Komplexe Bruchrechnung

1 Kartesische Darstellung komplexer Zahlen

Eine komplexe Zahl z lässt sich verschieden darstellen. Eine Darstellung ist die kartesische Darstellung in Realteil $\Re(z) = x$ und Imaginärteil $\Im(z) = y$:

$$z = x + i \cdot y$$

Mit komplexen Zahlen lässt sich wie mit reellen Zahlen rechnen.

1.1 Addition und Subtraktion

Die Addition und Subtraktion zweier komplexer Zahlen $z_1 = x_1 + i \cdot y_1, z_2 = x_2 + i \cdot y_2$ in kartesischer Darstellung:

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + i \cdot y_1) + (x_2 + i \cdot y_2) = (x_1 + x_2) + i \cdot (y_1 + y_2)$$
$$z = z_1 - z_2 = (x_1 + i \cdot y_1) - (x_2 + i \cdot y_2) = (x_1 - x_2) + i \cdot (y_1 - y_2)$$

Die durch Addition/Subtraktion erhaltene komplexe Zahl ist wieder in kartesischer Darstellung; die einzelnen Komponenten (Realteile und Imaginärteile) werden addiert/subtrahiert.

1.2 Multiplikation

Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen $z_1 = x_1 + i \cdot y_1, z_2 = x_2 + i \cdot y_2$ in kartesischer Darstellung:

$$\begin{aligned} z = z_1 \cdot z_2 = (x_1 + i \cdot y_1) \cdot (x_2 + i \cdot y_2) &= x_1 \cdot x_2 + i \cdot x_1 \cdot y_2 + i \cdot y_1 \cdot x_2 + i^2 \cdot y_1 \cdot y_2 \\ &= x_1 \cdot x_2 + i \cdot x_1 \cdot y_2 + i \cdot y_1 \cdot x_2 - \cdot y_1 \cdot y_2 \\ &= (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i \cdot (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \end{aligned}$$

Die durch Multiplikation erhaltene komplexe Zahl lässt sich nach einfachem Sortieren wieder in kartesische Darstellung schreiben; mit dem Realteil $\Re(z) = x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2$ und dem Imaginärteil $\Im(z) = x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1$.

1.3 Division

Die Division zweier komplexer Zahlen $z_1 = x_1 + i \cdot y_1, z_2 = x_2 + i \cdot y_2$ in kartesischer Darstellung:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + i \cdot y_1}{x_2 + i \cdot y_2}$$

Die durch Division erhaltene komplexe Zahl lässt sich nicht so einfach in kartesische Darstellung bringen; die Umformung in kartesische Darstellung erfordert einen Trick, der in dem folgenden Abschnitt beschrieben wird.

2 Methode: Komplexer Brüche in kartesische Darstellung

Aufgabenstellung: Stelle die komplexe Zahl $z = \frac{x_1 + i \cdot y_1}{x_2 + i \cdot y_2}$ kartesisch dar und weise den Real- und Imaginärteil aus!

1. Komplexe Zahl in die Form $z = \frac{x_1 + i \cdot y_1}{x_2 + i \cdot y_2}$ umschreiben (sofern noch nicht gegeben)
2. Erweitern mit der konjugert Komplexen des Nenners (Ersetzt man in einer komplexen Zahl alle i mit $-i$ erhält man ihre konjugiert Komplexe)
3. Zähler und Nenner ausmultiplizieren
4. Komplexe Zahl als $z = x + i \cdot y$ schreiben
5. Realteil $\Re(z) = x$ und Imaginärteil $\Im(z) = y$

Beispiel: Stelle die komplexe Zahl $z = \frac{2-3i}{2i-3}$ kartesisch dar und weisen Sie den Real- und Imaginärteil aus!

1. Komplexe Zahl in die Form $z = \frac{x_1 + i \cdot y_1}{x_2 + i \cdot y_2}$ umschreiben:

$$z = \frac{2 - 3i}{2i - 3} = \frac{2 - 3i}{-3 + 2i}$$

2. Erweitern mit der konjugiert Komplexen des Nenners $\cdot \frac{-3-2i}{-3-2i}$:

$$z = \frac{2 - 3i}{-3 + 2i} \cdot \frac{-3 - 2i}{-3 - 2i}$$

3. Ausmultiplizieren:

$$z = \frac{2 - 3i}{-3 + 2i} \cdot \frac{-3 - 2i}{-3 - 2i} = \frac{(2 - 3i) \cdot (-3 - 2i)}{(-3 + 2i) \cdot (-3 - 2i)} = \frac{-6 - 4i + 9i + 6i^2}{9 - 4i^2} = \frac{-12 + 5i}{15}$$

4. Komplexe Zahl als $z = x + i \cdot y$ schreiben:

$$z = \frac{-12 + 5i}{15} = \frac{-12}{15} + \frac{5i}{15} = -\frac{4}{5} + i \cdot \frac{1}{3}$$

5. Real- und Imaginärteil:

$$\Rightarrow \Re(z) = -\frac{4}{5} \qquad \Im(z) = \frac{1}{3}$$

3 Übungsaufgaben

Stelle die folgenden komplexen Zahlen kartesischer dar und weisen Sie den Real- und Imaginärteil aus!

1. $z = \frac{4i+1}{2+i}$
2. $z = \frac{-1-i}{5-2i}$
3. $z = \frac{3-2i}{3i-2}$

Lösung:

1. $z = \frac{4i+1}{2+i}$

   (a) Komplexe Zahl in die Form $z = \frac{x_1+i\cdot y_1}{x_2+i\cdot y_2}$ umschreiben:

   $$z = \frac{4i+1}{2+i} = \frac{1+4i}{2+i}$$

   (b) Erweitern mit der konjugiert Komplexen des Nenners $\cdot\frac{2-i}{2-i}$:

   $$z = \frac{1+4i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i}$$

   (c) Ausmultiplizieren:

   $$z = \frac{1+4i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{(1+4i)\cdot(2-i)}{(2+i)\cdot(2-i)} = \frac{2-i+8i-4i^2}{4-i^2} = \frac{6+7i}{5}$$

   (d) Komplexe Zahl als $z = x + i \cdot y$ schreiben:

   $$z = \frac{6+7i}{5} = \frac{6}{5} + i \cdot \frac{7}{5}$$

   (e) Real- und Imaginärteil:

   $$\Rightarrow \Re(z) = \frac{6}{5} \qquad \Im(z) = \frac{7}{5}$$

2. $z = \frac{-1-i}{5-2i}$

   $$\begin{aligned} z &= \frac{-1-i}{5-2i} = \\ &= \frac{-1-i}{5-2i} \cdot \frac{5+2i}{5+2i} = \\ &= \frac{-5-2i-5i-2i^2}{25-4i^2} = \frac{-3-7i}{29} = \\ z &= -\frac{3}{29} + i \cdot \frac{-7}{29} \end{aligned}$$

   $$\Rightarrow \Re(z) = -\frac{3}{29} \qquad \Im(z) = -\frac{7}{29}$$

3. $z = \frac{3-2i}{3i-2}$

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{3-2i}{3i-2} = \frac{3-2i}{-2+3i} = \\
&= \frac{3-2i}{-2+3i} \cdot \frac{-2-3i}{-2-3i} = \\
&= \frac{-6+4i-9i+6i^2}{4-9i^2} = \frac{-12-5i}{15} = \\
z &= -\frac{4}{5} + i \cdot \frac{-1}{3}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \Re(z) = -\dfrac{4}{5}$ $\qquad\qquad$ $\Im(z) = -\dfrac{1}{3}$