

Zufallswanderer mit diskretem Ort und kontinuierlicher Zeit

Julius Zimmermann

13.01.2014

Inhaltsverzeichnis

- 1 Grundlagen und Problemstellung
- 2 Numerische Lösung
- 3 Analytische Lösung
- 4 Diskussion

Die Mastergleichung

$$\frac{\partial P(x_m, t)}{\partial t} = w_+ P(x_{m-1}, t) + w_- P(x_{m+1}, t) - (w_+ + w_-) P(x_m, t)$$

- beschreibt unbegrenzte Wanderung mit diskreten Positionen $x_m = m, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, aber kontinuierlicher Zeit t

Gesucht:
Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(x_m, t)$ zu verschiedenen Zeiten

Numerisches Lösungsverfahren

- es sind N (Anzahl der Zeitschritte) verkettete Differentialgleichungen 1. Ordnung zu lösen
- Ausgangspunkt: $x_0 = 0$
- Benutzung eines 4-stufigen Runge-Kutta-Verfahrens

Einfluss der Laufzeit

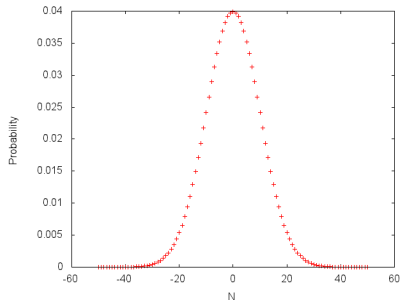


Abbildung: $t_{max} = 1$ s, $w_+ = 0.5$ s $^{-1}$, $w_- = 0.5$ s $^{-1}$

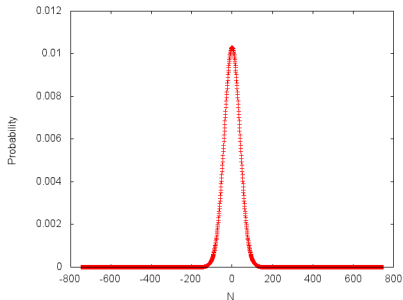


Abbildung: $t_{max} = 15$ s, $w_+ = 0.5$ s $^{-1}$, $w_- = 0.5$ s $^{-1}$

Einfluss der Parameter w_+ und w_-

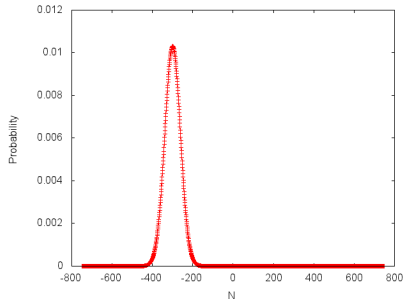


Abbildung: $t_{max} = 15s$, $w_+ = 0.4s^{-1}$, $w_- = 0.6s^{-1}$

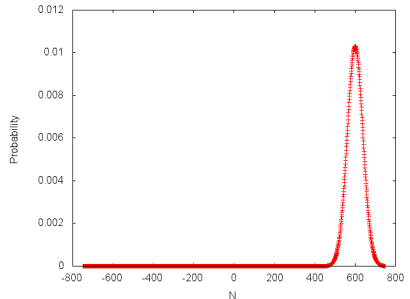


Abbildung: $t_{max} = 15s$, $w_+ = 0.7s^{-1}$, $w_- = 0.3s^{-1}$

Übergang zu „kontinuierlicher“ Zeit

Verkleinerung des Zeitschritts dt im RK-Algorithmus

- Verbesserungen im Promillebereich bei Verkleinerung um 3 Größenordnungen

Analytische Lösung über Fouriertransformation

$$P(x_m, t) = \frac{1}{M} \sum_k e^{-\lambda_{k,1} t} (\cos(\lambda_{k,2} t) \cos(k[x_m + x_0]) + \sin(\lambda_{k,2} t) \sin(k[x_m + x_0]))$$

mit

$$x_m = ma, k = \frac{2\pi m}{M} \quad m = 0..M - 1$$

$$\lambda_{k,1} = (w_+ + w_-)(1 - \cos(ka))$$

$$\lambda_{k,2} = (w_+ - w_-) \sin(ka)$$

Vergleich numerische und analytische Lösung

N=10

- $w_+ = 0.5$

Bestimmung der Koordinate x mit der größten Abweichung u :

$$x_{max} = \pm 5 : u_{max,rel} = 30,6\% \quad u_{max} = 0,011$$

Bei $x = 0$ wird der Fehler minimal (0,2%).

N=100

- $w_+ = 0.5$

Bestimmung der Koordinate x mit der größten Abweichung u :

$$x_{max} = \pm 50 : u_{max,rel} = 37,4\% \quad u_{max} = 6,7 \cdot 10^{-8}$$

Allerdings verschwindet der Fehler zwischen $x_m = \pm 35$.