

Random walk on a ring with continuous position and time
Björn Kruse, Philipp Henning



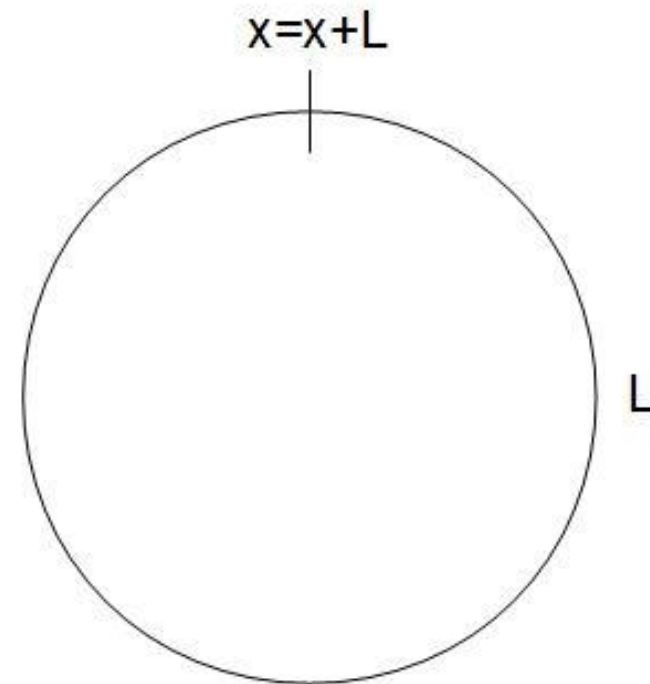
1. Problemstellung
2. Numerische Lösung
3. Analytische Lösung
4. Vergleich

Problemstellung

- Zufallswanderer mit kontinuierlicher Zeit und kontinuierlichem Ort
- Fokker-Planck-Gleichung:

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} - v_d \cdot \frac{\partial p(x, t)}{\partial x}$$

- Periodische Randbedingungen:
- Ring der Länge L
- $p(x+L)=p(x)$



Numerische Lösung

Angewendetes Verfahren: Methode der finiten Differenzen

Fokker-Planck-Gleichung:

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} - v_d \cdot \frac{\partial p(x, t)}{\partial x}$$

Mit Differenzenquotienten:

$$\frac{p(x, t + \tau) - p(x, t)}{\tau} = D \cdot \frac{p(x - h, t) - 2p(x, t) + p(x + h, t)}{h^2} - v_d \cdot \frac{p(x + h, t) - p(x, t)}{h}$$

Übergang zu Indizes:

$$x \pm h \rightarrow k + 1$$

$$t \pm \tau \rightarrow n + 1$$

$$p_{k,n+1} = \frac{D\tau}{h^2} \cdot (p_{k-1,n} - 2p_{k,n} + p_{k+1,n}) - \frac{v_d\tau}{h} \cdot (p_{k+1,n} - p_{k,n}) + p_{k,n}$$

mit: $p_{k+\frac{L}{h},n} = p_{k,n}$ bzw. $p_{k,n} = p_{k-\frac{L}{h},n}$

$$p_{k,n+1} = \frac{D\tau}{h^2} \cdot (p_{k-1,n} - 2p_{k,n} + p_{k+1,n}) - \frac{v_d\tau}{h} \cdot (p_{k+1,n} - p_{k,n}) + p_{k,n}$$

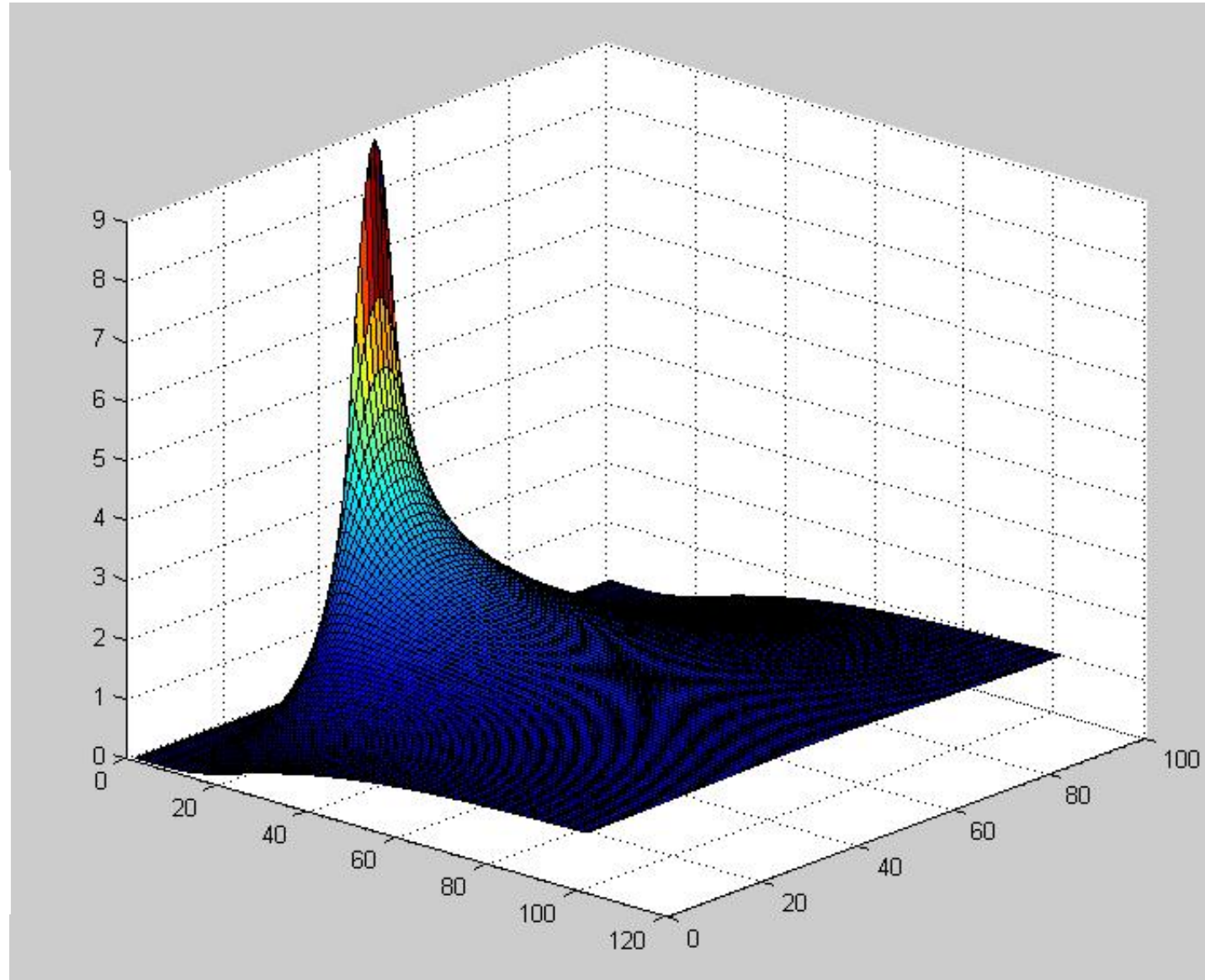
Mit

$$p_n = \begin{pmatrix} p_{1,n} \\ p_{2,n} \\ \vdots \\ p_{\frac{L}{h},n} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

