

Zufallswanderer
mit
periodischen
Randbedin-
gungen mit
diskretem Ort
und diskreter
Zeit

Nicolas
Künzel, Sören
Lobback

Aufgabe

Grundlagen

Begriffe
Mathematik

Statistische
Wahrschein-
lichkeit

Abhängigkeit von der
Zeit t

Abhängigkeit von der
Wahrscheinlichkeit p

Zufallswanderer mit periodischen Randbedingungen mit diskretem Ort und diskreter Zeit

Nicolas Künzel, Sören Lobback

12. Januar 2014

Inhaltsverzeichnis

Zufallswanderer
mit
periodischen
Randbedin-
gungen mit
diskretem Ort
und diskreter
Zeit

Nicolas
Künzel, Sören
Lobback

Aufgabe

Grundlagen

Begriffe
Mathematik

Statistische
Wahrschein-
lichkeit

Abhängigkeit von der
Zeit t

Abhängigkeit von der
Wahrscheinlichkeit p

1 Aufgabe

2 Grundlagen

- Begriffe
- Mathematik

3 Statistische Wahrscheinlichkeit

- Abhängigkeit von der Zeit t
- Abhängigkeit von der Wahrscheinlichkeit p

Aufgabe

Zufallswanderer
mit
periodischen
Randbedin-
gungen mit
diskretem Ort
und diskreter
Zeit

Nicolas
Künzel, Sören
Lobback

Aufgabe

Grundlagen

Begriffe
Mathematik

Statistische
Wahrschein-
lichkeit

Abhängigkeit von der
Zeit t

Abhängigkeit von der
Wahrscheinlichkeit p

Durchführung von Monte Carlo Simulationen für einen Zufallswanderer auf einem Ring mit der Länge L (Periodische Randbedingungen) mit diskretem Ort und diskreter Zeit.

Zufallswanderer:

- Kann nur vor oder zurück gehen, bleibt nicht am Ort
- Geht mit Wahrscheinlichkeit p vorwärts und mit q rückwärts ($p + q = 1$)

Periodische Randbedingungen:

- Zufallswanderer gelangt vom Ort bei Länge L wieder zum Startpunkt x_0

Grundlagen: Mathematik

Zufallswanderer
mit
periodischen
Randbedin-
gungen mit
diskretem Ort
und diskreter
Zeit

Nicolas
Künzel, Sören
Lobback

Aufgabe

Grundlagen

Begriffe

Mathematik

Statistische
Wahrschein-
lichkeit

Abhängigkeit von der
Zeit t

Abhängigkeit von der
Wahrscheinlichkeit p

Die Grundgleichung (Markov-Kette) des asymmetrischen Zufallswanderers mit diskretem Ort und diskreter Zeit lautet:

$$P(x_m, t_n + \tau) = p \cdot P(x_m - a, t_n) + q \cdot P(x_m + a, t_n)$$

mit

$$x_m = am \quad , \quad (m = 0, 1, \dots, M - 1)$$

$$t_n = \tau n \quad , \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Grundlagen: Mathematik

Zufallswanderer
mit
periodischen
Randbedin-
gungen mit
diskretem Ort
und diskreter
Zeit

Nicolas
Künzel, Sören
Lobback

Aufgabe

Grundlagen

Begriffe
Mathematik

Statistische
Wahrschein-
lichkeit

Abhängigkeit von der
Zeit t

Abhängigkeit von der
Wahrscheinlichkeit p

Randbedingungen:

$$x_M = aM = L$$

$$P(x_m, t_n) = P(x_m + L, t_n)$$

Startbedingung:

$$P(x_m, t_0 = 0) = \delta_{x_m, x_0}$$

Lösung

$$P(x_m, t_n) = \frac{1}{M} \sum_k e^{-\lambda'_k t_n} [\cos(\lambda''_k t_n) \cos(k(x_m - x_0)) \\ + \sin(\lambda''_k t_n) \sin(k(x_m - x_0))]$$

mit

$$\lambda'_k = -\frac{1}{\tau} \ln \left(\sqrt{\cos^2(ka) + \Delta^2 \sin^2(ka)} \right)$$

$$\lambda''_k = \frac{1}{\tau} \arctan(\Delta \tan(ka))$$

$$\Delta = p - q$$

Grundlagen: Mathematik

Zufallswanderer
mit
periodischen
Randbedin-
gungen mit
diskretem Ort
und diskreter
Zeit

