Kettenregel

1 Motivation

Eine sehr praktische Ableitungsregel ist die sogenannte Kettenregel. Sie ermöglicht kompliziertere Funktionen, etwa verschachtelte Funktionen wie $f_1(x) = \sin\big(\cos(x^2)\big)$ oder $f_2(x) = \big(\ln(x)\big)^x$ abzuleiten. Aber selbst beim Ableiten „einfacher“ Funktionen wie $f_3(x) = e^{2x}$ kommt man um die Kettenregel nur schwer herum.

2 Die Kettenregel

Für die Ableitung verschachtelter Funktionen der Form $f\big(g(x)\big)$ gilt:

$$f'\big(g(x)\big) = \frac{d}{dx} f\big(g(x)\big) = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

Ein bekannter Satz zur Kettenregel lautet: „Ableitung = äußere Ableitung · innere Ableitung“.

2.1 Beispiel: $f(x) = \big(2 - x^2\big)^3$

Anhand des Beispiels $f(x) = \big(2 - x^2\big)^3$ wollen wir die Kettenregel verdeutlichen:
Möchte man zu einem Argument x den zugehörigen Funktionswert bestimmen, quadriert man zunächst das Argument, addiert das Ergebnis mit 2 und rechnet zum Schluss alles hoch 3. Die zuletzt durchgeführte Operation „hoch 3“ also $(\ )^3$ wählen wir zur Berechnung der äußere Ableitung. Die restlichen Operationen $2 - x^2$ nutzen wir zur Berechnung der inneren Ableitung.

1. **g-Identifikation:** Wir definieren $2 - x^2$ als $g(x)$: $g(x) = 2 - x^2$.
2. **$f(g)$-Umschreibung:** Mit $g(x) = 2 - x^2$ schreiben wir $f(x)$ als $f(g)$: $f(g) = g^3$.
3. **Äußere Ableitung:** Die äußere Ableitung $\frac{df}{dg}$ wird nun ausgerechnet:

   $$\frac{df}{dg} = \big(g^3\big)' = 3g^2$$

4. **x-Umstellung:** Für das Ergebnis der Ableitung ist es notwendig, das Ergebnis der äußere Ableitung in Abhängigkeit von x zu schreiben: $3g^2 = 3 \cdot \big(2 - x^2\big)^2$

5. **Innere Ableitung:** Nun ist noch die innere Ableitung $\frac{dg}{dx}$ zu bestimmen:

$$\frac{dg}{dx} = \left(2 - x^2\right)' = -2x$$

6. **Produktbildung:** Durch Bildung des Produktes der äußeren Ableitung mit der inneren Ableitung erhalten wir die Ableitung $f'(x)$:

$$f'(x) = 3 \cdot \left(2 - x^2\right)^2 \cdot (-2x) = -6x \cdot \left(2 - x^2\right)^2 = -6x \cdot (4 - 4x^2 + x^4) = \underline{-24x + 24x^3 - 6x^5}$$

Überprüfen wir unser Ergebnis, indem wir die Funktion mit den bekannten Summen-, Faktor- und Potenzregel ableiten:

$$f'(x) = \left(\left(2 - x^2\right)^3\right)' = \left(8 - 12x^2 + 6x^4 - x^6\right)' = \underline{-24x + 24x^3 - 6x^5}$$

Die durch einfache Methoden gefundene Ableitung entspricht der durch die Kettenregel erhaltene Ableitung. ✓

Bemerkung: Um verschachtelte Funktionen wie $f(x) = \sin\big(\cos(x)\big)$ oder $g(x) = u(x)^{v(x)}$ abzuleiten, tut man gut daran, sich folgende Ableitungen zu merken:

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{e}^x\right)' &= \mathrm{e}^x & \qquad \big(\ln(x)\big)' &= \frac{1}{x} \\ \big(\sin(x)\big)' &= \cos(x) & \qquad \big(\cos(x)\big)' &= -\sin(x) \\ \big(\sinh(x)\big)' &= \cosh(x) & \qquad \big(\cosh(x)\big)' &= \sinh(x) \end{aligned}$$

3 Methode: Ableiten mit Hilfe der Kettenregel

Aufgabenstellung: Leite die Funktion $f(x) = f\big(g(x)\big)$ nach x ab.

