# Inversionsregel

## 1 Motivation

Eine eher sonderbare, jedoch sehr praktische Ableitungsregel, gerade beim Ableiten von Arkusfunktionen stellt die sogenannte Inversionsregel dar. Sie ermöglicht es, eine Funktion leicht abzuleiten, sofern man die Ableitung ihrer Umkehrfunktion kennt. Neben Arkusfunktionen ist die Logarithmusfunktion ein typisches Musterbeispiel.

## 2 Die Inversionsregel

Für die Ableitung $y' = f'(x)$ der Funktion $y = f(x)$ mit der Umkehrfunktion $x = f^{-1}(y)$ und ihrer Ableitung $x' = (f^{-1})'(y)$ gilt:

$$f'(x) = y' = \frac{d}{dx}y = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}x} = \frac{1}{\frac{d}{dy}f^{-1}(y)} = \frac{1}{(f^{-1})'(y)}$$

Ein bekannter Satz zur Inversionsregel lautet: „Ableitung = 1 durch Ableitung der Umkehrfunktion“.
Anhand des Beispiels $f(x) = \sqrt[3]{x}$ wollen wir die Invesionsregel verdeutlichen:

1. Hierzu stellen wir die Funktion $y = f(x)$ nach $x$ um: $f(x) = y = \sqrt[3]{x} \to x = y^3$
   $x$ ist nun abhängig von $y$.
2. Leiten wir nun $x$ nach $y$ ab: $\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}y^3 = 3y^2$
3. Für das letzliche Endergebnis $f'(x)$ wird es nötig sein, die erhaltende Ableitung nur als Funktion von $x$ zu schreiben: $\frac{dx}{dy} = 3y^2 = 3(\sqrt[3]{x})^2 = 3\sqrt[3]{x^2}$
4. Der Kehrwert der Ableitung $\frac{dx}{dy}$ entspricht nun der Ableitung $f'(x) = \frac{dy}{dx}$:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \underline{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}$$

Überprüfen wir unser Ergebnis, indem wir die Funktion mit der bekannten Potenzregel ableiten:

$$f'(x) = (\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \underline{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}$$

Die durch einfache Methoden gefundene Ableitung entspricht der durch die Inversionsregel erhaltene Ableitung. ✓

*Bemerkung:* Um Arkusfunktionen wie $f(x) = \arcsin(x)$ oder Logarithmusfunktionen wie $g(x) = \ln(x)$ abzuleiten, tut man gut daran, sich folgende Ableitungen zu merken:

$$
\begin{array}{ccc}
(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x & (\sin(x))' = \cos(x) & (\cos(x))' = -\sin(x) \\
(\sinh(x))' = \cosh(x) & (\cosh(x))' = \sinh(x) &
\end{array}
$$

# 3 Methode: Ableiten mit Hilfe der Inversionsregel

*Aufgabenstellung:* Leite die Funktion $f(x)$ nach $x$ ab. (Die Umkehrfunktion $f^{-1}$ existiert und ihre Ableitung sei bekannt.)

1. Schreibe $f(x) = y$ auf und stelle sie nach $x$ um.
2. Leite $x$ nach $y$ ab.
3. Schreibe diese Ableitung nur als Funktion von $x$. Nutze dazu aus, dass $y = f(x)$ ist.
4. Bilde den Kehrwert, das ist die Ableitung von $f(x)$.

*Beispiel:* Bilde die Ableitung der Funktion $f(x) = \ln(x)$.

1. Schreibe $f(x) = y$ auf und stelle sie nach $x$ um:

$$
\begin{aligned}
f(x) = y = \ln(x) \qquad & |\mathrm{e}^{(\ )} \\
\mathrm{e}^y = x \qquad & |\text{also} \\
x = \mathrm{e}^y \qquad &
\end{aligned}
$$

2. Leite $x$ nach $y$ ab:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}\mathrm{e}^y = \mathrm{e}^y$$

3. Schreibe diese Ableitung nur als Funktion von $x$. Nutze dazu aus, dass $y = f(x)$ ist.

$$\frac{dx}{dy} = \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{\ln(x)} = x$$

4. Bilde den Kehrwert, das ist die Ableitung von $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x}$$

# 4 Übungsaufgaben

## 4.1 Ableitung von Umkehrfunktionen

Leite die folgenden Funktionen nach $x$ ab:

1. $f_1(x) = \arcsin(x)$
2. $f_2(x) = \arctan(x)$
3. $f_3(x) = \log_2(x)$

**Lösung:**

1. $f_1(x) = \arcsin(x)$

   (a) Schreibe $f_1(x) = y$ auf und stelle sie nach $x$ um:

   $$\begin{aligned} f_1(x) = y &= \arcsin(x) && |\sin(\ ) \\ \sin(y) &= x && |\text{also} \\ x &= \sin(y) \end{aligned}$$

   (b) Leite $x$ nach $y$ ab:

   $$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}\sin(y) = \cos(y)$$

   (c) Schreibe die erhaltene Ableitung nur als Funktion von $x$. Nutze dazu aus, dass $y = f(x)$ ist.

   $$\frac{dx}{dy} = \cos(y) = \cos(\arcsin(x))$$

   (d) Der Kehrwert der nach $x$ umgestellten erhaltenen Ableitung entspricht der gesuchten Ableitung $f'(x)$.

   $$\begin{aligned} f_1'(x) &= \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \\ f_1'(x) &= \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} && |\text{wegen } \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \text{ folgt } \cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)} \\ f_1'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} && |\sin^2(\arcsin(x)) = (\sin(\arcsin(x)))^2 = x^2 \\ f_1'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

2. $f_2(x) = \arctan(x)$

(a) Schreibe $f_2(x) = y$ auf und stelle sie nach $x$ um:

$$\begin{aligned} f_2(x) = y &= \arctan(x) && |\tan(\ ) \\ \tan(y) &= x && |\text{also} \\ x &= \tan(y) \end{aligned}$$

(b) Leite $x$ nach $y$ ab:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}\tan(y) = \frac{d}{dy}\frac{\sin(y)}{\cos(y)} = \frac{\cos^2(y) + \sin^2(y)}{\cos^2(y)} = 1 + \tan^2(y)$$

(c) Schreibe diese Ableitung nur als Funktion von $x$. Nutze dazu aus, dass $y = f(x)$ ist.

$$\frac{dx}{dy} = 1 + \tan^2(y) = 1 + \tan^2(\arctan(x)) = 1 + (\tan(\arctan(x)))^2 = 1 + x^2$$

(d) Bilde den Kehrwert, das ist die Ableitung von $f(x)$:

$$f_2'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \underline{\underline{\frac{1}{1+x^2}}}$$

3. $f_3(x) = \log_2(x)$

(a) Schreibe $f_3(x) = y$ auf und stelle sie nach $x$ um:

$$\begin{aligned} f_3(x) = y &= \log_2(x) && |2^{(\ )} \\ 2^y &= x && |\text{also} \\ x &= 2^y \end{aligned}$$

(b) Leite $x$ nach $y$ ab:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}\tan(y) = \frac{d}{dy}2^y = \frac{d}{dy}e^{\ln(2)\cdot y} = e^{\ln(2)\cdot y} \cdot \ln(2) = 2^y \cdot \ln(2)$$

(c) Schreibe diese Ableitung nur als Funktion von $x$. Nutze dazu aus, dass $y = f(x)$ ist.

$$\frac{dx}{dy} = 2^y \cdot \ln(2) = x \cdot \ln(2) = \ln(2) \cdot x$$

(d) Bilde den Kehrwert, das ist die Ableitung von $f(x)$:

$$f_3'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \underline{\underline{\frac{1}{\ln(2)\cdot x}}}$$

## 4.2 Lineare Umkehrfunktionen

Zeige mit Hilfe der Inversionsregel, dass bei linearen Funktionen $f(x) = m \cdot x + n$ mit $m \neq 0$ mit der Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = M \cdot x + N$ gilt: $m = \frac{1}{M}$.

**Lösung:**

1. Zunächst benennen wir das Argument $x$ der Umkehrfunktion $f^{-1}$ um, damit Verwechslungen mit dem Argument $x$ der Funktion $f$ ausgeschlossen werden. Wir schreiben daher: $f^{-1}(y) = M \cdot y + N$. (Der Anstieg einer Funktion hat nichts mit der Bezeichnung der Variablen zu tun.)

2. Die Ableitungen der beiden Funktionen $f(x)$ und $f^{-1}(y)$ sind:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{df}{dx} = m \\ (f^{-1})'(y) &= \frac{df^{-1}}{dy} = M \end{aligned}$$

3. Wegen der Inversionsregel muss die Ableitung der Funktion $f(x)$ auch sein:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{\frac{df^{-1}(y)}{dy}} = \frac{1}{(f^{-1})'(y)} = \frac{1}{M}$$

4. Da die Ableitung von $f(x)$ jedoch $m$ ist, gilt durch Vergleichen:

$$m = \frac{1}{M} \text{ q.e.d.}$$