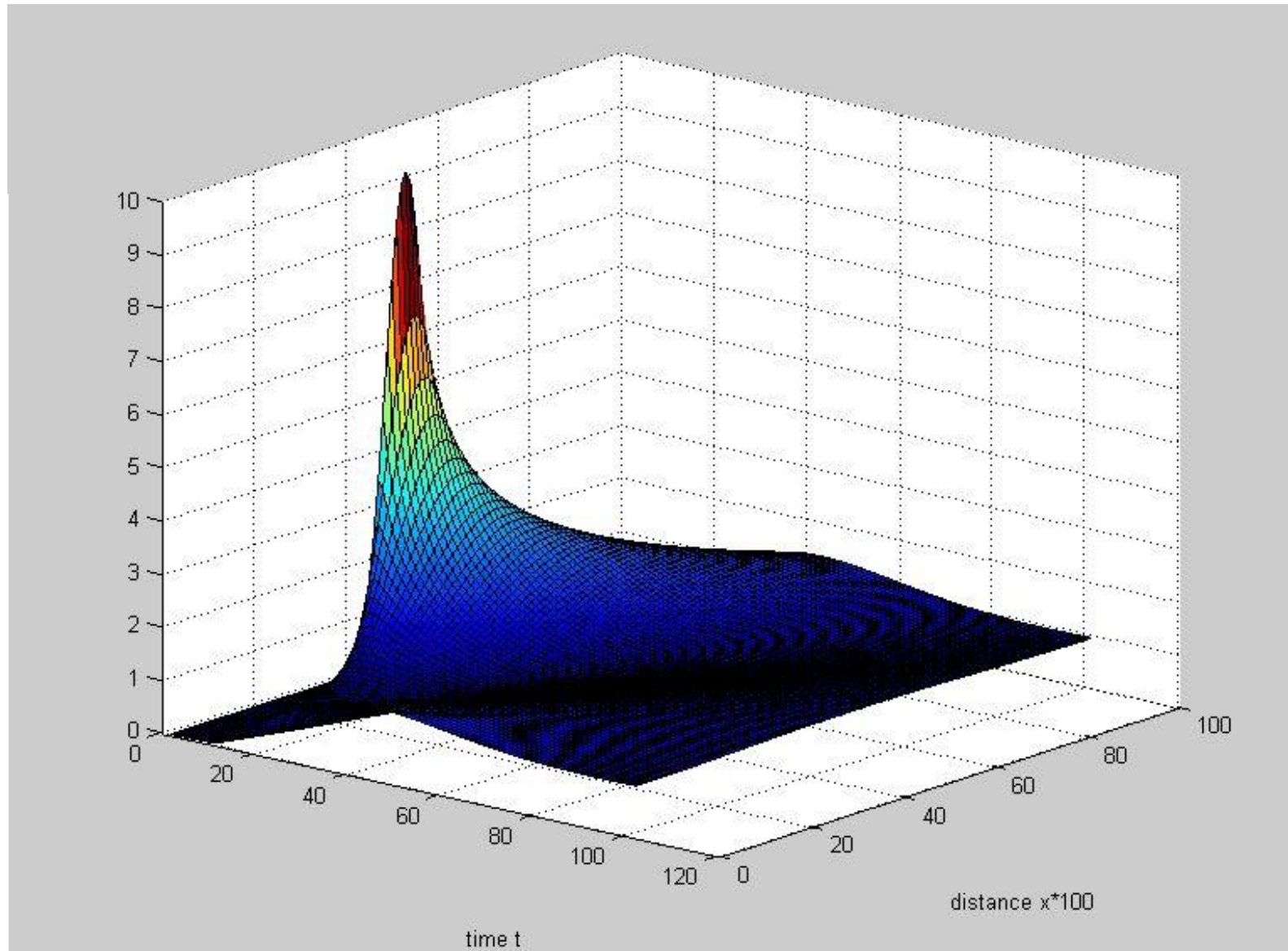
Eraibt sich folgende Iteration in Matrixschreibweise:

$$p_{n+1} = \frac{D\tau}{h^2} \cdot C \cdot p_n - \frac{v\tau}{h} R \cdot p_n + p_n$$