Nicolas
Künzel, Sören
Lobback

Aufgabe

Grundlagen

Begriffe
Mathematik

Statistische
Wahrschein-
lichkeit

Abhängigkeit von der
Zeit t

Abhängigkeit von der
Wahrscheinlichkeit p

Ersetzen von $x_m = am$, $k = 2\pi l/L$

$$P(m, n) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} e^s \left[\cos(t) \cos\left(\frac{2\pi l}{M}(m - m_0)\right) + \sin(t) \sin\left(\frac{2\pi l}{M}(m - m_0)\right) \right]$$

mit

$$s = -\lambda'_k t_n = \ln \left(\sqrt{\cos^2\left(\frac{2\pi l}{M}\right) + \Delta^2 \sin^2\left(\frac{2\pi l}{M}\right)} \right) \cdot n$$

$$t = \lambda''_k t_n = \arctan \left(\Delta \tan\left(\frac{2\pi l}{M}\right) \right) \cdot n$$

Länge $l = 10a$; $p = 0,5$

Zufallswanderer
mit
periodischen
Randbedin-
gungen mit
diskretem Ort
und diskreter
Zeit

Nicolas
Künzel, Sören
Lobback

Aufgabe

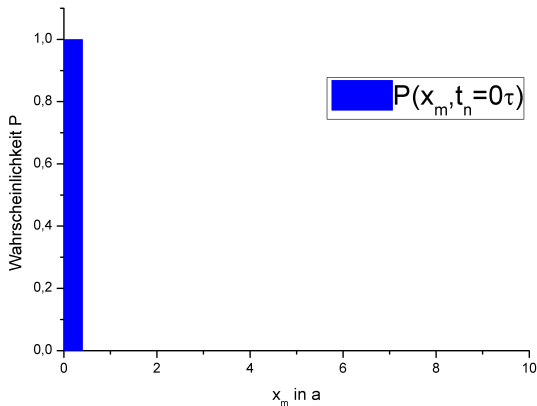
Grundlagen

Begriffe
Mathematik

Statistische
Wahrschein-
lichkeit

Abhängigkeit von der
Zeit t

Abhängigkeit von der
Wahrscheinlichkeit p



Zeit: $t_n = 0\tau$

Länge $l = 10a$; $p = 0,5$

Zufallswanderer
mit
periodischen
Randbedin-
gungen mit
diskretem Ort
und diskreter
Zeit

Nicolas
Künzel, Sören
Lobback

Aufgabe

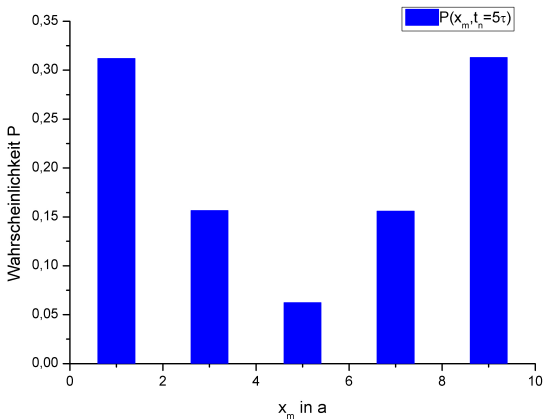
Grundlagen

Begriffe
Mathematik

Statistische
Wahrschein-
lichkeit

Abhängigkeit von der
Zeit t

Abhängigkeit von der
Wahrscheinlichkeit p



Zeit: $t_n = 5\tau$

Länge $l = 10a$; $p = 0,5$

Zufallswanderer
mit
periodischen
Randbedin-
gungen mit
diskretem Ort
und diskreter
Zeit

