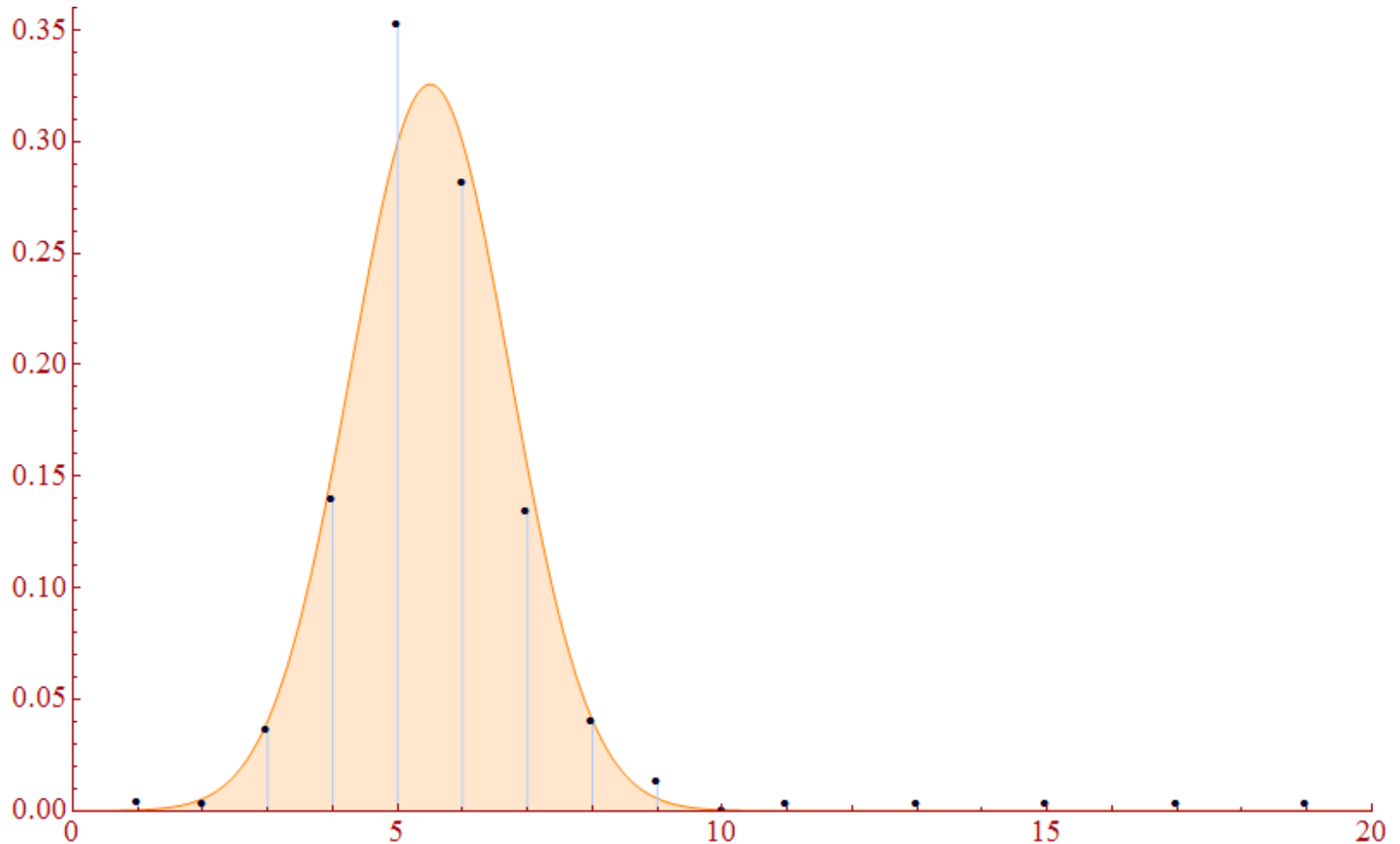


Anmerkung: Einige Wahrscheinlichkeiten sind negativ, da die Reihe der deterministischen Lösung bereits verschoben wurde.
Die jeweiligen Punkte erscheinen hier nicht.