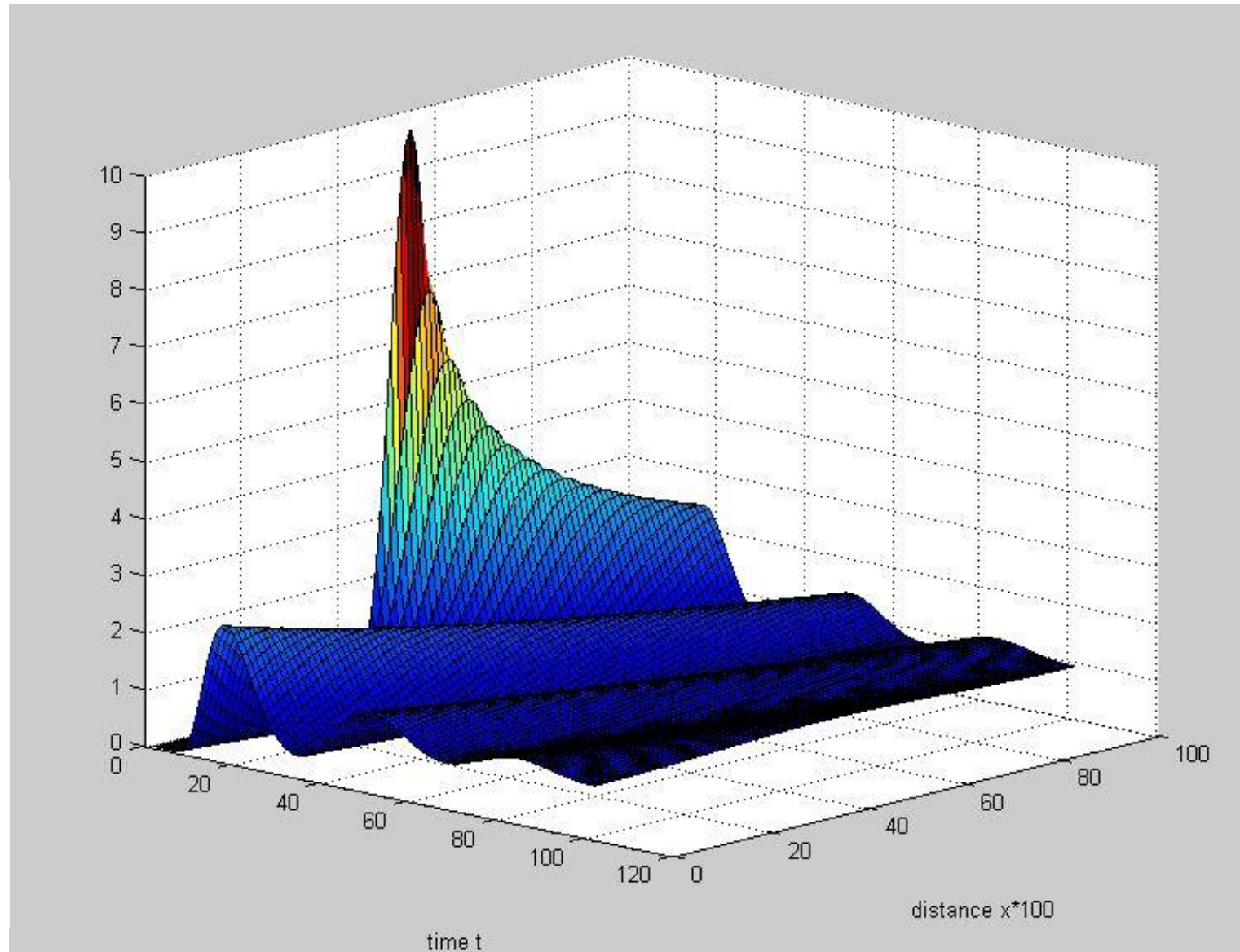
$V=0$
 $D=0,002$



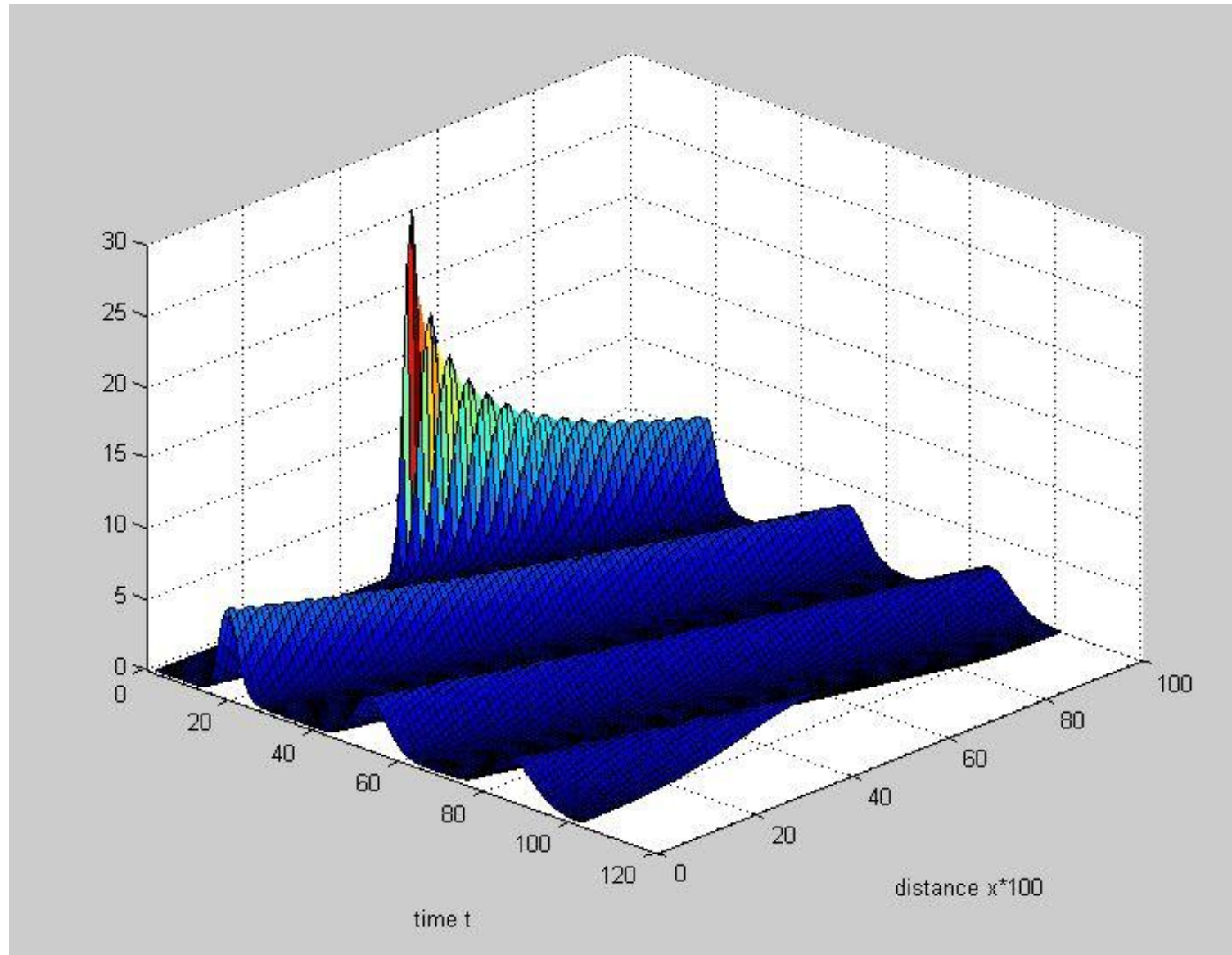
$V=0,01$
 $D=0,001$



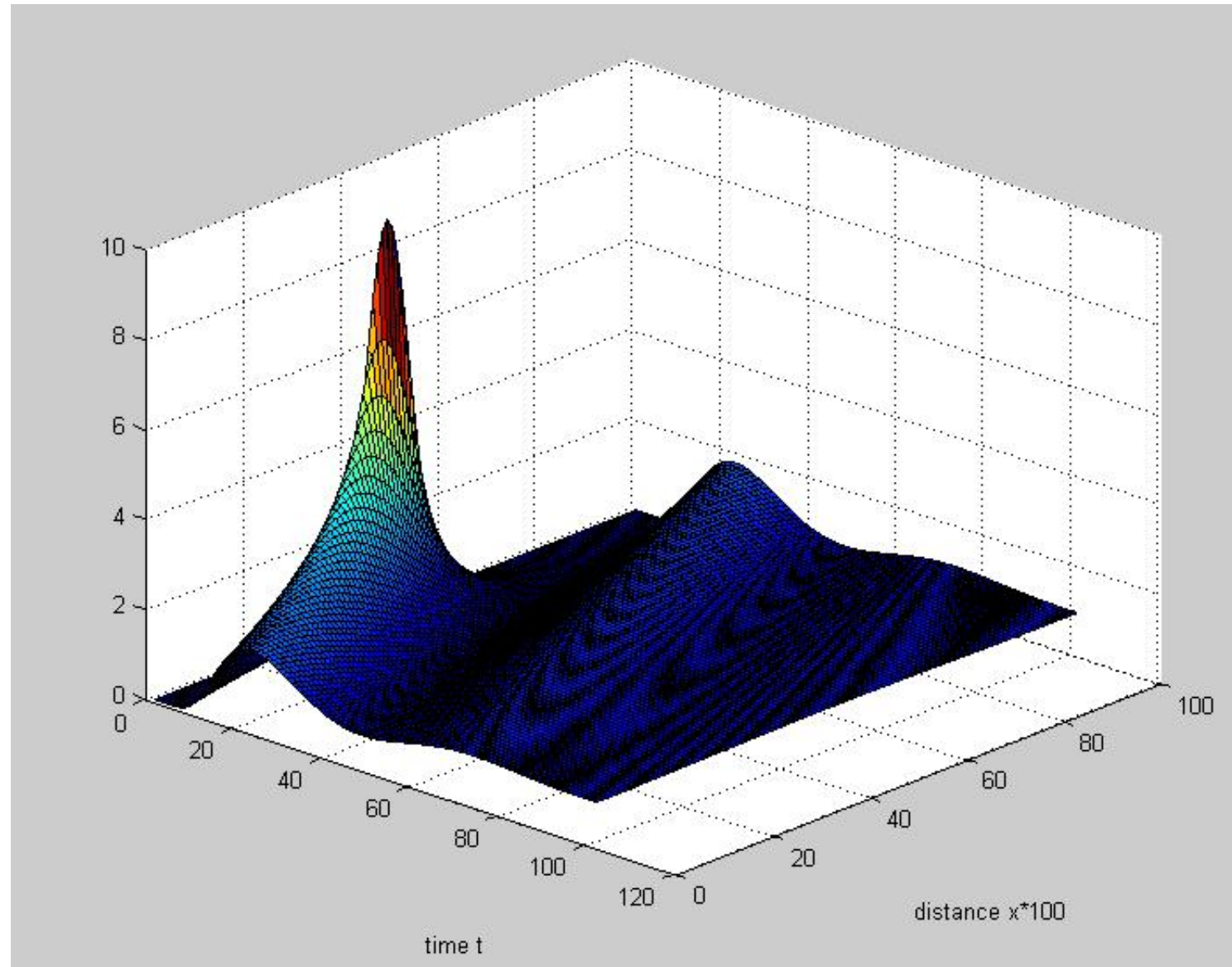
$V=0,03$
 $D=0,001$



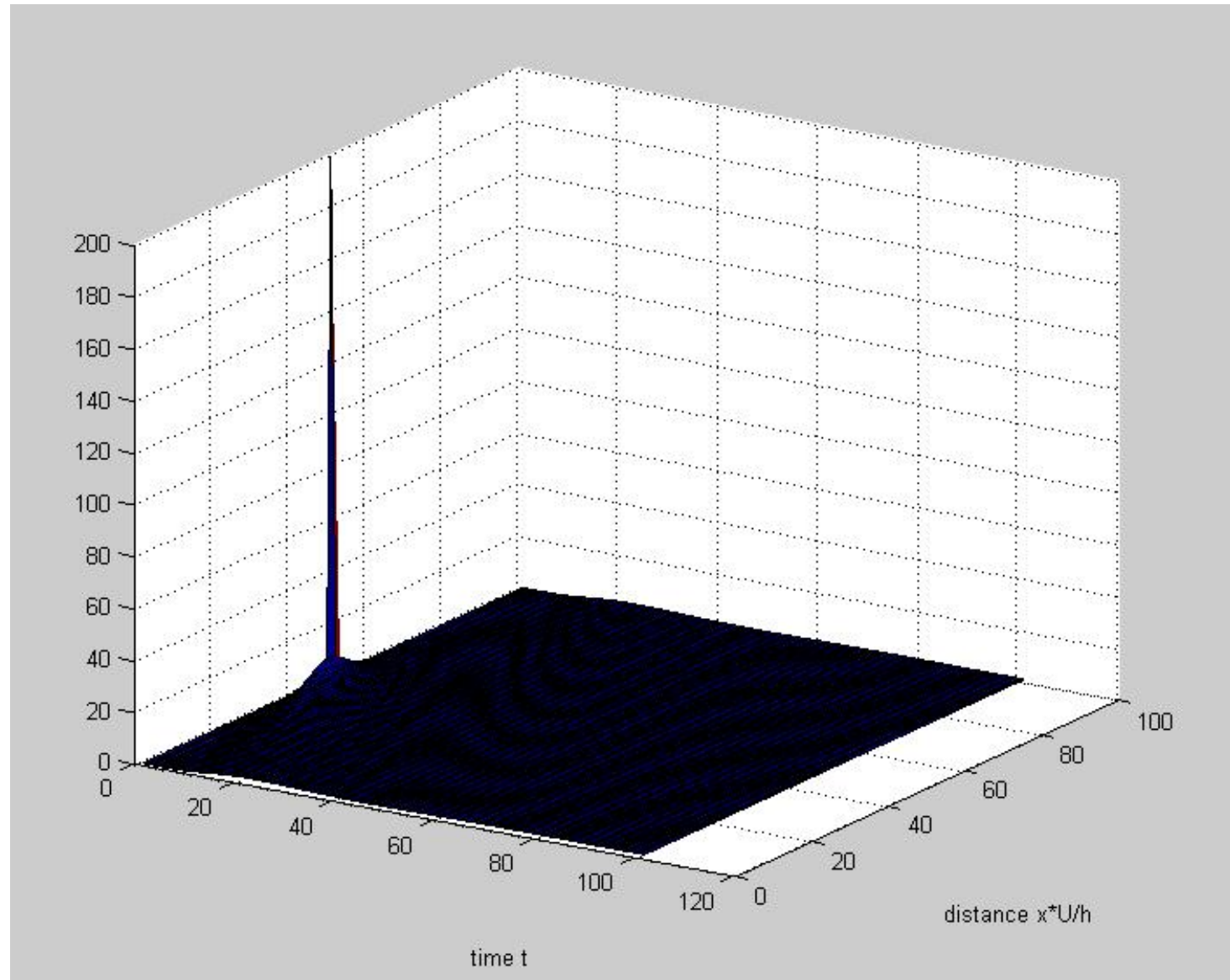
$V=0,03$
 $D=0,0002$



$V = -0,02$
 $D = 0,001$

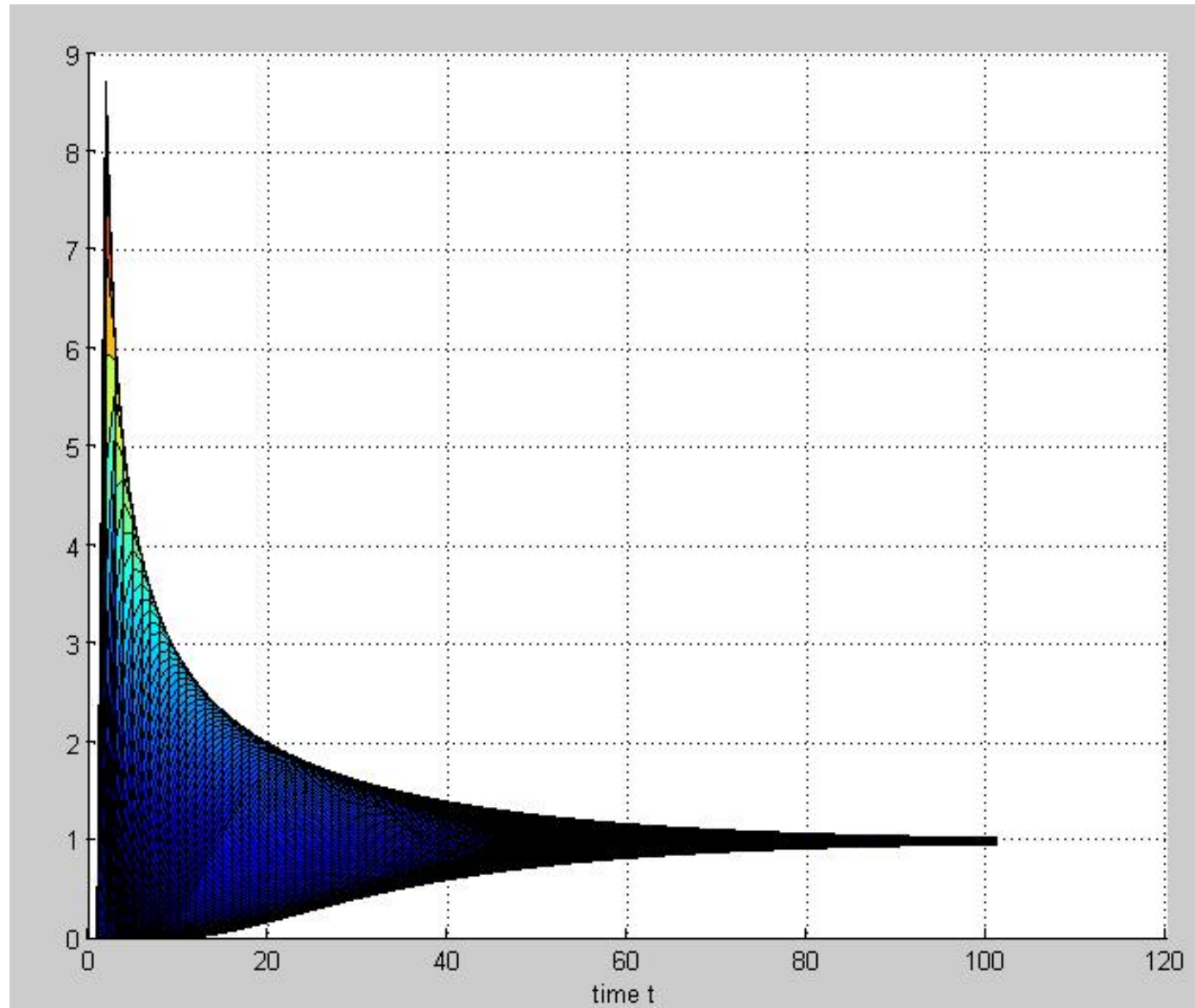


$V = -0,02$
 $D = 0,001$



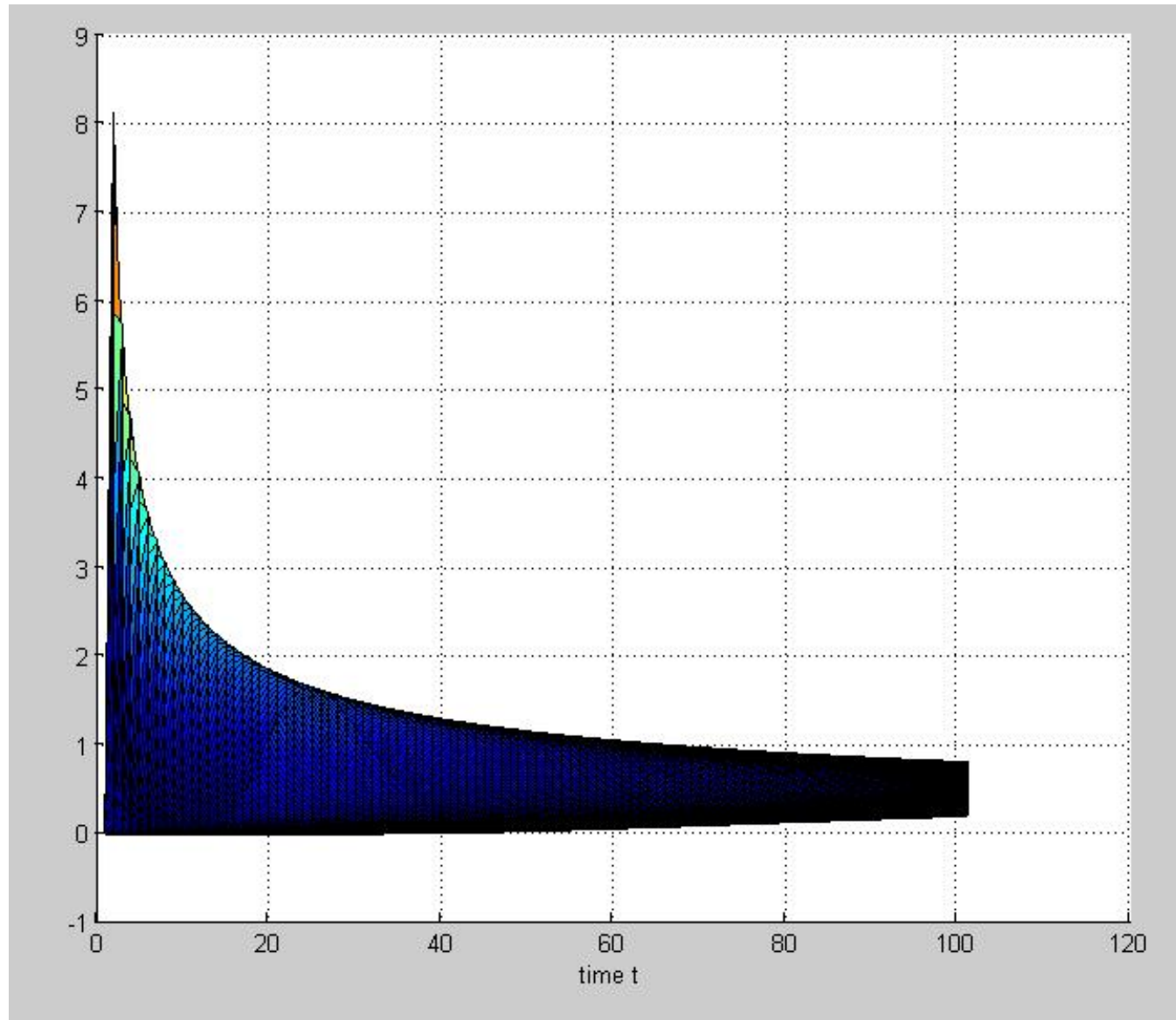
$V = -0,02$
 $D = 0,001$

$U = 1$



$V = -0,04$
 $D = 0,001$

$U = 2$





- Anzahl der Umläufe um den Kreis: $n=L*v * T$
- Der Funktionswert wird umso schneller kleiner, je größer D ist
- Das Vorzeichen von v bestimmt die Richtung des Drifts
- Die Wahrscheinlichkeit bleibt erhalten

Analytische Lösung

- Lösung der FPE durch Fouriertransformation

$$\tilde{p}(k, t) = \int_0^L p(x, t) e^{ikx} dx \quad p(x, t) = \frac{1}{L} \sum_k \tilde{p}(k, t) e^{-ikx} dk$$

- transformierte FPE mit $k=2\pi l/L$ und $l=\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

$$\frac{\partial \tilde{p}(k, t)}{\partial t} = (-Dk^2 + ikv_{drift}) \tilde{p}(k, t)$$

- Lösen der FPE und rücktransformieren liefert:

$$p(x, t) = \frac{1}{L} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\lambda'_k t} (\cos(\lambda''_k t) \cos(k[x - x_0]) + \sin(\lambda''_k t) \sin(k[x - x_0]))$$

