Messung an System 1, d.h. Observable $\hat{A}_1$ wirkt nur auf Zustände $|1n\rangle$

$$\langle A_1\rangle = Sp(\hat{\varrho}\hat{A}_1) = \sum_k \sum_l \langle 1k|\langle 2l|\,\hat{\varrho}\,\hat{A}_1|2l\rangle|1k\rangle$$

$$= \sum_k \langle 1k|\sum_l \langle 2l|\hat{\varrho}|2l\rangle \hat{A}_1|1k\rangle$$

$$= Sp_1\Big[\underbrace{\left(Sp_2\,\hat{\varrho}\right)}_{\hat{\varrho}_1}\hat{A}_1\Big]$$

$$\hat{\varrho}_1 = Sp_2\,\hat{\varrho} = \sum_l \overbrace{\langle 2l|\sum_n c_n|1n\rangle|2n\rangle}^{\delta_{nl}}$$

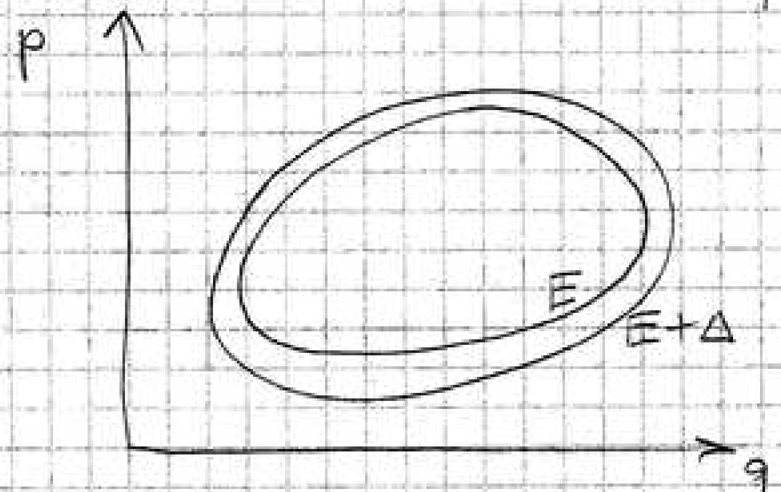
$$\times \sum_m c_m^* \underbrace{\langle 2m|\langle 1m|\,2l\rangle}_{\delta_{ml}}$$

$$= \sum_n |c_n|^2\,|1n\rangle\langle 1n|$$

→ $\hat{\varrho}_1$ beschreibt Gemisch, obwohl Gesamtsystem in reinem Zustand. Dies liegt daran, daß wir durch die Messung nur an System 1 den Zustand von System 2 nicht zur Kenntnis nehmen.

Mikrokanonisches Ensemble

Isoliertes System, feste Teilchenzahl N, festes Volumen V, Energie im Intervall $[E, E+\Delta]$, Δ klein, Ham. Funktion $H(q,p)$



$E = H(q,p)$
$\rightarrow$ Hyperfläche in Γ

Wenn sonst keine weiteren Informationen vorliegen, müssen wir annehmen, daß alle Zustände in der Energieschale

$$E \leq H(q,p) \leq E + \Delta$$

gleich wahrscheinlich sind.

$\rightarrow$ Mikrokanonische Verteilungsfunktion

$$\rho_{MK} = \begin{cases} (\Omega(E)\Delta)^{-1} & \text{für } E \leq H(q,p) \leq E+\Delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Omega(E)$ ist Normierungskonstante

Für $\Delta \rightarrow 0$

$$\rho_{MK} = \frac{1}{\Omega(E)}\,\delta(E - H(q,p)) \qquad (*)$$

$\Omega(E)$ folgt aus Normierung

$$\int \frac{dq\,dp}{h^{3N}\,N!}\,\varrho_{MK} = 1. \qquad (*)$$

Def Mittelwert

$$\langle A \rangle = \int \frac{dq\,dp}{h^{3N}\,N!}\,\varrho_{MK}\,A$$

Vorgriff auf QM

ununterscheidbare Teilchen (s. Gibbs; Mischentropie)

Def. $$d\Gamma = \frac{dq\,dp}{h^{3N}\,N!}$$

$(*)$ Seite 19 und $(*)$ Seite 20 $\Rightarrow$

$$\Omega(E) = \int d\Gamma\;\delta(E - H(q,p)). \qquad (**)$$

Das Volumen der Energieschale ist durch

$$\bar{\Omega}(E) = \int d\Gamma\;\Theta(E - H(q,p))$$

gegeben. Es gilt

$$\Omega(E) = \frac{d\bar{\Omega}(E)}{dE}$$

Quantenmechanisch:

$$\hat{\varrho}_{MK} = \sum_n p(E_n)\, |n\rangle\langle n|$$

Energie-eigenwert — Energieeigenzustand

$$p(E_n) = \begin{cases} (\Omega(E)\Delta)^{-1} & \text{für } E \le E_n \le E+\Delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Summe über Zustände in Energieschale

Aus $\mathrm{Sp}\,\hat{\varrho}_{MK} = 1 \Rightarrow \Omega(E) = \frac{1}{\Delta} {\sum_n}' 1$

In Analogie zu (*), Seite 19:

$$\hat{\varrho}_{MK} = \frac{1}{\Omega(E)}\, \delta(\hat{H} - E)$$

und (**), Seite 20

$$\Omega(E) = \mathrm{Sp}\, \delta(\hat{H} - E). \qquad (*)$$

QM: Spur $\longleftrightarrow$ Klassik: Integral über Phasenraum

<u>Klassisches ideales Gas</u>

$\Omega(E) = ?$, $\bar{\Omega}(E) = ?$

Wir werden sehen: aus $\bar{\Omega}(E) \to$ Thermodyn.

