Universität Rostock

Traditio et Innovatio

Der eindimensionale Zufallswanderer mit diskreten Ort & Zeit auf natürlichen Rändern

Ludwig Scheibe, 5. Semester

Erstellt im Rahmen der Vorlesung „Stochastische Prozesse in der Physik“

Universität Rostock Traditio et Innovatio

Gliederung

1. Problembeschreibung
2. Theorie
3. Übergang von statistischer Häufigkeit zu theoretischer Wahrscheinlichkeit
4. Einflüsse diverser Parameter auf die Wahrscheinlichkeitsverteilung
5. Fazit

1. Problem

- Teilchen (Wanderer) geht zufällige Trajektorie
- Pro Zeitintervall τ mit Wahrscheinlichkeit p zum Ort $x + a$ und mit Wahrscheinlichkeit q zum Ort $x - a$ (wobei $p + q = 1$)
- Weder in pos. noch in neg. Richtung existiert Beschränkung

2. Theorie

Problem durch Iterationsgleichung beschrieben:

$$P(x_m, t_n + \tau) = p * P(x_m - a, t_n) + q * P(x_m + a, t_n)$$

Übergang zu einheitenlosen Größen:

$$m = \frac{x_m}{a}$$

$$n = \frac{t_n}{\tau}$$

$$P(m, n+1) = p * P(m-1, n) + q * P(m+1, n) \qquad (1)$$

Mit Anfangsbedingung $P(m, 0) = \delta_{m,m_0}$

2. Theorie

Fouriertransformation

$$\tilde{P}(k,n) = \sum_{m=-n}^{n} P(m,n) * e^{ikm}$$

$$P(m,n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{P}(k,n) * e^{-ikm} dk$$

Ergibt die Lösung in Form einer Binomialverteilung:

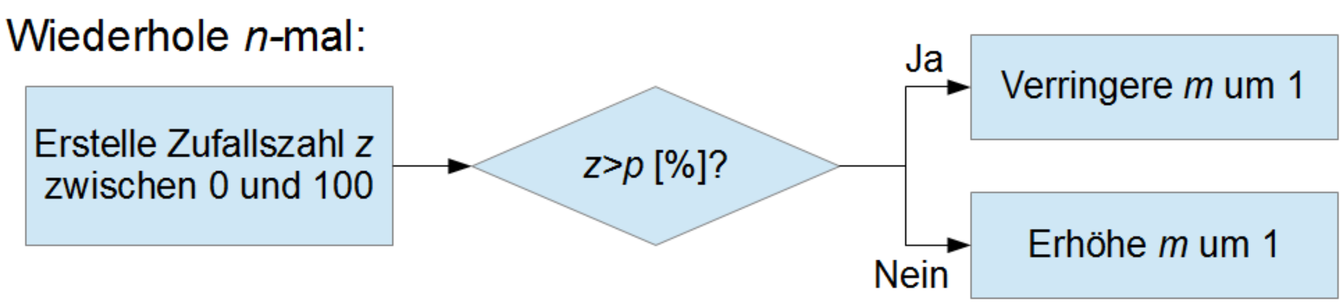
$$P(m,n) = \frac{n!}{\left(\frac{n+m}{2}\right)! * \left(\frac{n-m}{2}\right)!} * p^{\frac{n+m}{2}} * (1-p)^{\frac{n-m}{2}} \qquad (2)$$