$$\lambda'_k = Dk^2 \quad \lambda''_k = kv_{drift}$$

Vergleich

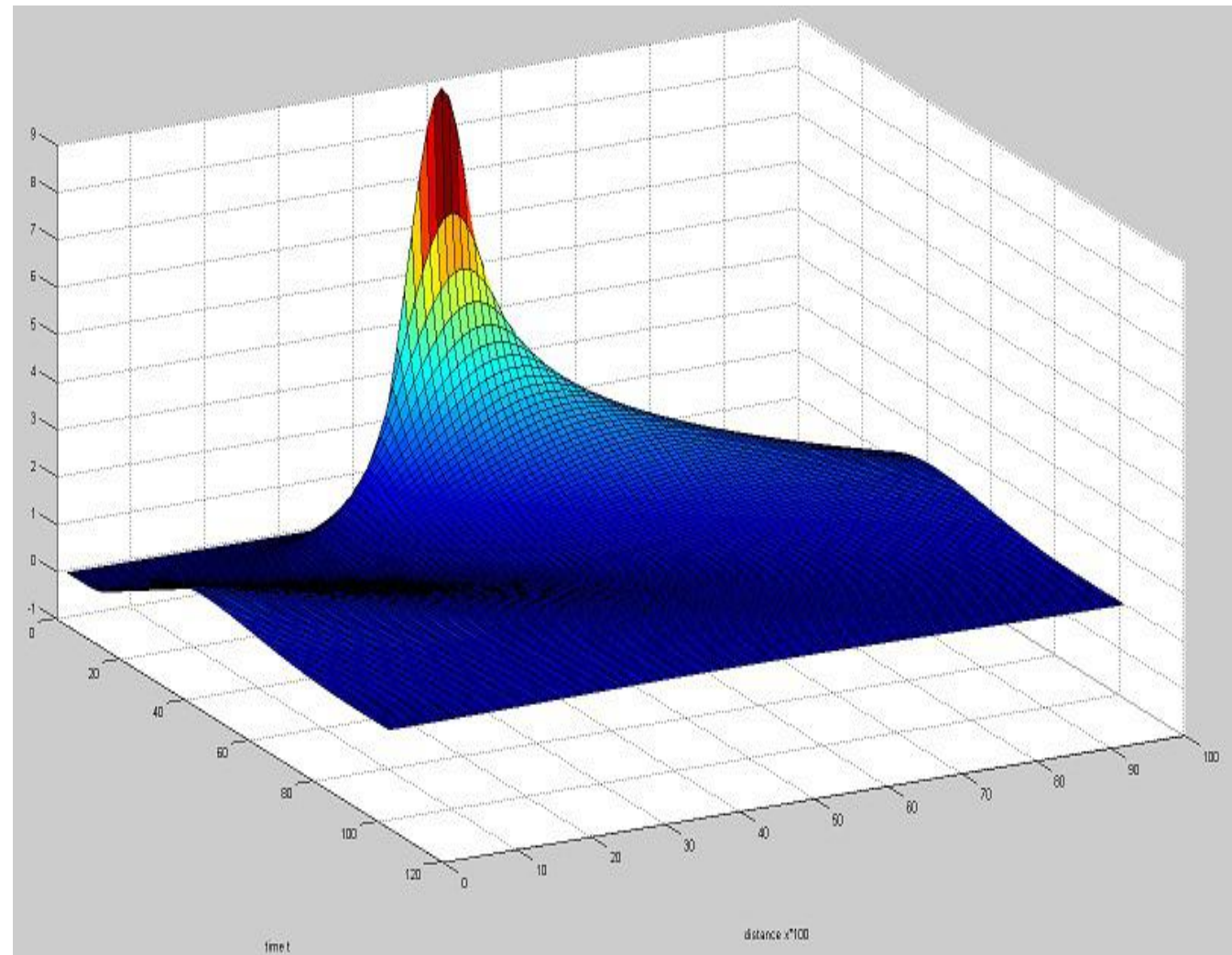
theoretische Verteilung

$$\tau=0,0025$$

$$h=0,0025$$

$$D=0,001$$

$$v=0,01$$



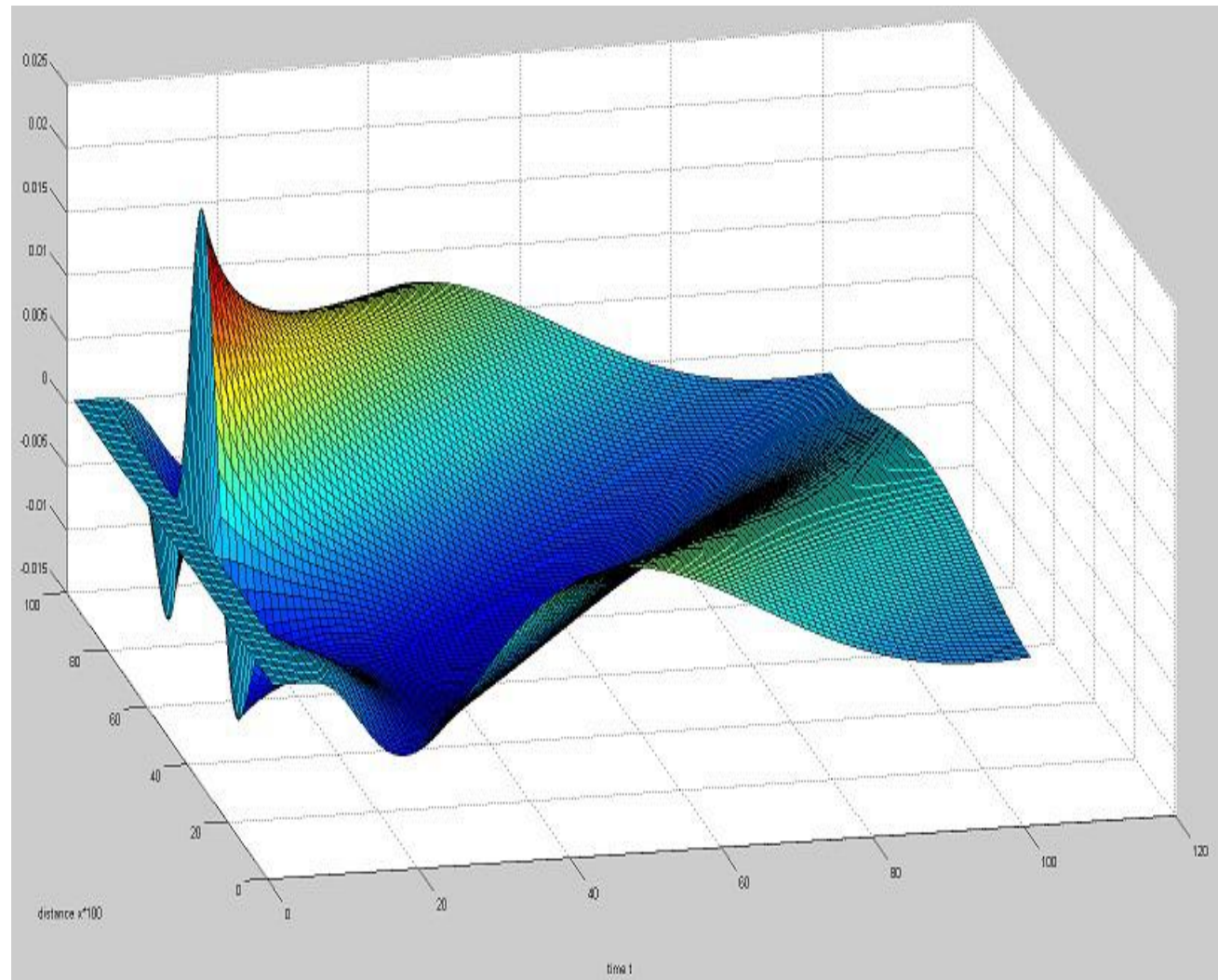
absolute Abweichung

$\tau=0,0025$

$h=0,0025$

$D=0,001$

$v=0,01$



