

Zufallswanderer unter natürlichen Randbedingungen bei kontinuierlichem Ort und kontinuierlicher Zeit

Heinrich Behle
Kai Wardelmann

Universität Rostock
Institut für Physik

6. Januar 2014

1 Problemstellung

- 1 Problemstellung
- 2 Numerische Lösung der Fokker-Planck-Gleichung
 - Finite Differenzen
 - Euler-Verfahren
 - Implementierung in MATLAB

- 1 Problemstellung
- 2 Numerische Lösung der Fokker-Planck-Gleichung
 - Finite Differenzen
 - Euler-Verfahren
 - Implementierung in MATLAB
- 3 Analytische Lösung der Fokker-Planck-Gleichung

Gliederung

- 1 Problemstellung
- 2 Numerische Lösung der Fokker-Planck-Gleichung
 - Finite Differenzen
 - Euler-Verfahren
 - Implementierung in MATLAB
- 3 Analytische Lösung der Fokker-Planck-Gleichung
- 4 Vergleich der Lösungen

Gliederung

- 1 Problemstellung
- 2 Numerische Lösung der Fokker-Planck-Gleichung
 - Finite Differenzen
 - Euler-Verfahren
 - Implementierung in MATLAB
- 3 Analytische Lösung der Fokker-Planck-Gleichung
- 4 Vergleich der Lösungen
- 5 Spezialfälle für beide Lösungen

- 1 Problemstellung
- 2 Numerische Lösung der Fokker-Planck-Gleichung
 - Finite Differenzen
 - Euler-Verfahren
 - Implementierung in MATLAB
- 3 Analytische Lösung der Fokker-Planck-Gleichung
- 4 Vergleich der Lösungen
- 5 Spezialfälle für beide Lösungen
- 6 Zusammenfassung

- 1 Problemstellung
- 2 Numerische Lösung der Fokker-Planck-Gleichung
 - Finite Differenzen
 - Euler-Verfahren
 - Implementierung in MATLAB
- 3 Analytische Lösung der Fokker-Planck-Gleichung
- 4 Vergleich der Lösungen
- 5 Spezialfälle für beide Lösungen
- 6 Zusammenfassung

Problemstellung

- eindimensionaler
Zufallswanderer
- kontinuierliche
Variablen
- natürliche
Randbedingungen

- eindimensionaler
Zufallswanderer
- kontinuierliche
Variablen
- natürliche
Randbedingungen

Drift-Diffusions-Gleichung

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} - v_{\text{drift}} \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \quad (1)$$

Problemstellung

- eindimensionaler Zufallswanderer
- kontinuierliche Variablen
- natürliche Randbedingungen

Drift-Diffusions-Gleichung

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} - v_{\text{drift}} \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \quad (1)$$

Anfangsbedingung

$$p(x, t = 0) = \delta(x - x_0) \quad (2)$$

Problemstellung

- eindimensionaler Zufallswanderer
- kontinuierliche Variablen
- natürliche Randbedingungen
- **gesucht: numerische Lösung**

Drift-Diffusions-Gleichung

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} - v_{\text{drift}} \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \quad (1)$$

Anfangsbedingung

$$p(x, t = 0) = \delta(x - x_0) \quad (2)$$

Gliederung

- 1 Problemstellung
- 2 Numerische Lösung der Fokker-Planck-Gleichung
 - Finite Differenzen
 - Euler-Verfahren
 - Implementierung in MATLAB
- 3 Analytische Lösung der Fokker-Planck-Gleichung
- 4 Vergleich der Lösungen
- 5 Spezialfälle für beide Lösungen
- 6 Zusammenfassung

Die Finite-Differenzen-Methode

- numerisches Verfahren zur Lösung PDGL und DGL
- finite Differenzenquotienten statt Ableitungen

Die Finite-Differenzen-Methode

- numerisches Verfahren zur Lösung PDGL und DGL
- finite Differenzenquotienten statt Ableitungen

Differenzenquotienten

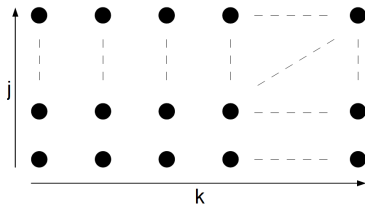
$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x + \frac{h}{2}) - f(x - \frac{h}{2})}{h}$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)}{h^2}$$

Differenzenquotienten

- numerisches Verfahren zur Lösung PDGL und DGL
- finite Differenzenquotienten statt Ableitungen
- Gebietsdiskretisierung durch Gitterpunkte endlicher Anzahl

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x + \frac{h}{2}) - f(x - \frac{h}{2})}{h}$$
$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)}{h^2}$$



Das Euler-Verfahren

- numerisches Verfahren zur Lösung eines Anfangswertproblems
- AWP: $\frac{d}{dt}y = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$
- Diskretisierung: $t_n = t_0 + nh$, $n = 0, 1, 2, \dots$
- Schritt von t_n auf $t_{n+1} = t_n + h$ mittels $y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n)$

- Ableitungen in Gl. (1) ersetzen

$$\frac{p(x, t + \tau) - p(x, t)}{\tau} = D \frac{p(x - h, t) - 2p(x, t) + p(x + h, t)}{h^2} - v_{drift} \frac{p(x + h, t) - p(x - h, t)}{2h}$$

- Ableitungen in Gl. (1) ersetzen

$$\frac{p(x, t + \tau) - p(x, t)}{\tau} = D \frac{p(x - h, t) - 2p(x, t) + p(x + h, t)}{h^2} - v_{drift} \frac{p(x + h, t) - p(x - h, t)}{2h}$$