4. Grafische Beispiele

$x_0 = 5 \mid t = 0,25 \mid D = 3 \mid v_d = 2 \mid L = 20$

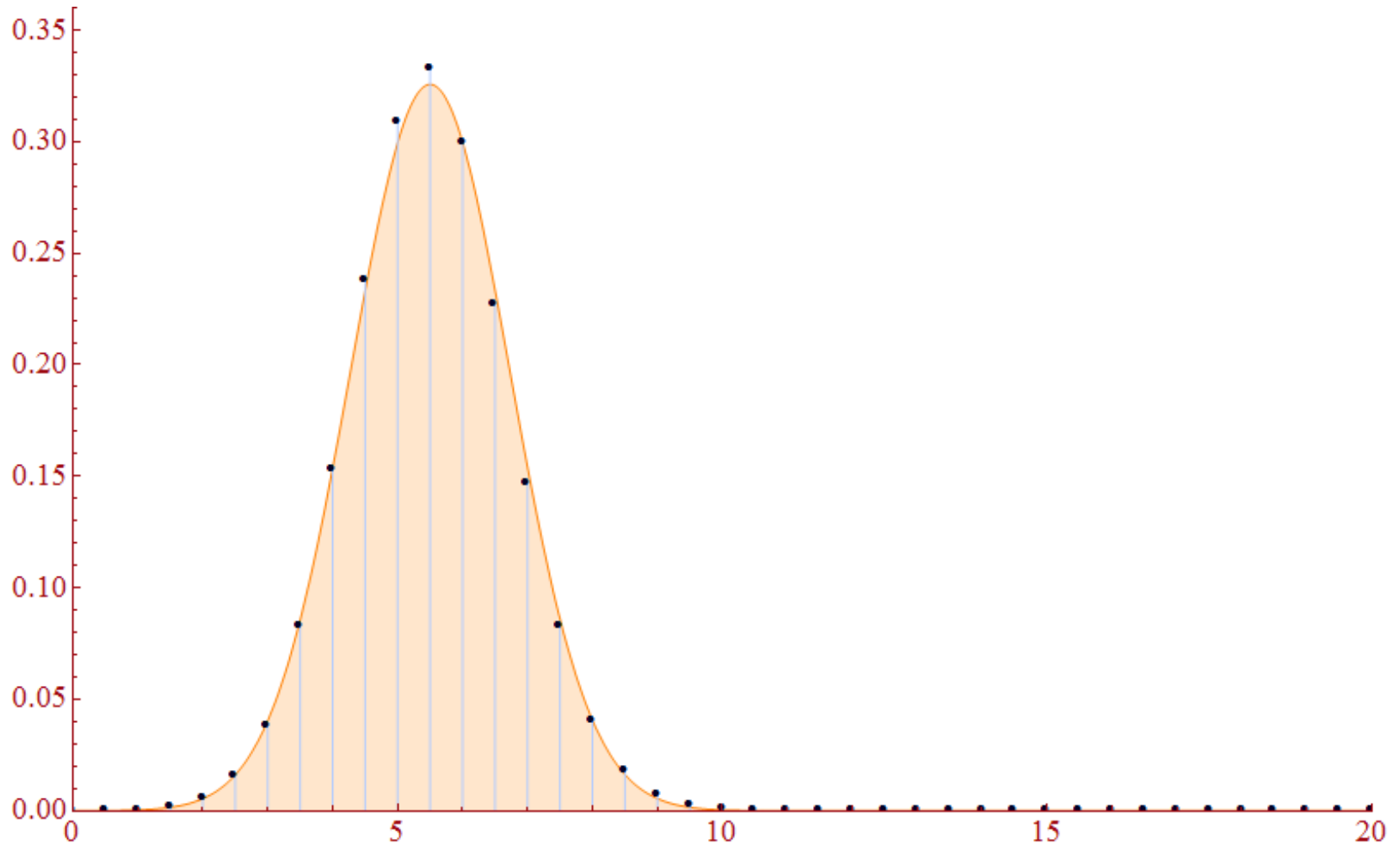
$a = 1$



4. Grafische Beispiele

$x_0 = 5 \mid t = 0,25 \mid D = 3 \mid v_d = 2 \mid L = 20$

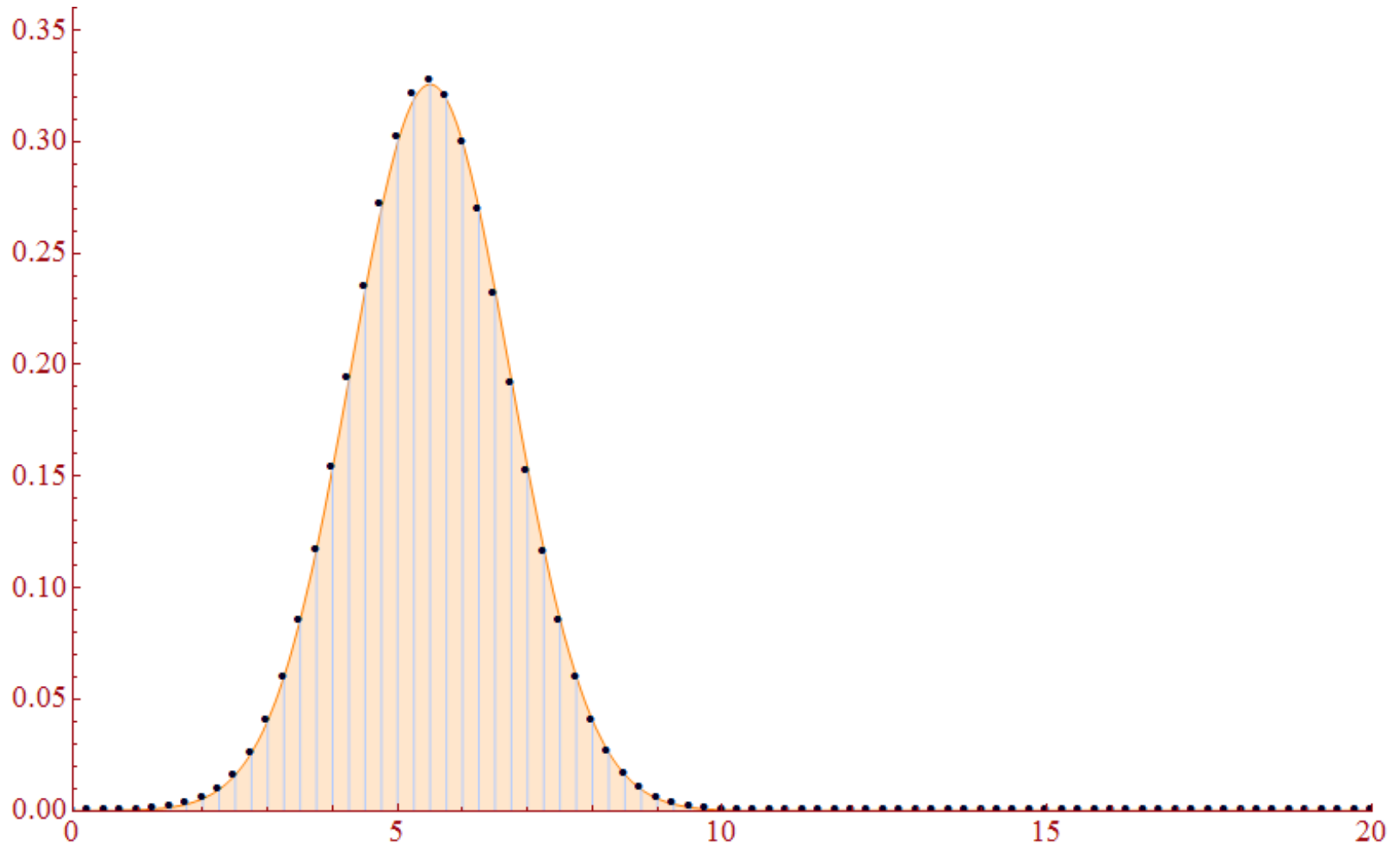
$a = 0,5$



4. Grafische Beispiele