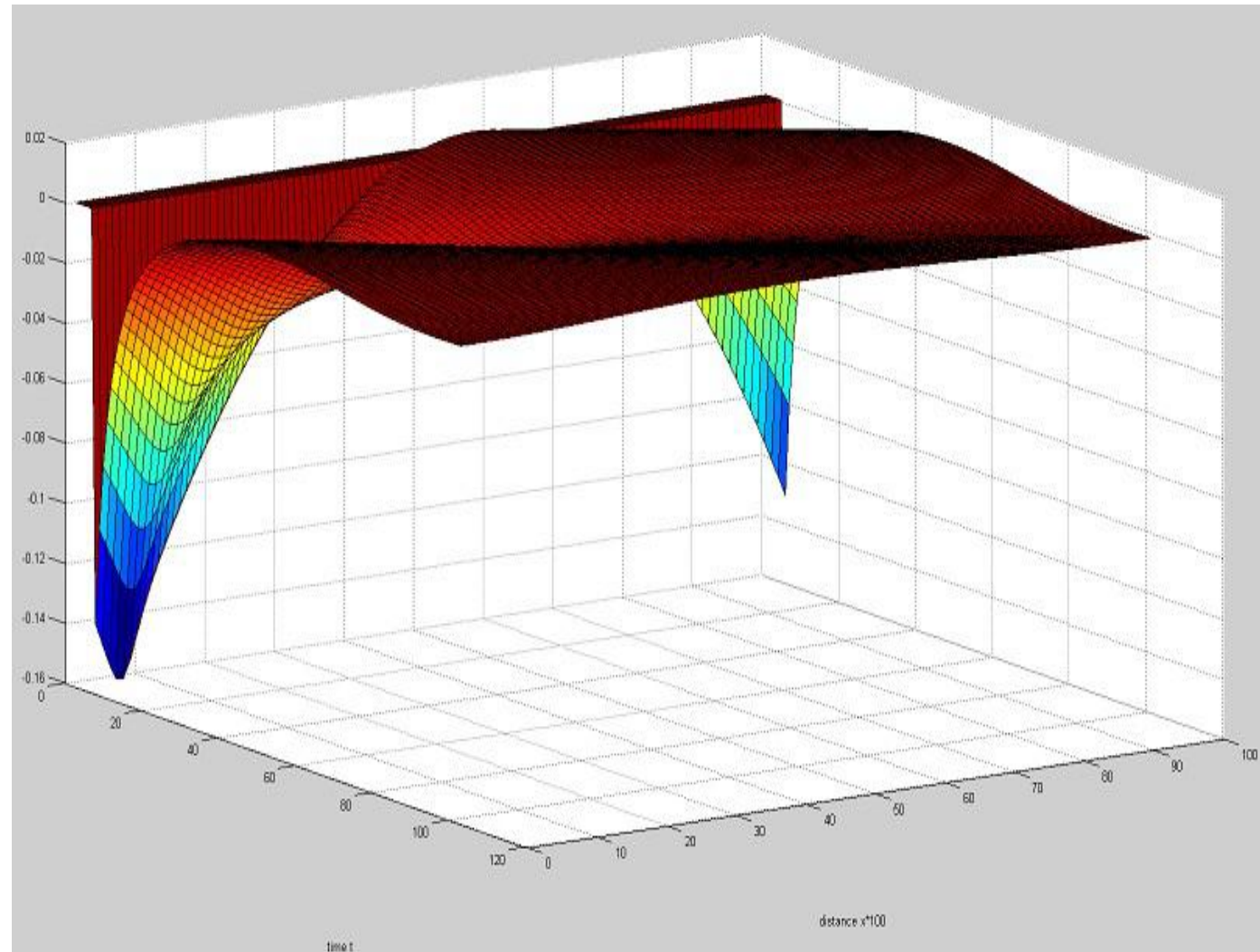
relative Abweichung

$\tau=0,0025$

$h=0,0025$

$D=0,001$

$\nu=0,01$



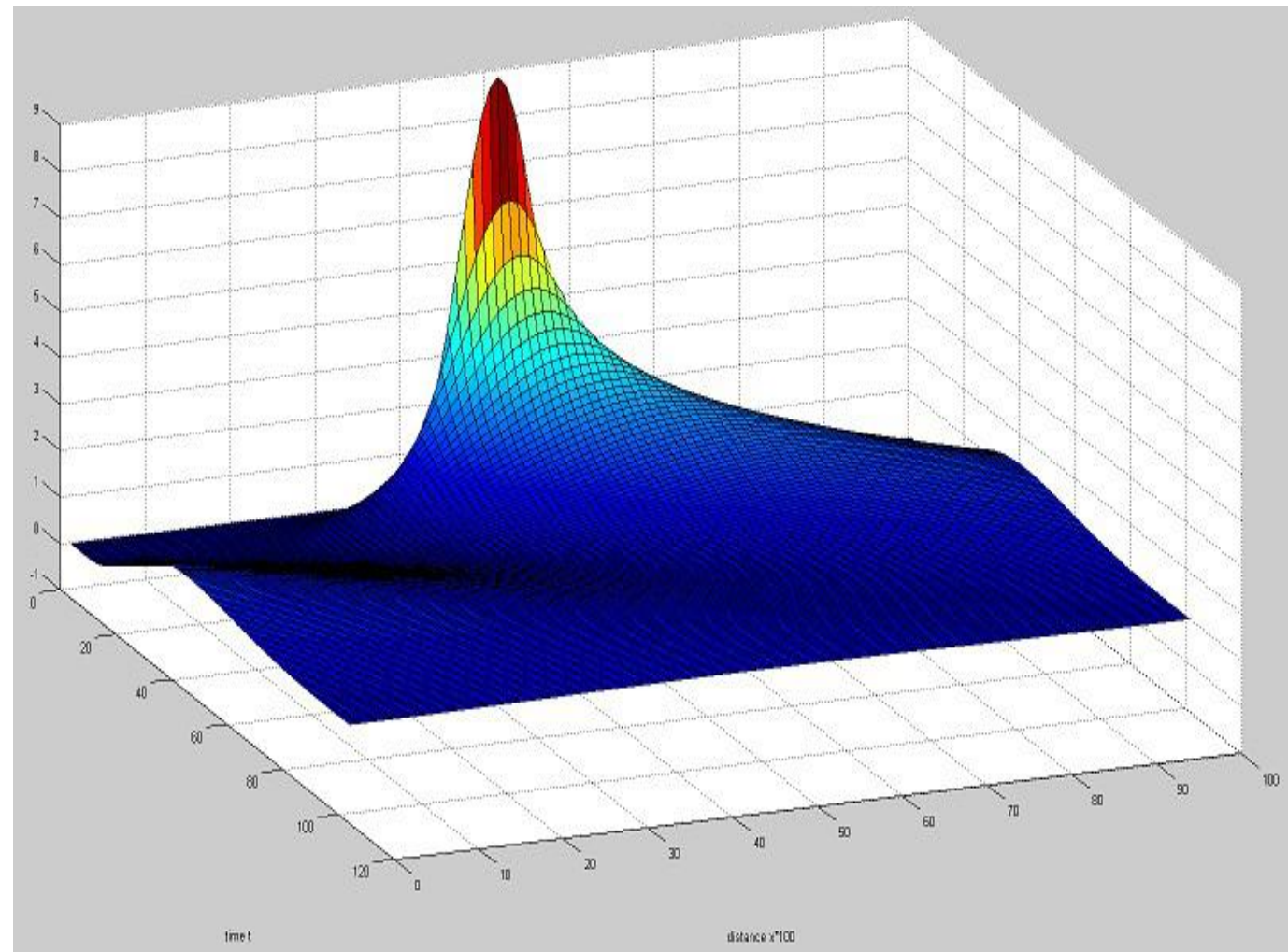
theoretische Verteilung

$$\tau=0,01$$

$$h=0,01$$

$$D=0,001$$

$$v=0,01$$



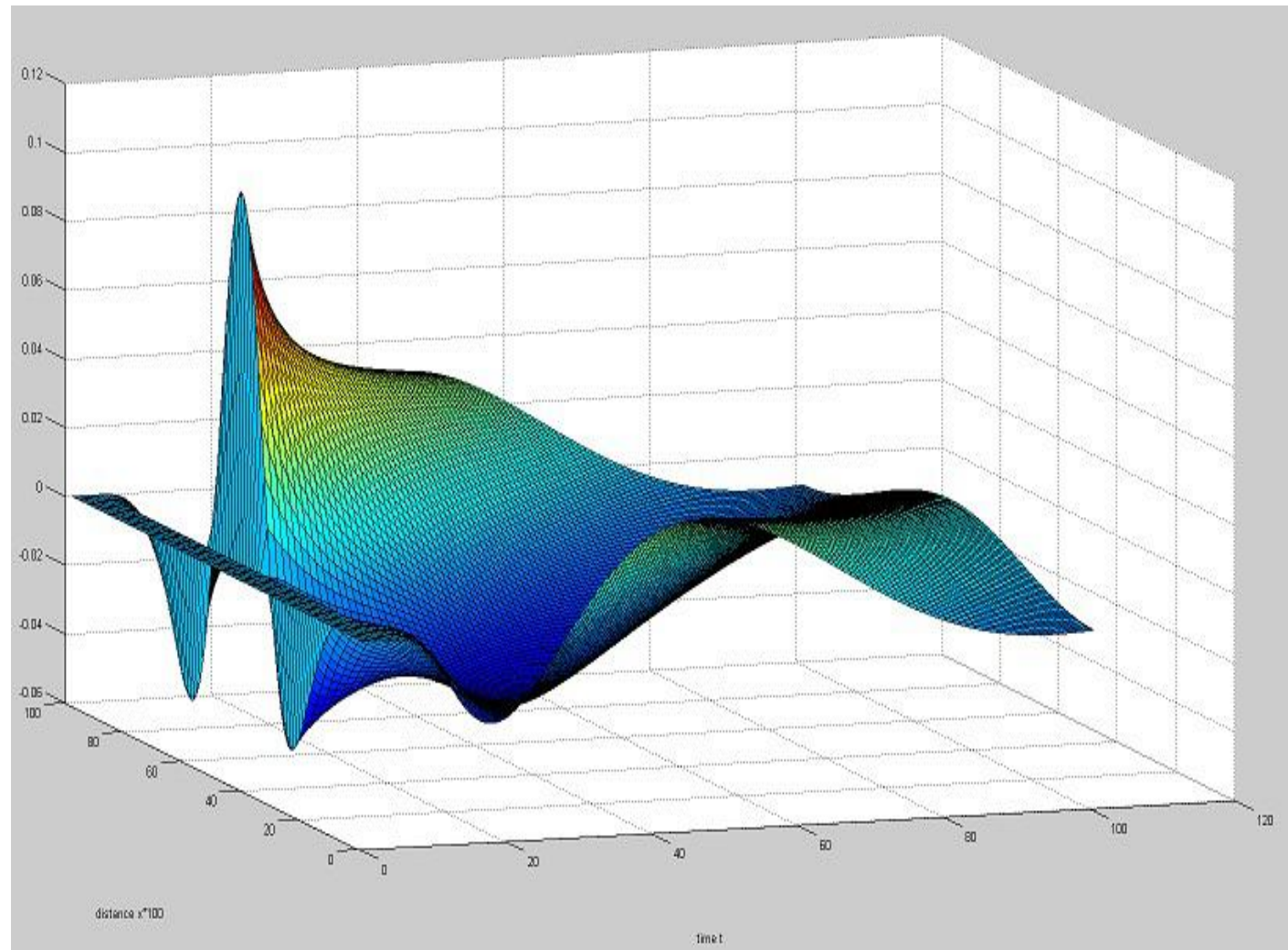
absolute Abweichung

$$\tau=0,01$$

$$h=0,01$$

$$D=0,001$$