- Auflösen nach $p(x, t + \tau)$

$$p(x, t + \tau) = p(x, t) + \frac{\tau D}{h^2} (p(x - h, t) - 2p(x, t) + p(x + h, t)) - \frac{\tau v_{drift}}{2h} (p(x + h, t) - p(x - h, t))$$

Anwendung auf FPE

- kontinuierliche Variable durch Indizes im Dichtefeld ersetzen

$$p_{j,k+1} = p_{j,k} + \frac{\tau D}{h^2} (p_{j-1,k} - 2p_{j,k} + p_{j+1,k}) - \frac{\tau v_{drift}}{2h} (p_{j-1,k} - p_{j+1,k})$$

Anwendung auf FPE

- kontinuierliche Variable durch Indizes im Dichtefeld ersetzen

$$p_{j,k+1} = p_{j,k} + \frac{\tau D}{h^2} (p_{j-1,k} - 2p_{j,k} + p_{j+1,k}) - \frac{\tau v_{drift}}{2h} (p_{j-1,k} - p_{j+1,k})$$

- Vektor-, Matrixschreibweise

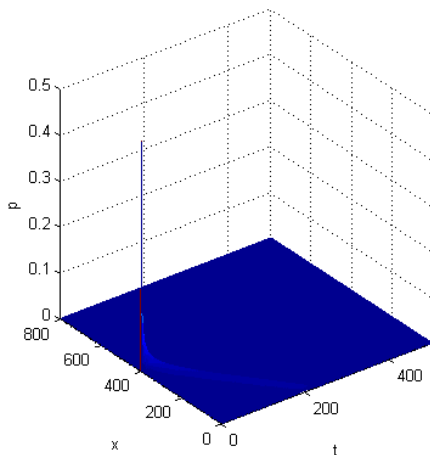
$$\begin{pmatrix} p_{1,k+1} \\ p_{2,k+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ p_{J,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1,k} \\ p_{2,k} \\ \vdots \\ \vdots \\ p_{J,k} \end{pmatrix} + \frac{\tau D}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{1,k} \\ p_{2,k} \\ \vdots \\ \vdots \\ p_{J,k} \end{pmatrix} - \frac{\tau v_{drift}}{2h} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{1,k} \\ p_{2,k} \\ \vdots \\ \vdots \\ p_{J,k} \end{pmatrix}$$

Implementierung in MATLAB

```
FPE_Lsg_numerisch.m* x +
1 - W = 800;
2 - D = 0.3;
3 - v_D=-0.01;
4
5 - x = zeros(W,1);
6 - x(round(W/2)+[0,1]) = 0.6;
7 - P = x;
8 - L_1 = diag(ones(W-1,1),-1) - 2*diag(ones(W,1))...
9   + diag(ones(W-1,1),1);
10 - L_2 = diag(ones(W-1,1),-1) - diag(ones(W-1,1),1);
11 - for n = 1:5010,
12 -     x = x + D*L_1*x - v_D*L_2*x;
13 -     if mod(n,10)==0
14 -         P = [P,x];
15 -     end
16 - end;
```

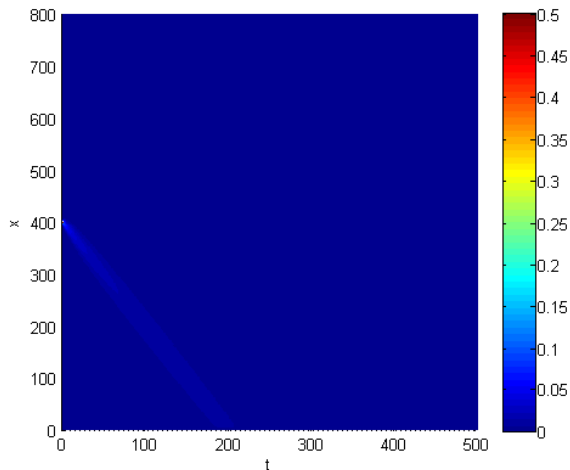
Implementierung in MATLAB

- $D = 0,5$
- $v_d = -0,1$



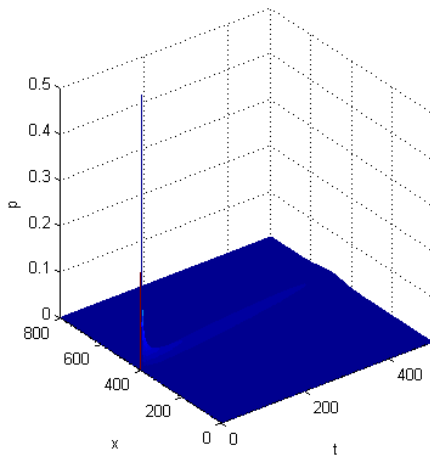
Implementierung in MATLAB

- $D = 0,5$
- $v_d = -0,1$



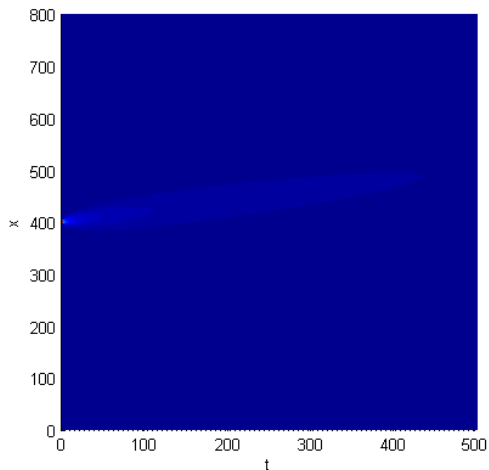
Implementierung in MATLAB

- $D = 0,3$
- $v_d = 0,01$



Implementierung in MATLAB

- $D = 0,3$
- $v_d = 0,01$



- 1 Problemstellung
- 2 Numerische Lösung der Fokker-Planck-Gleichung
 - Finite Differenzen
 - Euler-Verfahren
 - Implementierung in MATLAB
- 3 Analytische Lösung der Fokker-Planck-Gleichung
- 4 Vergleich der Lösungen
- 5 Spezialfälle für beide Lösungen
- 6 Zusammenfassung