3. Statistische Häufigkeit & theoretische Wahrscheinlichkeit

Simulation des Zufallswanderers durch ein C-Programm & Zählung der Häufigkeiten

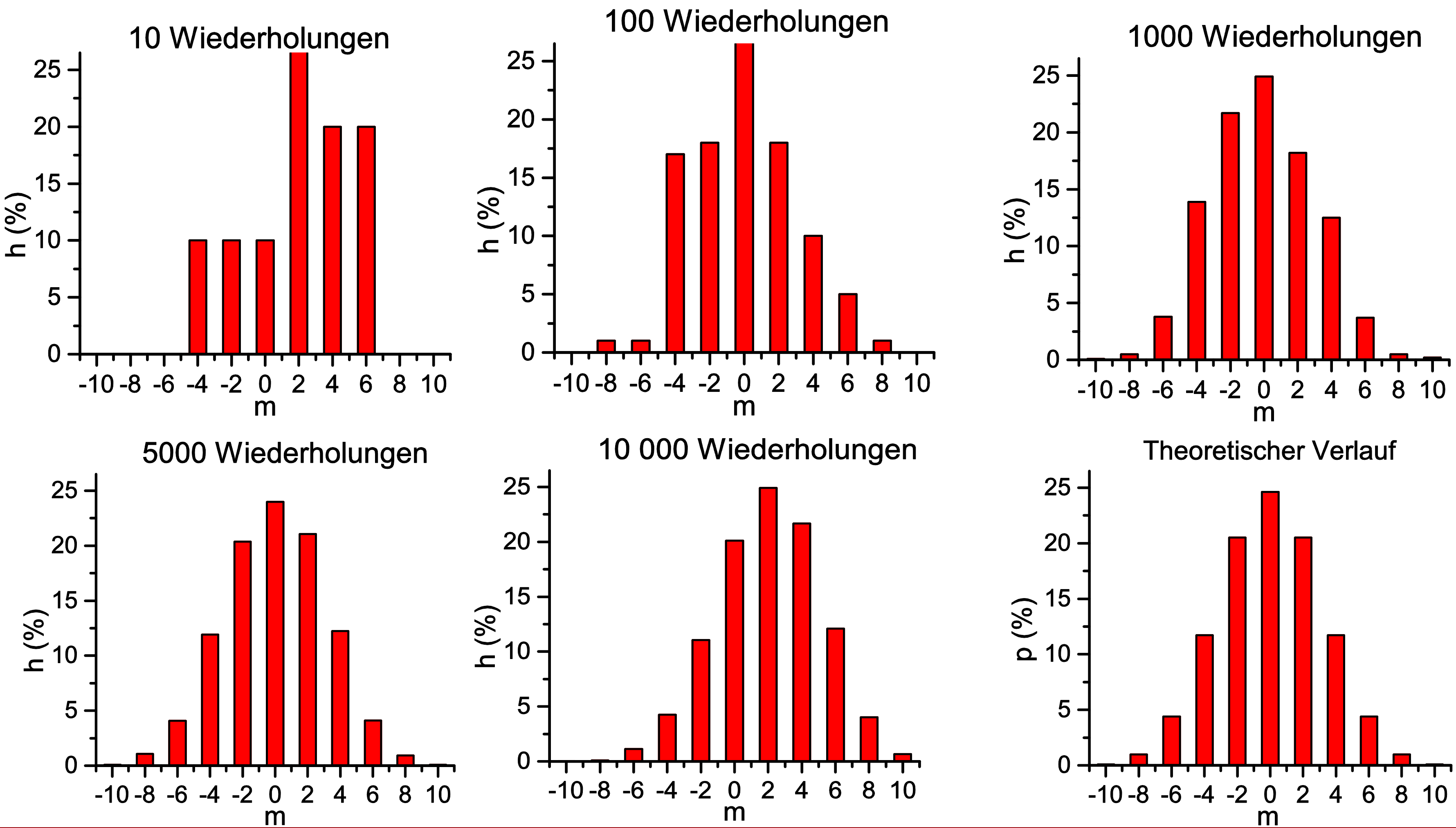
Behauptung: Verteilung der rel. Häufigkeit nähert sich theoretischer Verteilung aus (2) an

Simulation durch Funktion in C:

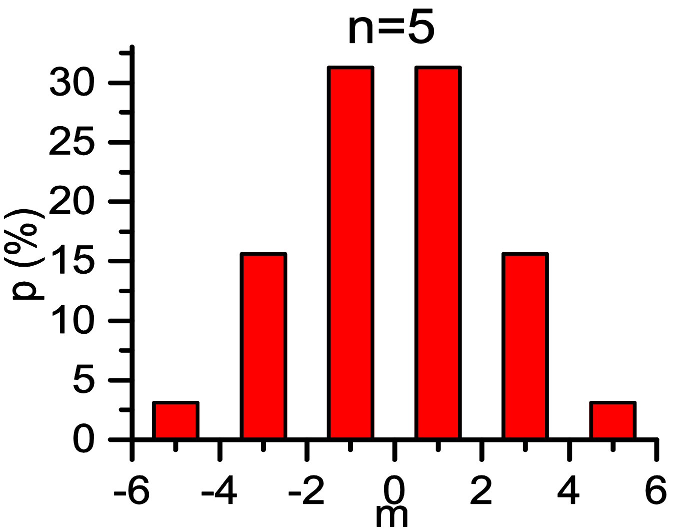


3. Statistische Häufigkeit & theoretische Wahrscheinlichkeit

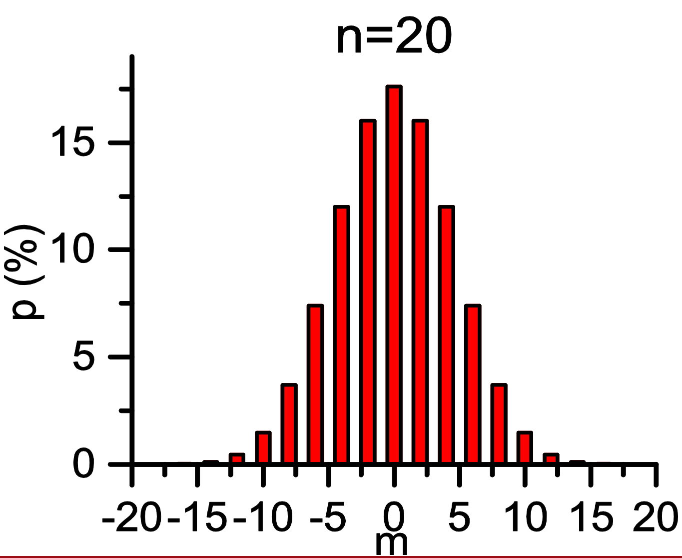
$p = 0{,}5 \quad N = 10$

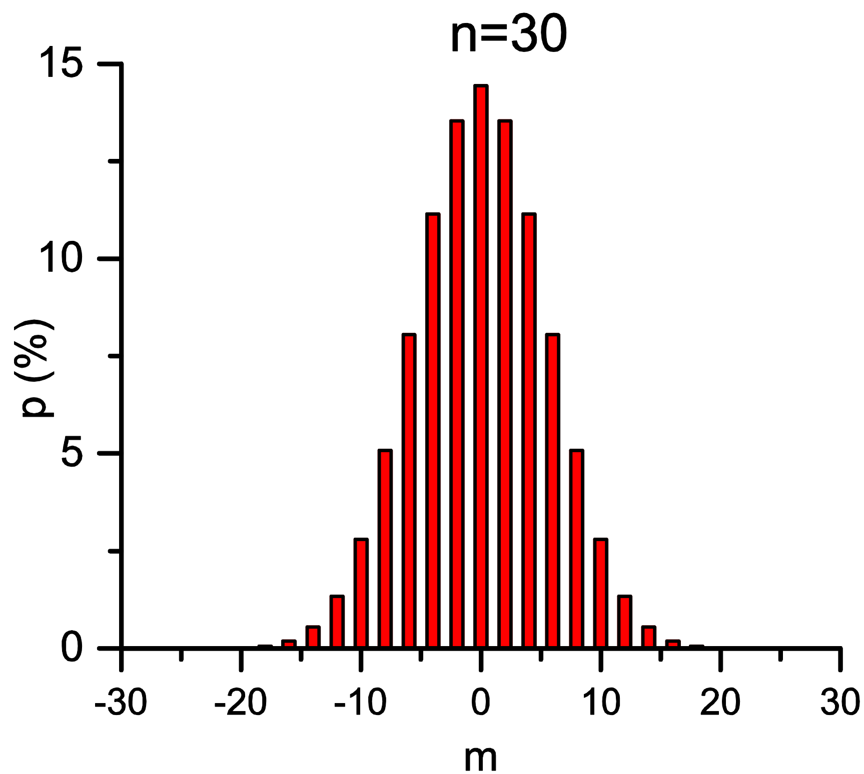


4. Einflüsse diverser Parameter auf die Wahrscheinlichkeitsverteilung



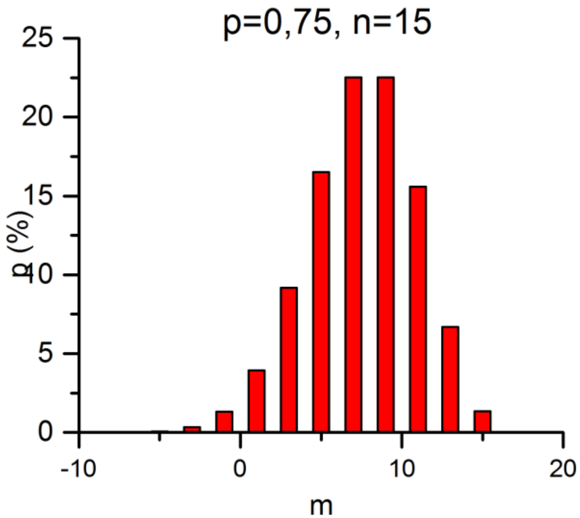
a) Anzahl der Zeitschritte *n* (*p*=0,5)

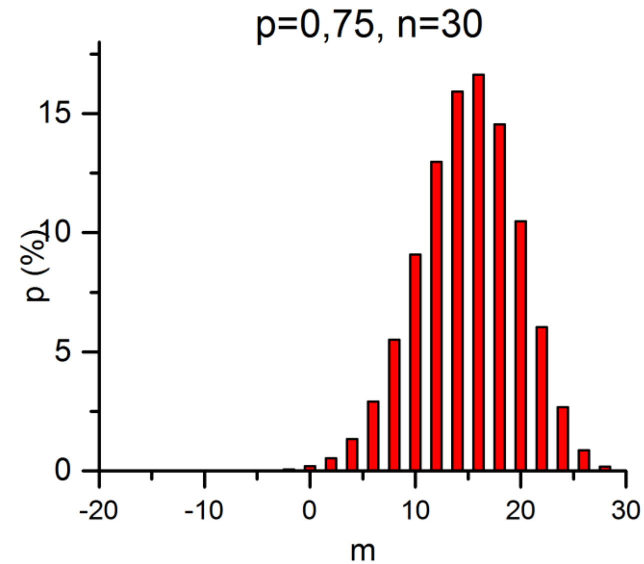