Nicolas
Künzel, Sören
Lobback

Aufgabe

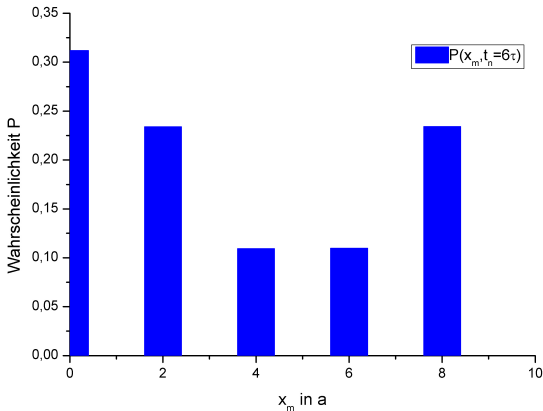
Grundlagen

Begriffe
Mathematik

Statistische
Wahrschein-
lichkeit

Abhängigkeit von der
Zeit t

Abhängigkeit von der
Wahrscheinlichkeit p



Zeit: $t_n = 6\tau$

Länge $l = 10a$; $p = 0,5$

Zufallswanderer
mit
periodischen
Randbedin-
gungen mit
diskretem Ort
und diskreter
Zeit

Nicolas
Künzel, Sören
Lobback

Aufgabe

Grundlagen

Begriffe
Mathematik

Statistische
Wahrschein-
lichkeit

Abhängigkeit von der
Zeit t

Abhängigkeit von der
Wahrscheinlichkeit p

0

Länge $l = 10a$; $p = 0,5$

Zufallswanderer
mit
periodischen
Randbedin-
gungen mit
diskretem Ort
und diskreter
Zeit

Nicolas
Künzel, Sören
Lobback

Aufgabe

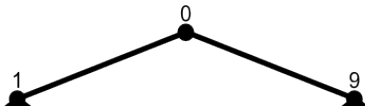
Grundlagen

Begriffe
Mathematik

Statistische
Wahrschein-
lichkeit

Abhängigkeit von der
Zeit t

Abhängigkeit von der
Wahrscheinlichkeit p



Länge $l = 10a$; $p = 0,5$

Zufallswanderer
mit
periodischen
Randbedin-
gungen mit
diskretem Ort
und diskreter
Zeit

Nicolas
Künzel, Sören
Lobback

Aufgabe

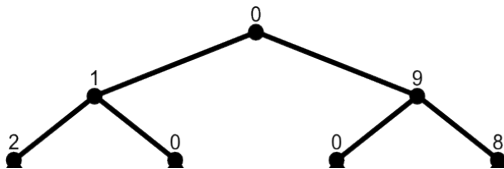
Grundlagen

Begriffe
Mathematik

Statistische
Wahrschein-
lichkeit

Abhängigkeit von der
Zeit t

Abhängigkeit von der
Wahrscheinlichkeit p



Länge $l = 10a$; $p = 0,5$

Zufallswanderer
mit
periodischen
Randbedin-
gungen mit
diskretem Ort
und diskreter
Zeit

Nicolas
Künzel, Sören
Lobback

Aufgabe

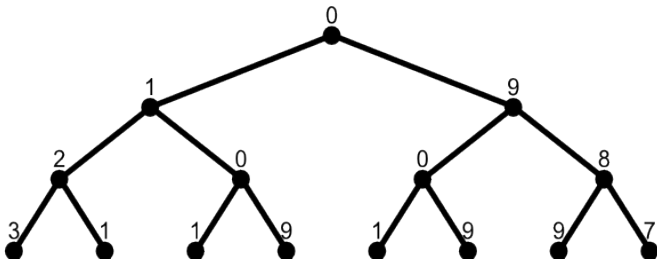
Grundlagen

Begriffe
Mathematik

Statistische
Wahrschein-
lichkeit

Abhängigkeit von der
Zeit t

Abhängigkeit von der
Wahrscheinlichkeit p



Länge $l = 10a$; $p = 0,5$

Zufallswanderer
mit
periodischen
Randbedin-
gungen mit
diskretem Ort
und diskreter
Zeit