Analytische Lösung Gl. (1)

$$p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{(x - x_0 - v_{drift} t)^2}{4Dt}\right) \quad (3)$$

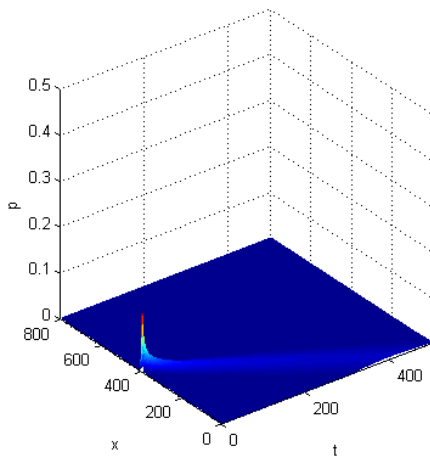
- kontinuierliche Variable
- nur ganzzahlige x, t für Vergleich von Interesse
- einfache Implementierung möglich

Analytische Lösung der Fokker-Planck-Gleichung

```
FPE_Lsg_analytisch.m x +
1 - x_0=400;
2 - D=0.3;
3 - v_D=0.01;
4 - x=0:799;
5 - for t=0:5000
6 -     p=[(1/sqrt(4*pi*D*t))*exp(-((x-x_0-v_D*t).^2)/(4*D*t))];
7 -     if t==0
8 -         P=[p];
9 -     end
10 -    if mod(t,10)==0
11 -        P=[P,p];
12 -    end
13 - end;
```

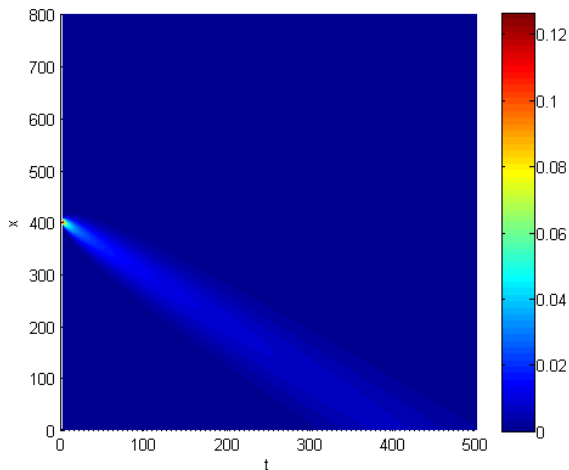
Analytische Lösung der Fokker-Planck-Gleichung

- $D = 0,5$
- $v_d = -0,1$



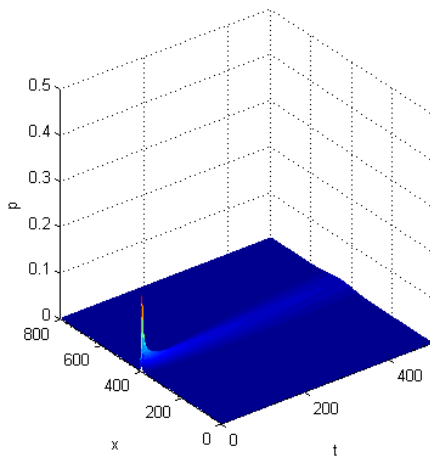
Analytische Lösung der Fokker-Planck-Gleichung

- $D = 0,5$
- $v_d = -0,1$



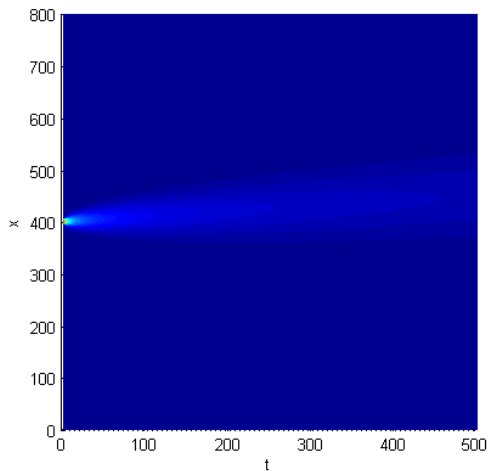
Analytische Lösung der Fokker-Planck-Gleichung