$$v=0,01$$



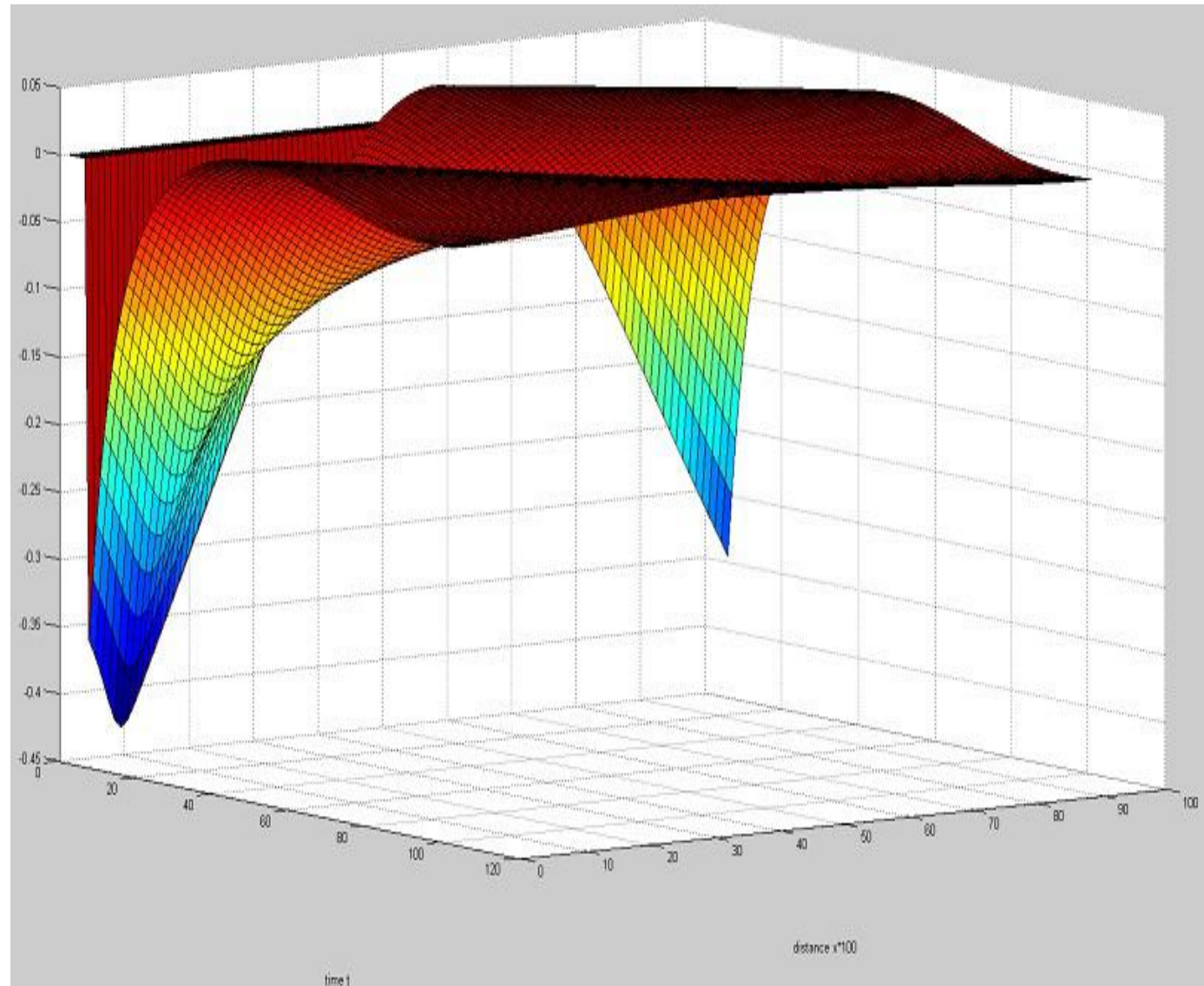
relative Abweichung

$\tau=0,01$

$h=0,01$

$D=0,001$

$v=0,01$



Fazit

- hohe absolute Abweichung am Deltapeak
- relative Abweichung am Rand groß
- mehr Zeit-und-Ortsschritte minimieren die Abweichung
- generell spiegelt die numerische Lösung die analytische gut wieder