$x_0 = 5 \mid t = 0,25 \mid D = 3 \mid v_d = 2 \mid L = 20$

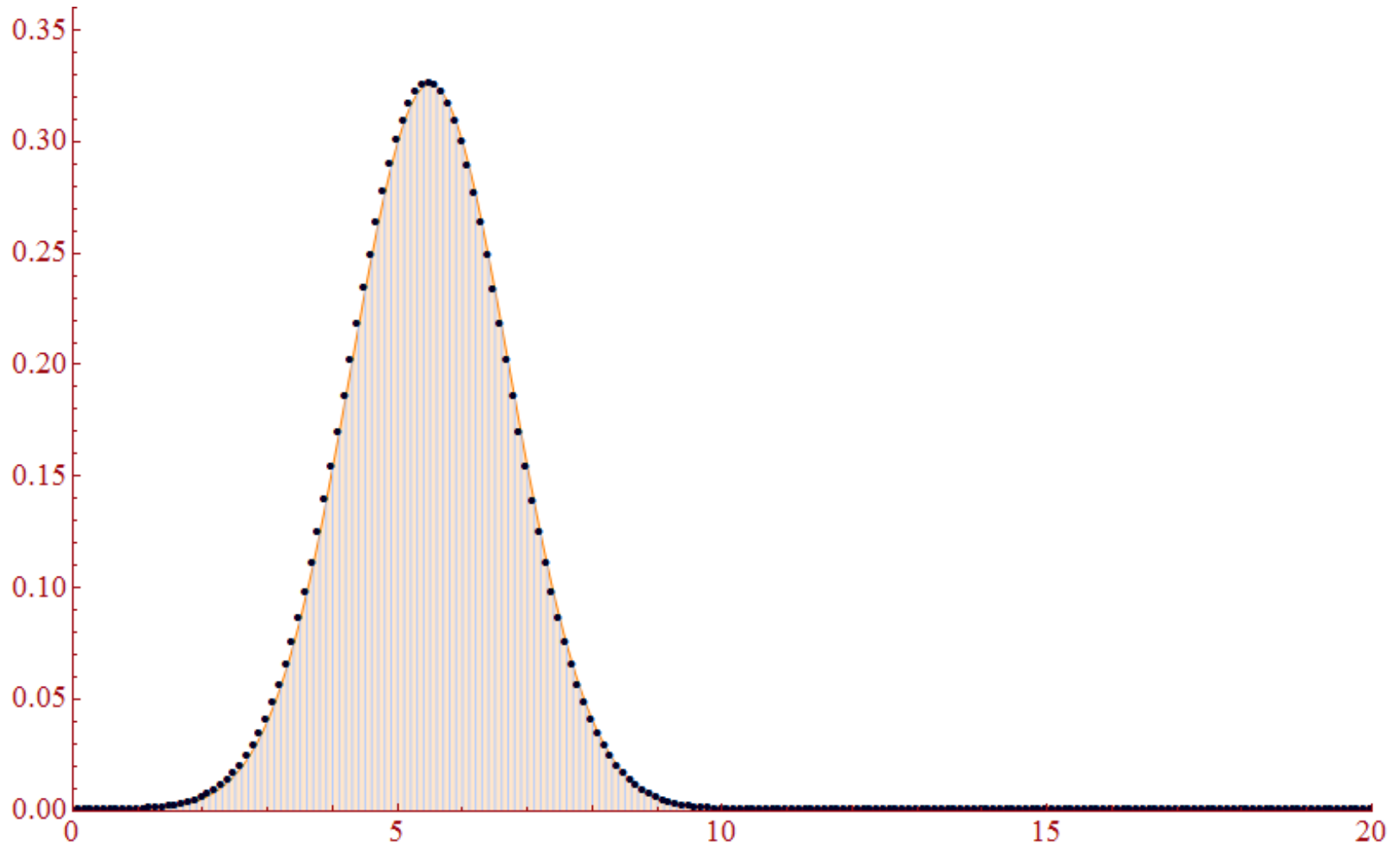
$a = 0,25$



4. Grafische Beispiele

$x_0 = 5 \mid t = 0,25 \mid D = 3 \mid v_d = 2 \mid L = 20$

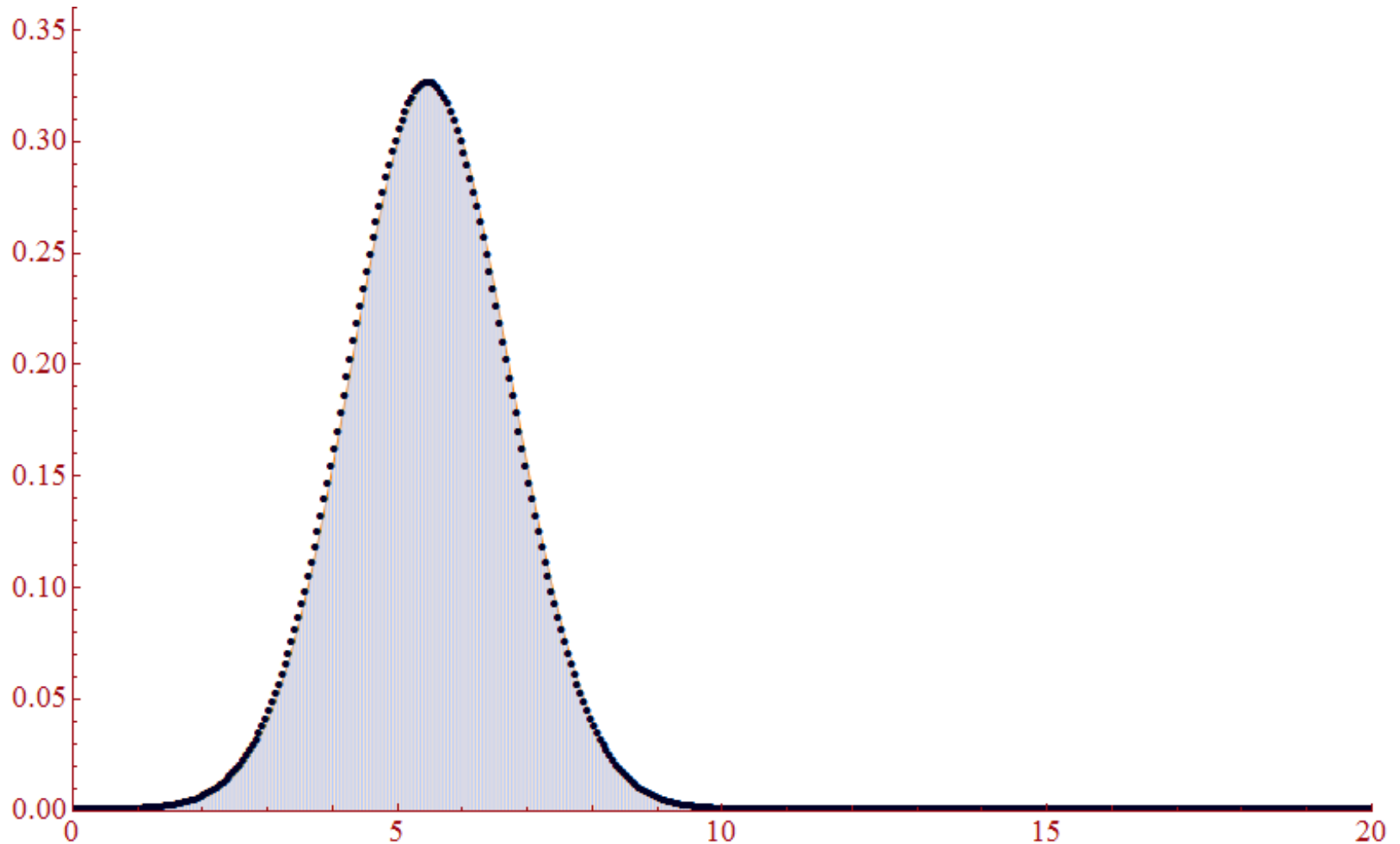
$a = 0,1$



4. Grafische Beispiele

$x_0 = 5 \mid t = 0,25 \mid D = 3 \mid v_d = 2 \mid L = 20$