- $D = 0,3$
- $v_d = 0,01$



Analytische Lösung der Fokker-Planck-Gleichung

- $D = 0,3$
- $v_d = 0,01$



Gliederung

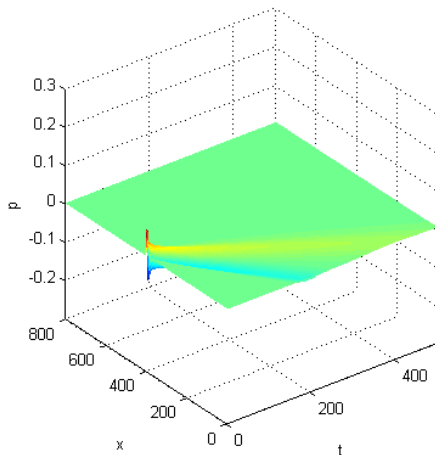
- 1 Problemstellung
- 2 Numerische Lösung der Fokker-Planck-Gleichung
 - Finite Differenzen
 - Euler-Verfahren
 - Implementierung in MATLAB
- 3 Analytische Lösung der Fokker-Planck-Gleichung
- 4 Vergleich der Lösungen
- 5 Spezialfälle für beide Lösungen
- 6 Zusammenfassung

Vergleich der Lösungen

- Positionsgleichheit im Koordinatensystem vorausgesetzt
- Matrizendifferenz betrachten

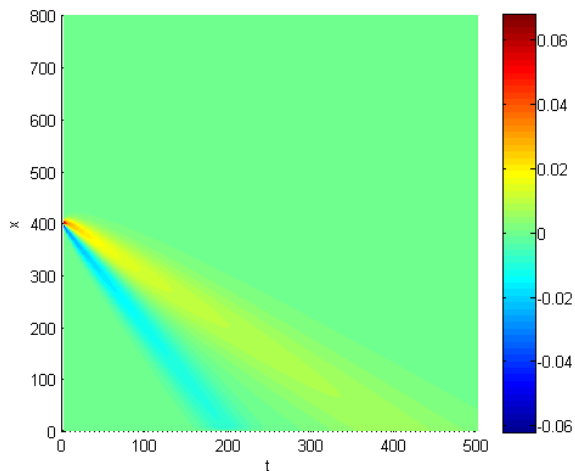
Vergleich der Lösungen

- $D = 0,5$
- $v_d = -0,1$



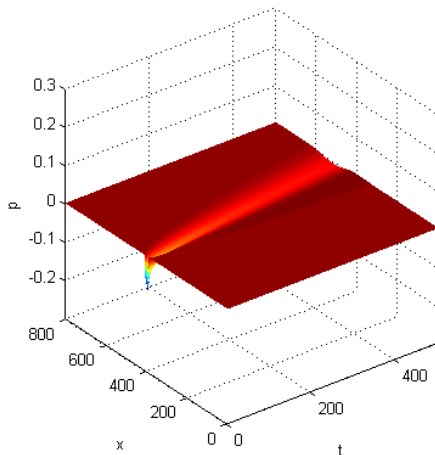
Vergleich der Lösungen

- $D = 0,5$
- $v_d = -0,1$



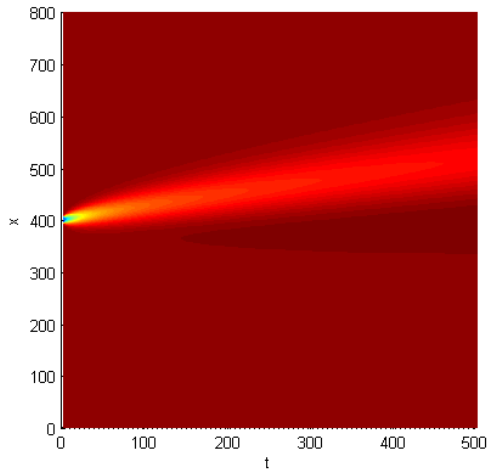
Vergleich der Lösungen

- $D = 0,3$
- $v_d = 0,01$



Vergleich der Lösungen

- $D = 0,3$
- $v_d = 0,01$

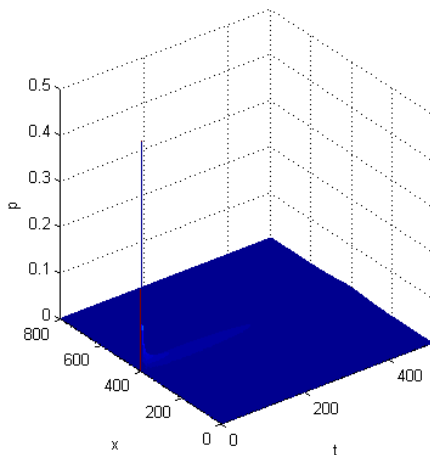


Gliederung

- 1 Problemstellung
- 2 Numerische Lösung der Fokker-Planck-Gleichung
 - Finite Differenzen
 - Euler-Verfahren
 - Implementierung in MATLAB
- 3 Analytische Lösung der Fokker-Planck-Gleichung
- 4 Vergleich der Lösungen
- 5 Spezialfälle für beide Lösungen
- 6 Zusammenfassung