1. g-Identifikation
2. $f(g)$-Umschreibung
3. Äußere Ableitung
4. x-Umstellung
5. Innere Ableitung
6. Produktbildung
   $\left(f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}\right)$

Beispiel: Bilde die Ableitung der Funktion $f(x) = \sin(x^2)$.

1. **g-Identifikation:**

$$f(x) = \sin(x^2)$$
$$g(x) = x^2$$

2. $f(g)$**-Umschreibung:**

$$f(g) = \sin(g)$$

3. **Äußere Ableitung:**

$$\frac{df}{dg} = \big(\sin(g)\big)' = \cos(g)$$

4. x**-Umstellung:**

$$\cos(g) = \cos(x^2)$$

5. **Innere Ableitung:**

$$\frac{dg}{dx} = \big(x^2\big)' = 2x$$

6. **Produktbildung:**

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} = \cos(x^2) \cdot 2x = \underline{\underline{2x \cdot \cos(x^2)}}$$

Hat man etwas Übung mit der Kettenregel und die Substitution mit g überblickt, kann man wie folgt „schneller“ zur Lösung kommen:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin(x^2) \\
f'(x) &= \big(\sin(x^2)\big)' && |\text{Kettenregel mit } g(x) = x^2 \\
f'(x) &= \cos(x^2) \cdot \big(x^2\big)' \\
&\underline{\underline{f'(x) = 2x \cdot \cos(x^2)}}
\end{aligned}$$

4 Übungsaufgaben

4.1 Verschachtelte Funktionen

Leite die folgenden Funktionen nach x ab:

1. $f_1(x) = \frac{1}{1+x}$
2. $f_2(x) = \sin^2(x)$
3. $f_3(x) = \mathrm{e}^{2x}$
4. $f_4(x) = \sin\big(\cos(x^2)\big)$

Lösung:

1. $f_1(x) = \frac{1}{1+x}$

   (a) **g-Identifikation:**

   $$f_1(x) = \frac{1}{1+x}$$
   $$g(x) = 1 + x$$

   (b) **$f(g)$-Umschreibung:**

   $$f_1(g) = \frac{1}{g}$$

   (c) **Äußere Ableitung:**

   $$\frac{df_1}{dg} = \left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{1}{g^2}$$

   (d) **x-Umstellung:**

   $$-\frac{1}{g^2} = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

   (e) **Innere Ableitung:**

   $$\frac{dg}{dx} = (1+x)' = 1$$

   (f) **Produktbildung:**

   $$f_1'(x) = \frac{df_1}{dx} = \frac{df_1}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} = -\frac{1}{(1+x)^2} \cdot 1 = \underline{\underline{-\frac{1}{(1+x)^2}}}$$

2. $f_2(x) = \sin^2(x)$

   $$f_2(x) = \sin^2(x) = \big(\sin(x)\big)^2$$
   $$f_2'(x) = \left(\big(\sin(x)\big)^2\right)' \qquad |\text{Kettenregel mit } g(x) = \sin(x)$$
   $$f_2'(x) = 2 \cdot \big(\sin(x)\big)^1 \cdot \big(\sin(x)\big)'$$
   $$\underline{\underline{f_2'(x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)}}$$

3. $f_3(x) = \mathrm{e}^{2x}$

   $$f_3(x) = \mathrm{e}^{2x}$$
   $$f_3'(x) = \left(\mathrm{e}^{2x}\right)' \qquad |\text{Kettenregel mit } g(x) = 2x$$
   $$f_3'(x) = \left(\mathrm{e}^{2x}\right) \cdot (2x)'$$
   $$\underline{\underline{f_3'(x) = \mathrm{e}^{2x} \cdot 2 = 2 \cdot \mathrm{e}^{2x}}}$$