H des id. Gases: $H = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} + V_{\text{wand}}$

$$\Omega(E) = \frac{1}{h^{3N} N!} \int_V d^3q_1 \cdots \int d^3p_1 \cdots \delta\left(E - \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m}\right)$$

$$\bar{\Omega}(E) = \quad '' \quad '' \quad , \ \Theta(\quad '' \quad)$$

Vom Ort hängt der Integrand garnicht ab

$$\Rightarrow \bar{\Omega}(E) = \frac{V^N}{h^{3N} N!} \int d^3p_1 \cdots \Theta\left(E - \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m}\right)$$

$$= \frac{V^N}{h^{3N} N!} \int d\Omega_{3N} \int dp\, p^{3N-1}\, \Theta\left(E - \frac{p^2}{2m}\right)$$

Kugelkoordinaten

$$= \frac{V^N}{h^{3N} N!} \int d\Omega_{3N} \int_0^{\sqrt{2mE}} dp\, p^{3N-1}$$

$$= \frac{V^N}{h^{3N} N!} \frac{1}{3N} (2mE)^{3N/2} \int d\Omega_{3N}$$

Die Oberfläche der d-dimensionalen Einheitskugel lautet

$$\int d\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \qquad \Gamma(z) = \int dt\, t^{z-1} e^{-t}$$

Gammafunktion

$$\Rightarrow \bar{\Omega}(E) = \frac{V^N}{h^{3N} N!} \frac{1}{3N} (2mE)^{3N/2} \frac{2\pi^{3N/2}}{\underbrace{\Gamma\left(\frac{3N}{2}\right)}_{\left(\frac{3N}{2}-1\right)!}}$$

für gerade N

$$= \frac{V^N (2\pi m E)^{3N/2}}{h^{3N} N! \left(\frac{3N}{2}\right)!} \qquad (*)$$

Stirling $\quad N! \simeq N^N e^{-N} (2\pi N)^{1/2}$

$$\simeq N^N e^{-N}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{\Omega}(E) \simeq \frac{V^N (2\pi m E)^{3N/2}}{h^{3N} N^N e^{-N} \left(\frac{3N}{2}\right)^{3N/2} e^{-3N/2}}$$

$$= \left(\frac{V}{N}\right)^N \left(\frac{4\pi m E}{3h^2 N}\right)^{3N/2} e^{5N/2} \qquad (*)$$

$$= \bar{\Omega}(E, V, N) .$$

Mit $\Omega(E) = \dfrac{d\bar{\Omega}(E)}{dE}$

$$\overset{(*),\ S.\ 22}{\Rightarrow} \quad \Omega(E) = \frac{3N}{2} \frac{V^N (2\pi m E)^{\frac{3N}{2}-1}\, 2\pi m}{h^{3N} N! \left(\frac{3N}{2}\right)!} .$$

$$= \frac{V^N\, 2\pi m\, (2\pi m E)^{\frac{3N}{2}-1}}{h^{3N} N! \left(\frac{3N}{2}-1\right)!}$$

bzw.

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \quad \Omega(E) \simeq \left(\frac{V}{N}\right)^N \left(\frac{4\pi m E}{3h^2 N}\right)^{3N/2} e^{5N/2} \frac{1}{E} \frac{3N}{2}$$

Betrachte $\log(\Omega(E)\Delta) = \log(\bar{\Omega}(E)) + \log\left(\frac{1}{E}\frac{3N}{2}\right) + \log(\Delta)$

$$= \log(\bar{\Omega}(E)) + \mathcal{O}\left(\log \frac{\Delta}{E/N}\right)$$

$\log(\Omega)$ und $\log(\bar{\Omega}) \sim N$, $\mathcal{O}(\log \frac{\Delta}{E/N})$ steigt schwächer oder garnicht mit N

$$\Rightarrow \log(\Omega(E)\Delta) \simeq \log(\bar{\Omega}(E))$$

Fast das ganze Phasenraumvolumen der Hyperkugel $H(q,p) \leq E$ liegt an der Kugeloberfläche.

Quantenmechanische harmonische Oszillatoren

N gleiche, ungekoppelte Oszillatoren

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{N} \hbar\omega \left(\hat{a}_i^+ \hat{a}_i + \frac{1}{2} \right).$$

$\hat{a}_i^+$: Erzeugungsoperator eines Quants im Oszillator i

$\hat{a}_i$: Vernichtungsop...

(*) auf Seite 21:

$$\Omega(E) = \mathrm{Sp}\, \delta(\hat{H} - E)$$

Energieeigenzustände

$$= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} \langle n_1| \langle n_2| \cdots \langle n_N|\, \delta(\hat{H} - E)$$

$$\times |n_N\rangle |n_{N-1}\rangle \cdots |n_1\rangle$$

$$= \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} \delta\left(\sum_{i=1}^{N} \hbar\omega \left(n_i + \tfrac{1}{2}\right) - E \right),$$

denn $\hat{H}$ ist diagonal in den Eigenzuständen $|n_1\rangle |n_2\rangle \cdots |n_N\rangle$.

$$= \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} \int \frac{dk}{2\pi}\, e^{ik\left(\sum_i \hbar\omega (n_i + \frac{1}{2}) - E\right)}$$

$$= \int \frac{dk}{2\pi}\, e^{-ikE} \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{N} e^{\overbrace{ik\hbar\omega(n_i + \frac{1}{2})}^{a(n_i)}}$$

Dieser Ausdruck hat die Struktur