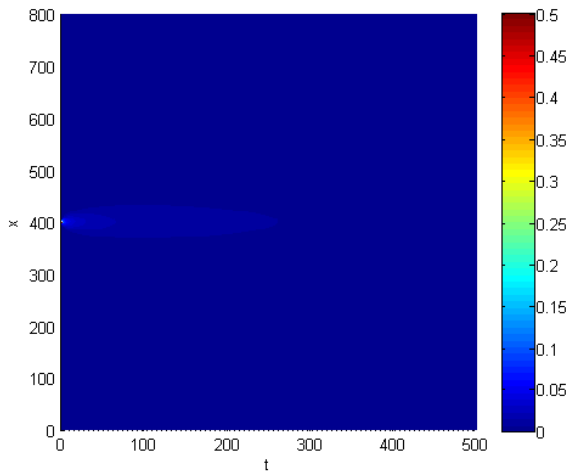
Spezialfälle für beide Lösungen

- $D = 0,5$
- $v_d = 0$
- numerische Lösung



Spezialfälle für beide Lösungen

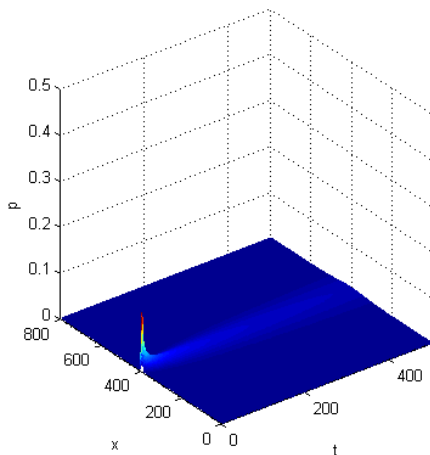
- $D = 0,5$
- $v_d = 0$
- numerische Lösung



Spezialfälle für beide Lösungen

- $D = 0,5$
- $v_d = 0$

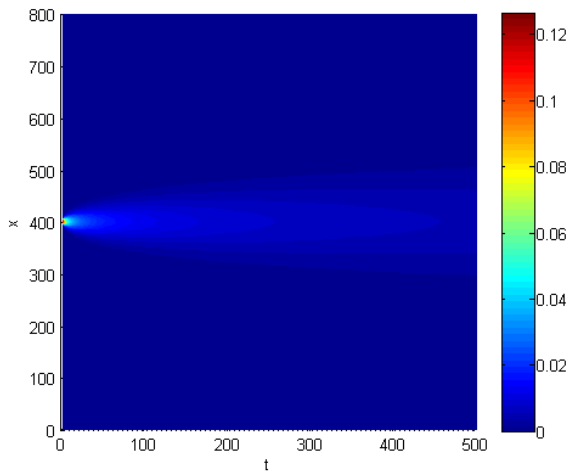
- analytische Lösung



Spezialfälle für beide Lösungen

- $D = 0,5$
- $v_d = 0$

- analytische Lösung



Gliederung

- 1 Problemstellung
- 2 Numerische Lösung der Fokker-Planck-Gleichung
 - Finite Differenzen
 - Euler-Verfahren
 - Implementierung in MATLAB
- 3 Analytische Lösung der Fokker-Planck-Gleichung
- 4 Vergleich der Lösungen
- 5 Spezialfälle für beide Lösungen
- 6 Zusammenfassung**

- einfache MATLAB-Implementierung für numerische Lösung mittels Methode finiter Differenzen
- Eingeschränkte Vergleichbarkeit analytischer und numerischer Lösungen

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit.

Zufallswanderer unter natürlichen Randbedingungen bei kontinuierlichem Ort und kontinuierlicher Zeit - Nachschlag -

Heinrich Behle
Kai Wardelmann

Universität Rostock
Institut für Physik

13. Januar 2014

Universität
Rostock



Traditio et Innovatio



INSTITUT FÜR PHYSIK

- 1 Bisheriges Problem
- 2 Darstellung der analytischen Lösung
- 3 Darstellung der numerischen Lösung
- 4 Vergleich der Lösungen

Drift-Diffusions-Gleichung

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} - v_{drift} \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \quad (1)$$

$$p_{j,k+1} = p_{j,k} + \frac{\tau D}{h^2} (p_{j-1,k} - 2p_{j,k} + p_{j+1,k}) - \frac{\tau v_{drift}}{2h} (p_{j-1,k} - p_{j+1,k})$$

$$p_{j,k+1} = \left(s + \frac{1}{2}c\right)p_{j-1,k} + (1 - 2s)p_{j,k} + \left(s - \frac{1}{2}c\right)p_{j+1,k}$$

$$\text{mit } c = \frac{v_D \cdot \tau}{h} \text{ und } s = \frac{D \cdot \tau}{h^2}$$

FTCS Stabilitätsbedingung

$$0 \leq c^2 \leq 2s \leq 1 \quad (2)$$

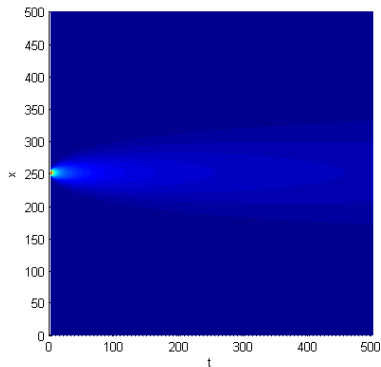
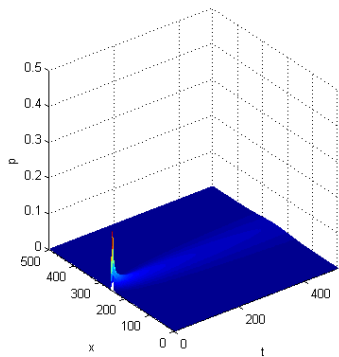
Gliederung

- 1 Bisheriges Problem
- 2 Darstellung der analytischen Lösung**
- 3 Darstellung der numerischen Lösung
- 4 Vergleich der Lösungen

