Der Zufallswanderer auf einem Kreis mit diskreten Orten und kontinuierlicher Zeit

Helge Dobbertin

Institut für Physik, Universität Rostock

6. Januar 2014

Inhalte

1. Problemstellung
2. Analytische Lösung
3. Einblick Numerische Lösungsverfahren für DGL
4. Numerische Lösung
5. Resultate numerischer Experimente

Problemstellung

Ausgangspunkt ist die **Mastergleichung** für den Zufallswanderer:

$$\dot{P}(m,t) = w_+ P(m-1,t) + w_- P(m+1,t) - [w_+ + w_-]P(m,t) \qquad (1)$$

Mit $m = 0, 1, \ldots, M-1$ und der Anfangsbedingung:

$$P(m,0) = \delta_{m,m_0}$$

und den periodischen Randbedingungen:

$$\dot{P}(0,t) = w_+ P(M-1,t) + w_- P(1,t) - [w_+ + w_-]P(0,t)$$
$$\dot{P}(M-1,t) = w_+ P(M-2,t) + w_- P(0,t) - [w_+ + w_-]P(M-1,t)$$

Analytische Lösung

Über Fourier-Trafo kann folgende Lösung gefunden werden:

$$P(m,t) = \frac{1}{M} \sum_k e^{-\lambda'_k t} [\cos(\lambda''_k t) \cos(k[m - m_0]) + \sin(\lambda''_k t) \sin(k[m - m_0])] \tag{2}$$

Wobei $k = \frac{2\pi l}{M}$ mit $l = 0, 1, 2, \ldots, M - 1$ und

$$\lambda'_k = (w_+ + w_-)(1 - \cos(k))$$
$$\lambda''_k = (w_+ - w_-) \sin(k)$$

Mit Längeneinheit $a \rightarrow$ diskrete Orte bei $x_m = m \cdot a$ auf einem Kreis mit der Gesamtlänge $L = M \cdot a$

Numerisches Lösen einer DGL

Gelöst werden soll folgendes Problem:

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0$$

Nutze den Hauptsatz der Integral und Differentialrechnung:

$$y(x+h) = y(x) + \int_x^{x+h} y'(\tau) d\tau$$

Nähre das Integral durch die Rechteckregel $\rightarrow$ Euler-Verfahren:

$$y(x+h) \approx y(x) + h \cdot y(x)$$

Numerisches Lösen einer DGL 2

Nutze die Mittelpunktsregel $\rightarrow$ verbessertes Euler-Verfahren:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x, y(x)) \\ k_2 &= f(x + \frac{h}{2}, y[x + \frac{h}{2}]) \approx f(x + \frac{h}{2}, y(x) + \frac{h}{2} k_1) \\ y(x+h) &\approx y(x) + h \cdot k_2 \end{aligned}$$

Taylor-Reihe bis zur 2. Ordnung identisch mit exakter Lösung:

$$y(x+h) = y(x) + h \cdot y'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x) + \mathcal{O}(h^3)$$

Allgemeines Runge-Kutta-Verfahren:

$$y(x+h) = y(x) + h \cdot \sum_i b_i k_i$$

Automatische Schrittweite

Berechne zwei numerische Lösungen mit unterschiedlicher Ordnung:

$$\tilde{y}_p(x+h) = y(x+h) + \mathcal{O}(h^{p+1})$$
$$\tilde{y}_{p+1}(x+h) = y(x+h) + \mathcal{O}(h^{p+2})$$

Schätze Diskretisierungsfehler ab:

$$\Delta = \tilde{y}_{p+1}(x+h) - \tilde{y}_p(x+h) \approx C_1(x)h^{p+1}$$

Berechne für Toleranz *tol* eine optimale Schrittweite:

$$h_{neu} = h_{alt} \left| \frac{tol}{\Delta} \right|^{\frac{1}{p+1}}$$

Praktisch sogar noch besser:

$$h_{neu} = h_{alt}\alpha \left| \frac{tol|h_{alt}|}{\Delta} \right|^{\frac{1}{p+1}}$$

Numerische Experimente

Hier wurde das **Dormand-Prince-Verfahren** eingesetzt:

- Ergebnisse 5.ter, Fehlerabschätzung 4.ter Ordnung
- Schrittweitensteuerung: abs. Fehler $\leq 10^{-6}$, rel. Fehler $\leq 10^{-4}$

$\Rightarrow$ Größte Abweichung numerische und analytische Lösung $\approx 10^{-7}$

Untersuchungsmethode:

- Bestimme für Zufallswanderer ($M = 200$) nach 1000 Zeiteinheiten:
  1. Peakhöhe
  2. Peakbreite (bis $36,79\%$ des Maximums)
  3. Wandergeschwindigekit des Peaks
- Wiederhole für verschiedene $w_+, w_- \in [0,1]$
- Insgesamt Daten von $1001^2 - 1 = 10200$ Zufallswanderern

Geschwindigkeit

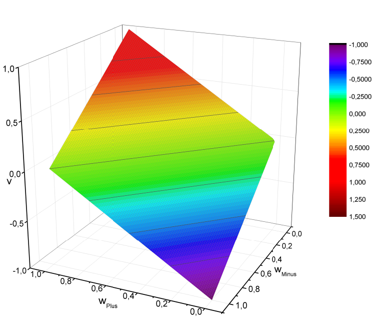

Abbildung: Wandergeschwindigkeit über w_+ und w_-

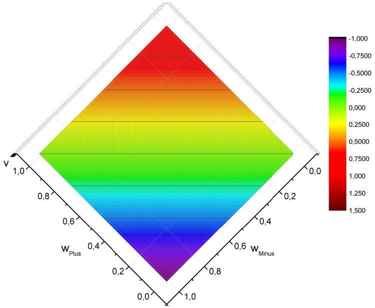

Abbildung: Wandergeschwindigkeit über w_+ und w_- projiziert in eine Ebene

$$\boxed{w_+ - w_- = const. \Leftrightarrow v = const. \quad \text{Sogar} \quad w_+ - w_- = v} \tag{3}$$

Peakbreite

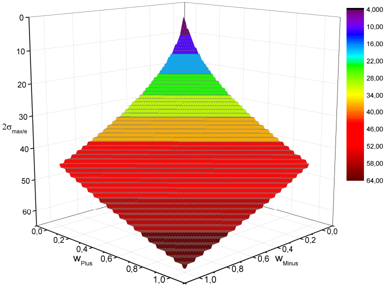

Abbildung: Peakbreite über w_+ und w_-, Stufen bedingt durch diskrete Orte

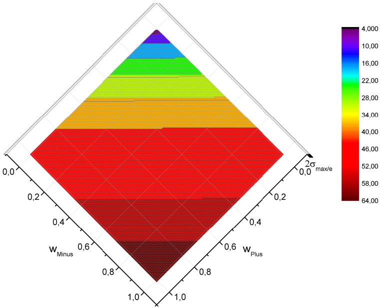

Abbildung: Peakbreite über w_+ und w_- projiziert in eine Ebene, leichte, rundungsbedingte Asymmetrien

$$\boxed{w_+ + w_- = const. \Leftrightarrow \text{Peakbreite} = const.} \tag{4}$$

Peakhöhe

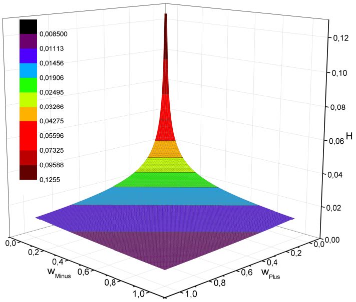

Abbildung: Peakhöhe über w_+ und w_-, Farbskala logarithmisch

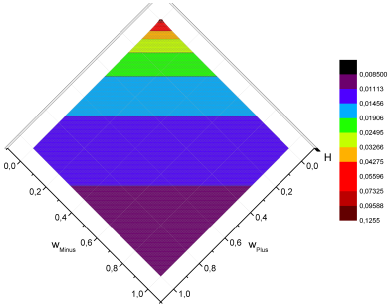

Abbildung: Peakhöhe über w_+ und w_- projiziert in eine Ebene

$$\boxed{w_+ + w_- = const. \Leftrightarrow \text{Peakhöhe} = const.} \tag{5}$$

Resultate im Überblick

Deterministische Einflüsse $\rightarrow$ gerichtete Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit v, bestimmt durch

$$\boxed{w_+ - w_- = v}$$

Stochastische Einflüsse $\rightarrow$ Ausdehnung von Wahrscheinlichkeiten über den ganzen Kreis, Verbreiterung des Peaks (halbe Breite $\sigma_{max/e}$) + Absinken der Peakhöhe H. Beides wird bestimmt durch:

$$\boxed{w_+ + w_- = D' \Rightarrow \quad H = H(D') \text{ und } \sigma_{max/e} = \sigma_{max/e}(D')}$$