Nicolas
Künzel, Sören
Lobback

Aufgabe

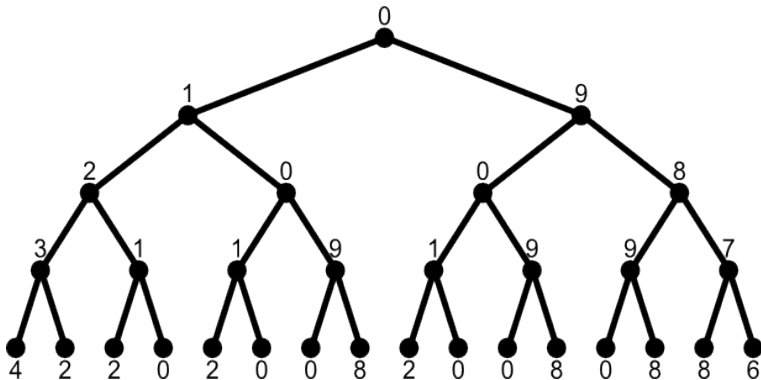
Grundlagen

Begriffe
Mathematik

Statistische
Wahrschein-
lichkeit

Abhängigkeit von der
Zeit t

Abhängigkeit von der
Wahrscheinlichkeit p



Länge $l = 10a$; $p = 0,5$

Zufallswanderer
mit
periodischen
Randbedin-
gungen mit
diskretem Ort
und diskreter
Zeit

Nicolas
Künzel, Sören
Lobback

Aufgabe

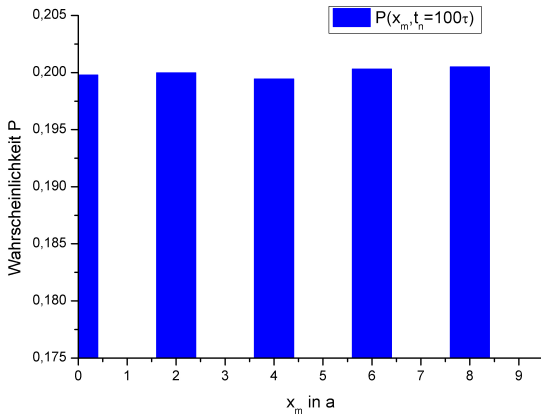
Grundlagen

Begriffe
Mathematik

Statistische
Wahrschein-
lichkeit

Abhängigkeit von der
Zeit t

Abhängigkeit von der
Wahrscheinlichkeit p



Zeit: $t_n = 100\tau$

Länge $l = 10a$; $p = 0,5$

Zufallswanderer
mit
periodischen
Randbedin-
gungen mit
diskretem Ort
und diskreter
Zeit

Nicolas
Künzel, Sören
Lobback

Aufgabe

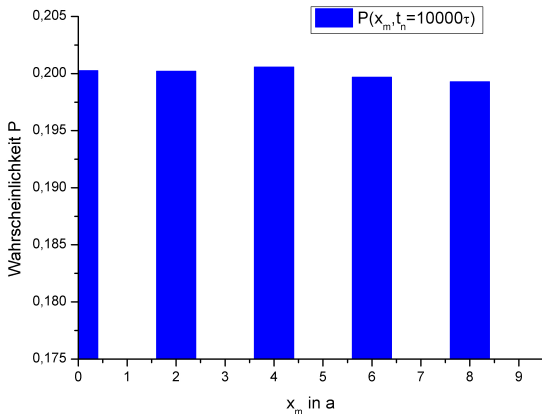
Grundlagen

Begriffe
Mathematik

Statistische
Wahrschein-
lichkeit

Abhängigkeit von der
Zeit t

Abhängigkeit von der
Wahrscheinlichkeit p



Zeit: $t_n = 10000\tau$

Länge $l = 100a$; $p = 0,5$

Zufallswanderer
mit
periodischen
Randbedin-
gungen mit
diskretem Ort
und diskreter
Zeit