Analytische Lösung

$$D = 0,3$$

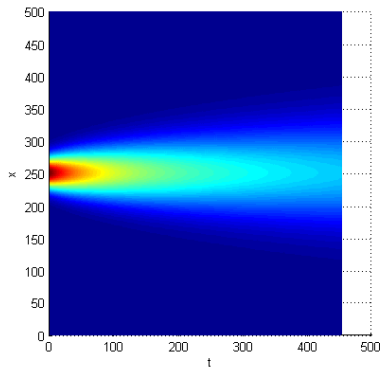
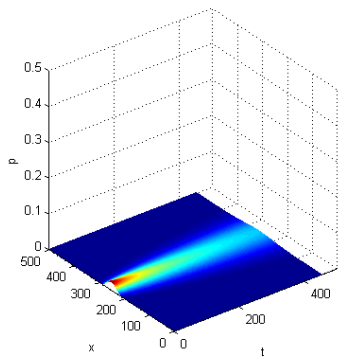
$$v_D = 0$$



Analytische Lösung

$$D = 0,3$$

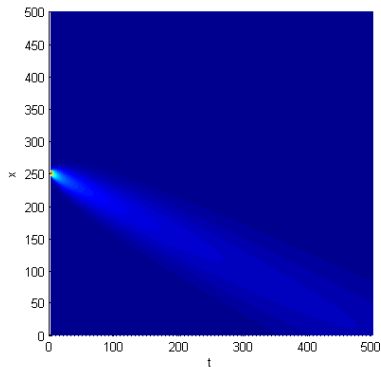
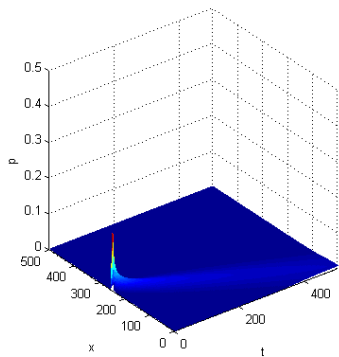
$$v_D = 0$$



Analytische Lösung

$$D = 0,3$$

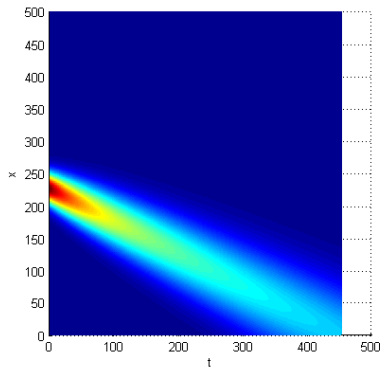
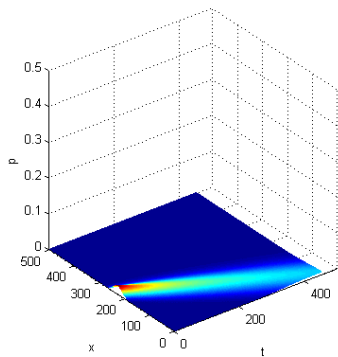
$$v_D = 0,05$$



Analytische Lösung

$$D = 0,3$$

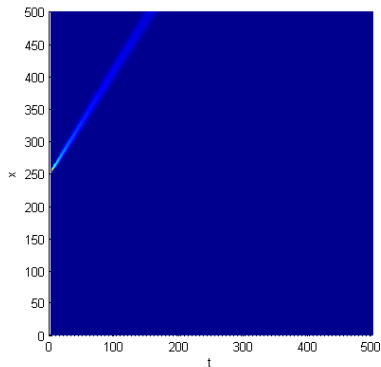
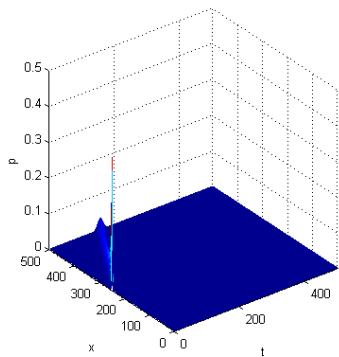
$$v_D = 0,05$$



Analytische Lösung

$$D = 0,05$$

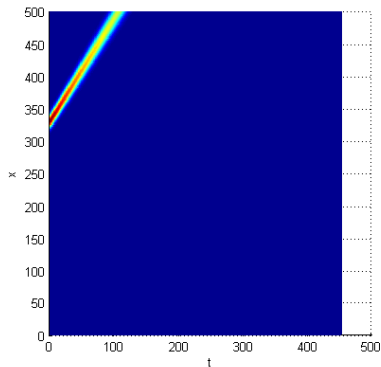
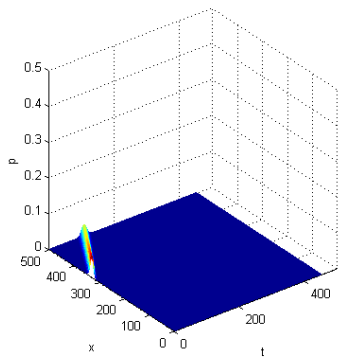
$$v_D = 0,16$$



Analytische Lösung

$$D = 0,05$$

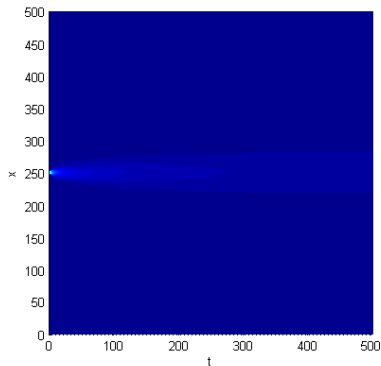
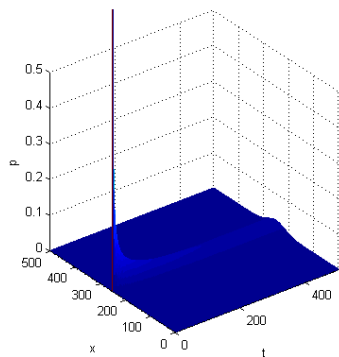
$$v_D = 0,16$$