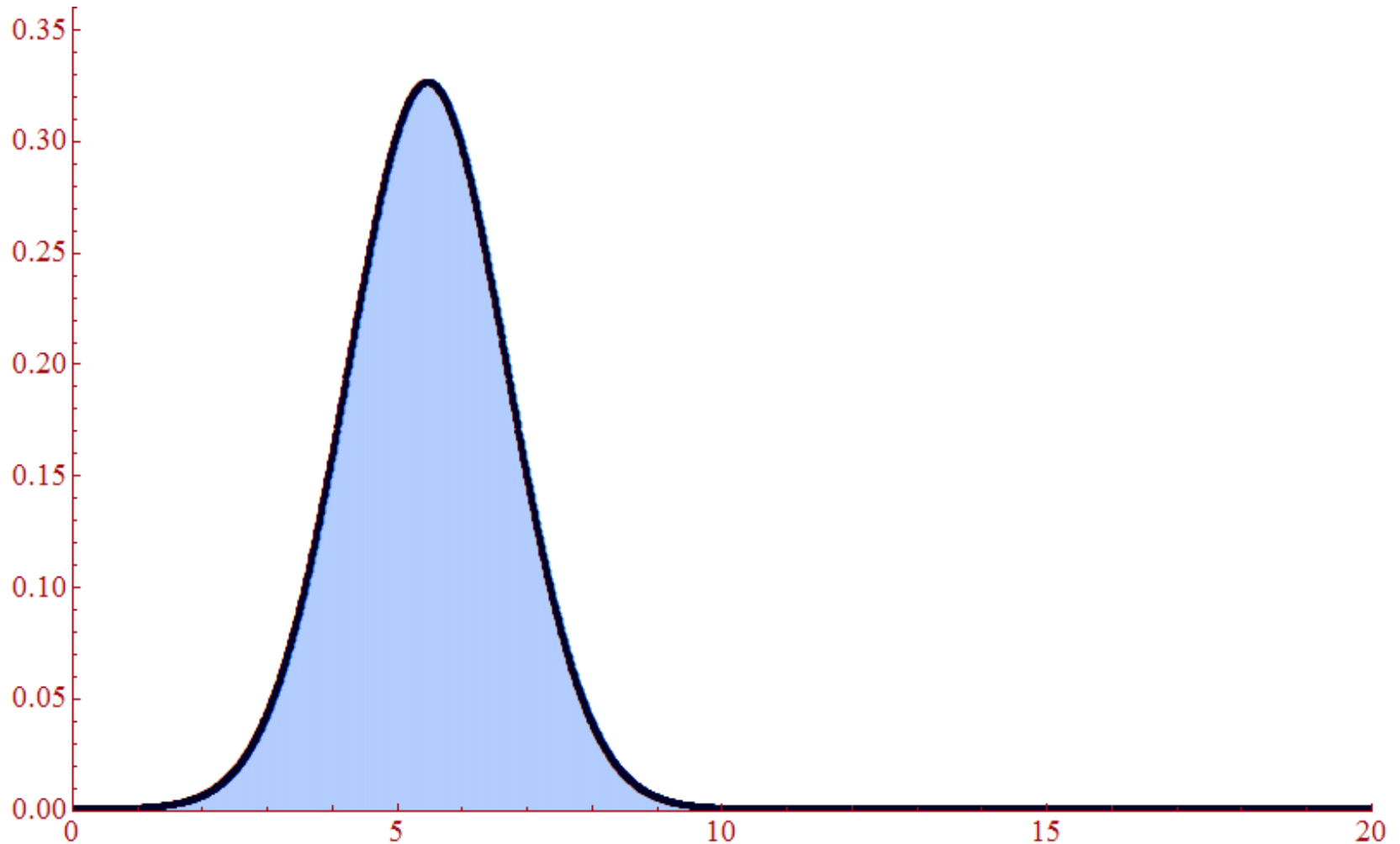
$a = 0,05$



4. Grafische Beispiele

$x_0 = 5 \mid t = 0,25 \mid D = 3 \mid v_d = 2 \mid L = 20$

$a = 0,01$



5. Kramers-Moyal-Entwicklung

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (\alpha_1(x, t)p(x, t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\alpha_2(x, t)p(x, t))$$

$$\alpha_n(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x' - x)^n W(x', x, t) dx'$$

Da W nur in für $x' = x \pm a$ nicht Null ist, vereinfachen sich die Formeln wie folgt:

$$\begin{aligned}\alpha_1(x, t) &= [(x + a) - x]W_+ + [(x - a) - x]W_- = a(W_+ - W_-) \\ \alpha_2(x, t) &= [(x + a) - x]^2W_+ + [(x - a) - x]^2W_- = a^2(W_+ + W_-)\end{aligned}$$

Eingesetzt erhält man wieder die bekannte Drift-Diffusionsgleichung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} - v_d \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} & D &= a^2 \frac{W_+ + W_-}{2} \\ & & v_d &= a(W_+ - W_-)\end{aligned}$$