4. $f_4(x) = \sin\big(\cos(x^2)\big)$

$$
\begin{aligned}
f_4(x) &= \sin\left(\cos(x^2)\right) \\
f_4'(x) &= \Big(\sin\left(\cos(x^2)\right)\Big)' && |\text{Kettenregel mit } g(x) = \cos(x^2) \\
f_4'(x) &= \Big(\cos\big(\cos(x^2)\big)\Big) \cdot \big(\cos(x^2)\big)' && |\big(\cos(x^2)\big)' \to \big(\cos(x^2)\big)' \text{ Kettenregel mit } \tilde{g}(x) = x^2 \\
f_4'(x) &= \cos\big(\cos(x^2)\big) \cdot \big(-\sin(x^2)\big) \cdot \big(x^2\big)' \\
&\underline{\underline{f_4'(x) = -2x \cdot \cos\big(\cos(x^2)\big) \cdot \sin(x^2)}}
\end{aligned}
$$

4.2 Die Funktion: $g(x) = u(x)^{v(x)}$

Untersuche die Funktion $g(x) = u(x)^{v(x)}$:

1. Leite den allgemeinen Fall $g(x) = u(x)^{v(x)}$ nach x ab.
2. Setze $u(x) = x$ und $v(x) = m$ in die in (a) erhaltene Lösung ein und vergleiche das Ergebnis mit der Ableitung von $g_1(x) = x^m$.
3. Setze $u(x) = x$ und $v(x) = x^2$ in die in (a) erhaltene Lösung ein und vergleiche das Ergebnis mit der Ableitung von $g_1(x) = x^{x^2}$.
4. Setze $u(x) = \ln(x)$ und $v(x) = x$ in die in (a) erhaltene Lösung ein und vergleiche das Ergebnis mit der Ableitung von $g_1(x) = \big(\ln(x)\big)^x$.

Lösung:

1. allgemein:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= u(x)^{v(x)} = \big(u(x)\big)^{v(x)} = \big(\mathrm{e}^{\ln(u(x))}\big)^{v(x)} \\
f(x) &= \mathrm{e}^{\ln(u(x))\cdot v(x)} \\
f'(x) &= \big(\mathrm{e}^{\ln(u(x))\cdot v(x)}\big)' && |\text{Kettenregel mit } g(x) = \ln\big(u(x)\big) \cdot v(x) \\
f'(x) &= \big(\mathrm{e}^{\ln(u(x))\cdot v(x)}\big) \cdot \Big(\ln\big(u(x)\big) \cdot v(x)\Big)' && |\text{Produktregel} \\
f'(x) &= \big(\mathrm{e}^{\ln(u(x))\cdot v(x)}\big) \cdot \bigg(\Big(\ln\big(u(x)\big)\Big)' \cdot v(x) + \ln\big(u(x)\big) \cdot v'(x)\bigg) && |\text{für } \Big(\ln\big(u(x)\big)\Big)' \text{ Kettenregel mit } \tilde{g}(x) = u(x) \\
f'(x) &= \big(\mathrm{e}^{\ln(u(x))\cdot v(x)}\big) \cdot \Big(\frac{1}{u(x)} \cdot u'(x) \cdot v(x) + \ln\big(u(x)\big) \cdot v'(x)\Big) && |\text{vereinfachen} \\
&\underline{\underline{f'(x) = u(x)^{v(x)} \cdot \Big(\frac{1}{u(x)} \cdot u'(x) \cdot v(x) + \ln\big(u(x)\big) \cdot v'(x)\Big)}}
\end{aligned}
$$

2. $u(x) = x$ und $v(x) = m$

$$f(x) = x^m \qquad |\text{einsetzen in Lösung von Aufgabe (a)}$$
$$f'(x) = x^m \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot x' \cdot m + \ln(x) \cdot m'\right)$$
$$f'(x) = x^m \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot 1 \cdot m + \ln(x) \cdot 0\right)$$
$$f'(x) = x^m \cdot \frac{1}{x} \cdot m$$
$$\underline{\underline{f'(x) = m \cdot x^{m-1}}}$$

$$f(x) = x^m \qquad |\text{direkt ableiten}$$
$$\underline{\underline{f'(x) = m \cdot x^{m-1}}} \checkmark$$