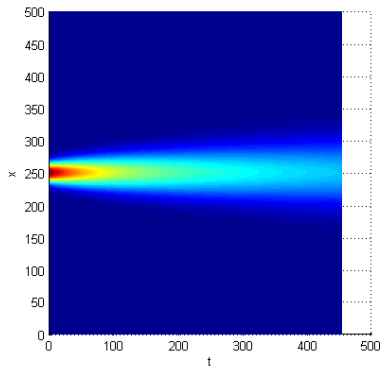
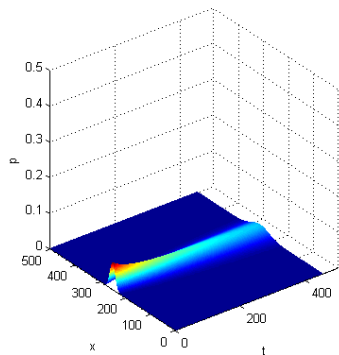
Gliederung

- 1 Bisheriges Problem
- 2 Darstellung der analytischen Lösung
- 3 Darstellung der numerischen Lösung**
- 4 Vergleich der Lösungen

$$D = 3 \quad v_D = 0$$

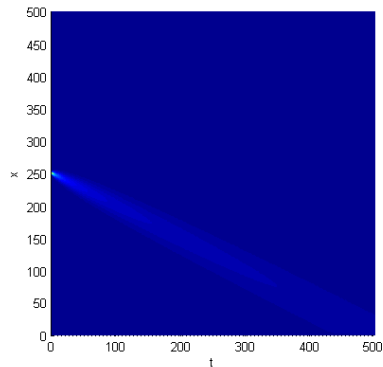
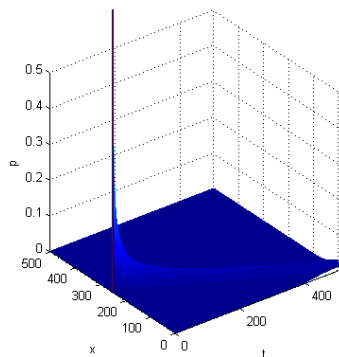


$$D = 3 \quad v_D = 0$$



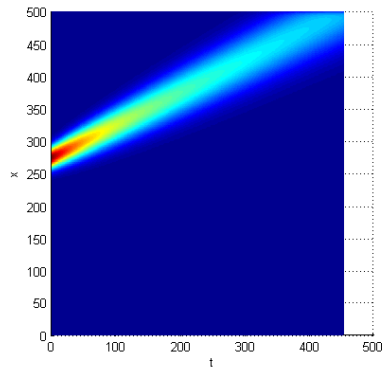
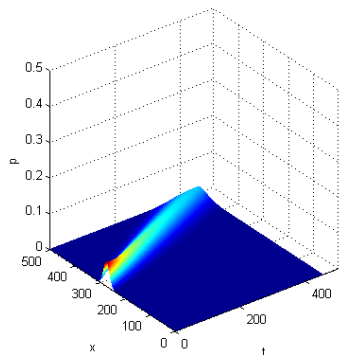
$$D = 3$$

$$v_D = 2,5$$



$$D = 3$$

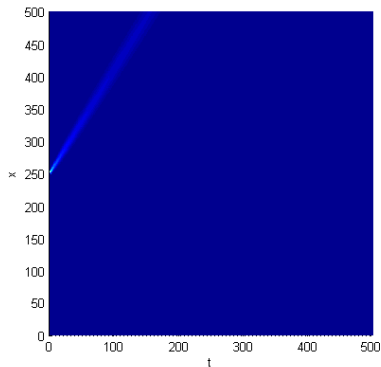
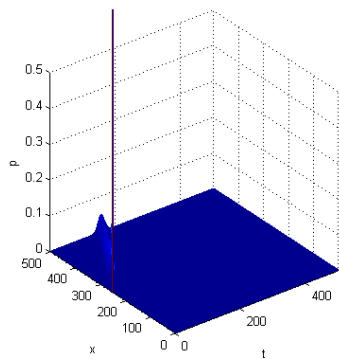
$$v_D = 2,5$$



Numerische Lösung

$$D = 0,5$$

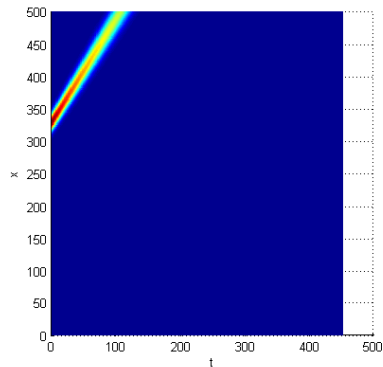
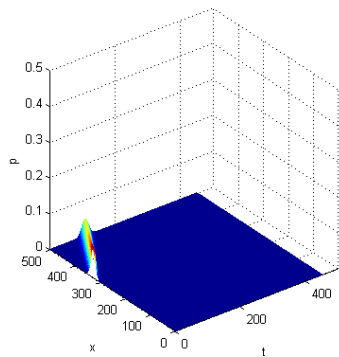
$$v_D = 8$$



Numerische Lösung

$$D = 0,5$$

$$v_D = 8$$



Gliederung

- 1 Bisheriges Problem
- 2 Darstellung der analytischen Lösung
- 3 Darstellung der numerischen Lösung
- 4 Vergleich der Lösungen