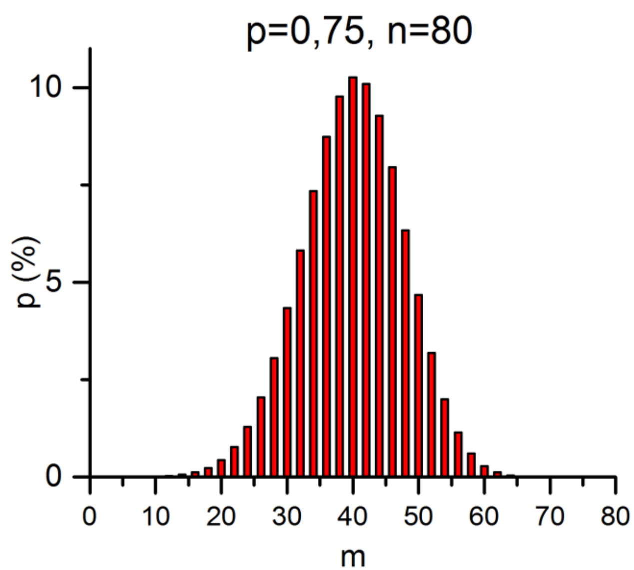


4. Einflüsse diverser Parameter auf die Wahrscheinlichkeitsverteilung

b) Asymmetrie *p* =/= 0,5







5. Fazit

- Statistische Simulation bestätigt Binominallösung
- Hohe Zahl Zeitschritte: „Breitlaufen“ der Verteilung
- Wahrscheinlichkeitsdifferenz $p - q$ entspricht deterministischer Geschwindigkeit

$$m_{max} = (p - q) * n$$