Nicolas
Künzel, Sören
Lobback

Aufgabe

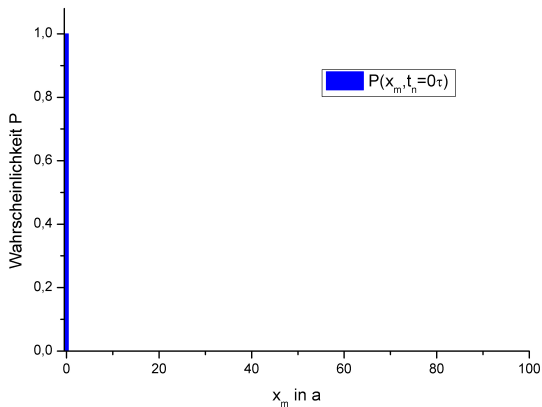
Grundlagen

Begriffe
Mathematik

Statistische
Wahrschein-
lichkeit

Abhängigkeit von der
Zeit t

Abhängigkeit von der
Wahrscheinlichkeit p



Zeit: $t_n = 0\tau$

Länge $l = 100a$; $p = 0,5$

Zufallswanderer
mit
periodischen
Randbedin-
gungen mit
diskretem Ort
und diskreter
Zeit

Nicolas
Künzel, Sören
Lobback

Aufgabe

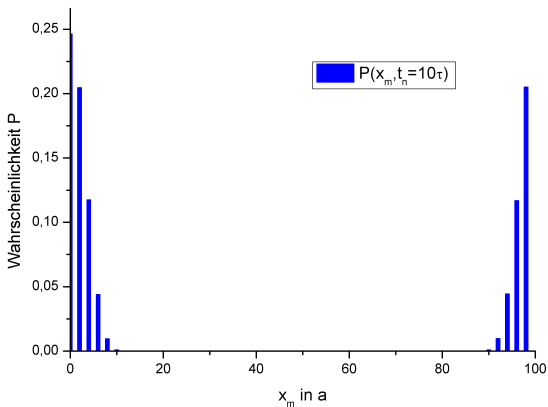
Grundlagen

Begriffe
Mathematik

Statistische
Wahrschein-
lichkeit

Abhängigkeit von der
Zeit t

Abhängigkeit von der
Wahrscheinlichkeit p



Zeit: $t_n = 10\tau$

Länge $l = 100a$; $p = 0,5$

Zufallswanderer
mit
periodischen
Randbedin-
gungen mit
diskretem Ort
und diskreter
Zeit

Nicolas
Künzel, Sören
Lobback

Aufgabe

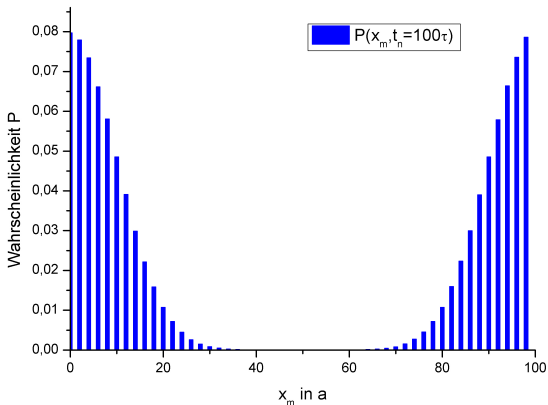
Grundlagen

Begriffe
Mathematik

Statistische
Wahrschein-
lichkeit

Abhängigkeit von der
Zeit t

Abhängigkeit von der
Wahrscheinlichkeit p



Zeit: $t_n = 100\tau$

Länge $l = 100a$; $p = 0,5$

Zufallswanderer
mit
periodischen
Randbedin-
gungen mit
diskretem Ort
und diskreter
Zeit