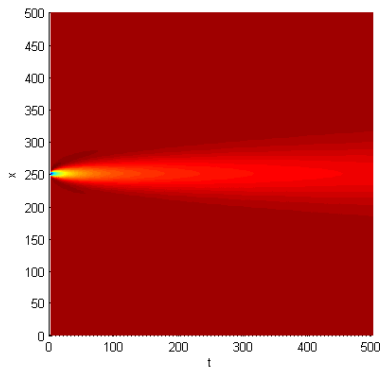
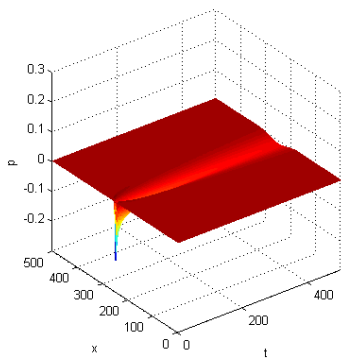
Lösungsvergleich

$$D_a = 0,3$$

$$v_{D,a} = 0$$

$$D_n = 3$$

$$v_{D,n} = 0$$



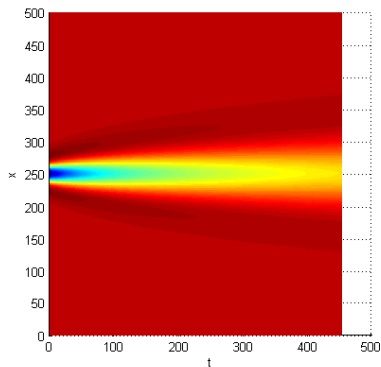
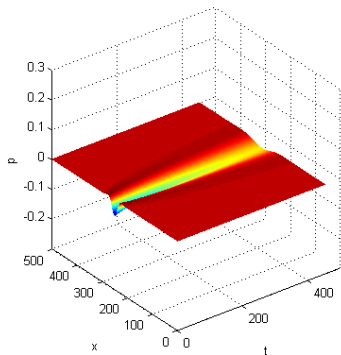
Lösungsvergleich

$$D_a = 0,3$$

$$v_{D,a} = 0$$

$$D_n = 3$$

$$v_{D,n} = 0$$



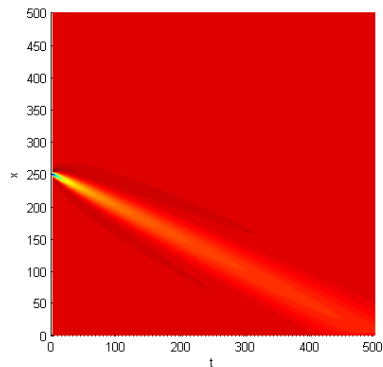
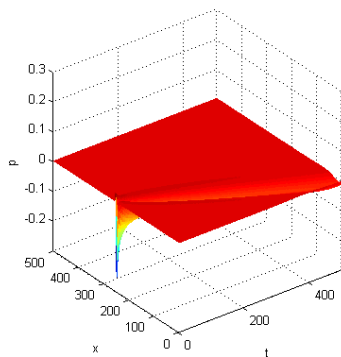
Lösungsvergleich

$$D_a = 0,3$$

$$D_n = 3$$

$$v_{D,a} = 0,05$$

$$v_{D,n} = 2,5$$



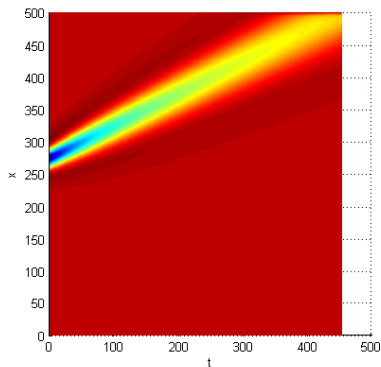
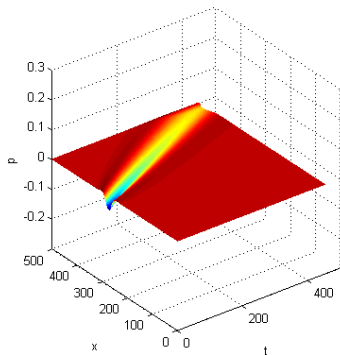
Lösungsvergleich

$$D_a = 0,3$$

$$D_n = 3$$

$$v_{D,a} = 0,05$$

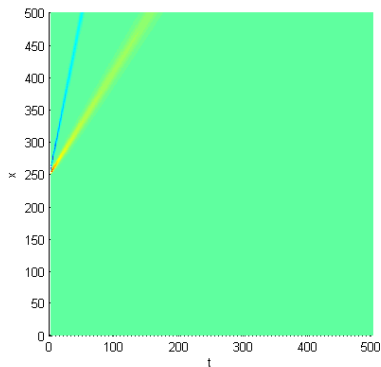
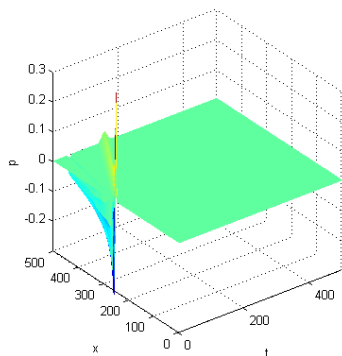
$$v_{D,n} = 2,5$$



Lösungsvergleich

$$D_a = 0,05$$
$$D_n = 0,5$$

$$v_{D,a} = 0,16$$
$$v_{D,n} = 8$$



Lösungsvergleich

$$D_a = 0,05$$
$$D_n = 0,5$$

$$v_{D,a} = 0,16$$
$$v_{D,n} = 8$$