3. $u(x) = x$ und $v(x) = x^2$

$$f(x) = x^{x^2} \qquad |\text{einsetzen in Lösung von Aufgabe (a)}$$
$$f'(x) = x^{x^2} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot x' \cdot x^2 + \ln(x) \cdot \left(x^2\right)'\right)$$
$$f'(x) = x^{x^2} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot 1 \cdot x^2 + \ln(x) \cdot 2x\right)$$
$$\underline{\underline{f'(x) = x^{x^2} \cdot \left(x + 2x \cdot \ln(x)\right)}}$$

$$f(x) = x^{x^2} \qquad |\text{direkt ableiten}$$
$$f(x) = \mathrm{e}^{\ln(x) \cdot x^2}$$
$$f'(x) = \left(\mathrm{e}^{\ln(x) \cdot x^2}\right)' \qquad |\text{Kettenregel mit } g(x) = \ln(x) \cdot x^2$$
$$f'(x) = \left(\mathrm{e}^{\ln(x) \cdot x^2}\right) \cdot \left(\ln(x) \cdot x^2\right)' \qquad |\text{Produktregel}$$
$$f'(x) = \left(\mathrm{e}^{\ln(x) \cdot x^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot x^2 + \ln(x) \cdot 2x\right) \qquad |\text{vereinfachen}$$
$$\underline{\underline{f'(x) = x^{x^2} \cdot \left(x + 2x \cdot \ln(x)\right)}} \checkmark$$

4. $u(x) = \ln(x)$ und $v(x) = x$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \ln(x)^x && |\text{einsetzen in Lösung von Aufgabe (a)}\\
f'(x) &= \big(\ln(x)\big)^x \cdot \Big(\frac{1}{\ln(x)} \cdot \big(\ln(x)\big)' \cdot x + \ln\big(\ln(x)\big) \cdot x'\Big)\\
f'(x) &= \big(\ln(x)\big)^x \cdot \Big(\frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x} \cdot x + \ln(\ln(x)) \cdot 1\Big)\\
&\underline{\underline{f'(x) = \ln(x)^x \cdot \Big(\frac{1}{\ln(x)} + \ln\big(\ln(x)\big)\Big)}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \big(\ln(x)\big)^x && |\text{direkt ableiten}\\
f(x) &= \mathrm{e}^{\ln(\ln(x))\cdot x}\\
f'(x) &= (\mathrm{e}^{\ln(\ln(x))\cdot x})' && |\text{Kettenregel mit } g(x) = \ln\big(\ln(x)\big) \cdot x\\
f'(x) &= (\mathrm{e}^{\ln(\ln(x))\cdot x}) \cdot \Big(\ln\big(\ln(x)\big) \cdot x\Big)' && |\text{Produktregel}\\
f'(x) &= (\mathrm{e}^{\ln(\ln(x))\cdot x}) \cdot \bigg(\Big(\ln\big(\ln(x)\big)\Big)' \cdot x + \ln\big(\ln(x)\big) \cdot 1\bigg) && |\text{für } \Big(\ln\big(\ln(x)\big)\Big)' \text{ Kettenregel mit } \tilde{g}(x) = \ln(x)\\
f'(x) &= (\mathrm{e}^{\ln(\ln(x))\cdot x}) \cdot \Big(\frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x} \cdot x + \ln\big(\ln(x)\big) \cdot 1\Big) && |\text{vereinfachen}\\
&\underline{\underline{f'(x) = \big(\ln(x)\big)^x \cdot \Big(\frac{1}{\ln(x)} + \ln\big(\ln(x)\big)\Big) \checkmark}}
\end{aligned}
$$