Nicolas
Künzel, Sören
Lobback

Aufgabe

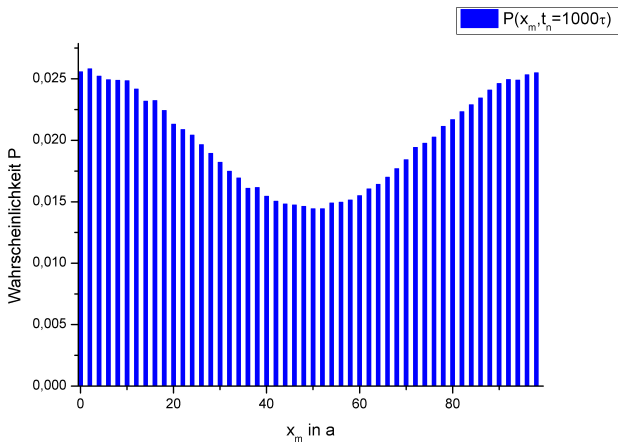
Grundlagen

Begriffe
Mathematik

Statistische
Wahrschein-
lichkeit

Abhängigkeit von der
Zeit t

Abhängigkeit von der
Wahrscheinlichkeit p



Zeit: $t_n = 1000\tau$

Länge $l = 10a$; $t = 5\tau$

Zufallswanderer
mit
periodischen
Randbedin-
gungen mit
diskretem Ort
und diskreter
Zeit

Nicolas
Künzel, Sören
Lobback

Aufgabe

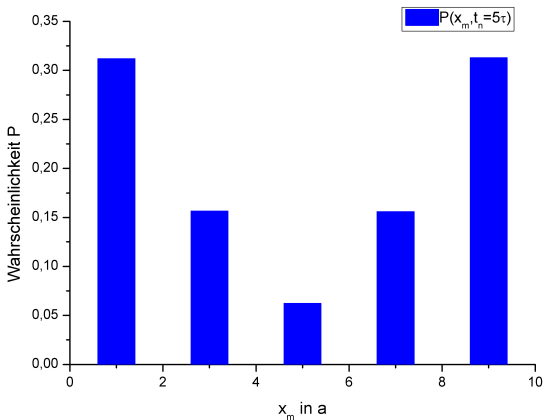
Grundlagen

Begriffe
Mathematik

Statistische
Wahrschein-
lichkeit

Abhängigkeit von der
Zeit t

Abhängigkeit von der
Wahrscheinlichkeit p



$p = 0,5$

Länge $l = 10a$; $t = 5\tau$

Zufallswanderer
mit
periodischen
Randbedin-
gungen mit
diskretem Ort
und diskreter
Zeit

Nicolas
Künzel, Sören
Lobback

Aufgabe

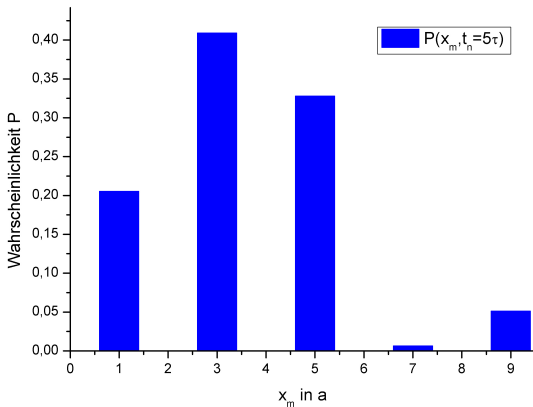
Grundlagen

Begriffe
Mathematik

Statistische
Wahrschein-
lichkeit

Abhängigkeit von der
Zeit t

Abhängigkeit von der
Wahrscheinlichkeit p



$p = 0,8$

Länge $l = 10a$; $t = 100\tau$

Zufallswanderer
mit
periodischen
Randbedin-
gungen mit
diskretem Ort
und diskreter
Zeit

Nicolas
Künzel, Sören
Lobback

Aufgabe

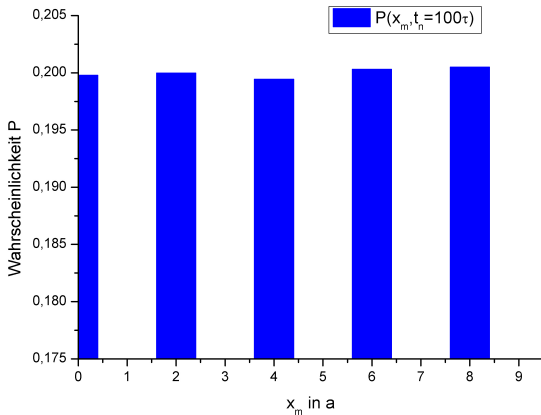
Grundlagen

Begriffe
Mathematik

Statistische
Wahrschein-
lichkeit

Abhängigkeit von der
Zeit t

Abhängigkeit von der
Wahrscheinlichkeit p



$p = 0,5$

Länge $l = 10a$; $t = 100\tau$

Zufallswanderer
mit
periodischen
Randbedin-
gungen mit
diskretem Ort
und diskreter
Zeit

Nicolas
Künzel, Sören
Lobback

Aufgabe

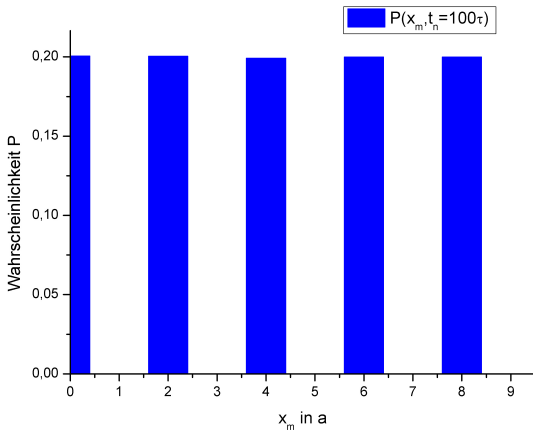
Grundlagen

Begriffe
Mathematik

Statistische
Wahrschein-
lichkeit

Abhängigkeit von der
Zeit t

Abhängigkeit von der
Wahrscheinlichkeit p



$$p = 0,8$$

Länge $l = 100a$; $t = 10\tau$

Zufallswanderer
mit
periodischen
Randbedin-
gungen mit
diskretem Ort
und diskreter
Zeit

Nicolas
Künzel, Sören
Lobback

Aufgabe

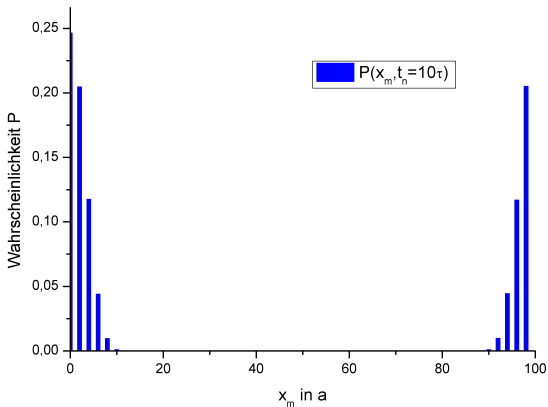
Grundlagen

Begriffe
Mathematik

Statistische
Wahrschein-
lichkeit

Abhängigkeit von der
Zeit t

Abhängigkeit von der
Wahrscheinlichkeit p



$p = 0,5$

Länge $l = 100a$; $t = 10\tau$

Zufallswanderer
mit
periodischen
Randbedin-
gungen mit
diskretem Ort
und diskreter
Zeit

Nicolas
Künzel, Sören
Lobback

Aufgabe

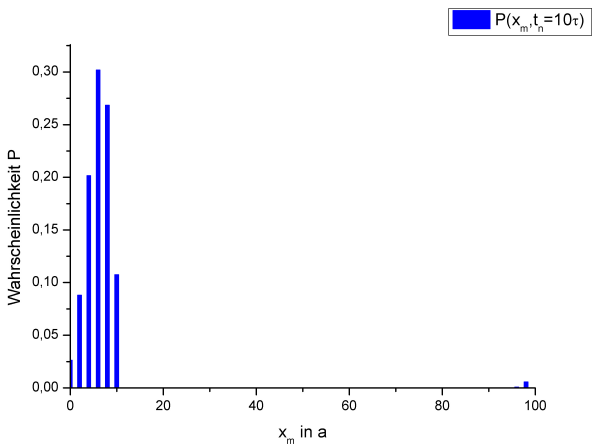
Grundlagen

Begriffe
Mathematik

Statistische
Wahrschein-
lichkeit

Abhängigkeit von der
Zeit t

Abhängigkeit von der
Wahrscheinlichkeit p



$$p = 0,8$$