Statistische Physik / 06.07.2011 / R.M.

S. 167

Diskrete Master-Gleichung

Beispiele aus der Finanzmathematik, Einfluß der Randbedingungen, 3-Niveau-System

$$\boxed{\frac{d}{dt}p(n,t) = \sum_{n' \neq n} \left\{ w(n,n')\,p(n',t) - w(n',n)\,p(n,t) \right\}}$$

$p(n,t) \Rightarrow$ Wahrscheinlichkeit, System ist im Zustand n zum Zeitpunkt t

$w(n,n') \Rightarrow$ Übergangsrate vom Zustand n' in den Zustand $n \neq n'$
homogene Rate, d.h. keine explizite Zeitabhängigkeit

Ein-Schritt-Prozeß $\Rightarrow$ nur Übergänge zwischen nächsten Nachbarn möglich

$$n \begin{array}{l} \nearrow n+1 \\ \searrow n-1 \end{array} \Big\} \; n \pm 1$$

Anfangsbedingung $p(n,t=0) = \delta_{n,n_0}$

Randbedingungen $\rightarrow$ reflektierender Rand
Randbedingungen $\rightarrow$ absorbierender Rand

S. 168

Beispiel nach R. Weißbach: „Insolvenzvorhersage mit nur einem Parameter" (2011)

3-Niveau-System: $n = 1, 2, 3$

$n = 1$ Risikoklasse Nr. 1 (kein Risiko)

$n = 2$ mittlere Risikoklasse Nr. 2

$n = 3$ extrem hohes Risiko (Bankrott)

Anfangsbedingung: $P(n, t=0) = \delta_{1,n}$

(Kreditausreichung, weil Bank den Kunden als solvent einschätzt)

Übergänge nur zwischen benachbarten Risikoklassen (Ein-Schritt-Prozeß)

Alle Übergangsraten sind konstant und gleich $\rightarrow$ $w_{n,n'} = \frac{1}{\tau}$ falls $n' = n \pm 1$

$\rightarrow$ folglich nur <u>ein</u> Parameter τ

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} P(1,t) \\ P(2,t) \\ P(3,t) \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} P(1,t) \\ P(2,t) \\ P(3,t) \end{pmatrix} \; : \; \boxed{\frac{d}{dt}\vec{P}(t) = W\,\vec{P}(t)}$$

Mastergleichung in Vektor-Matrix-Notation

$\uparrow$

Markov-Prozeß

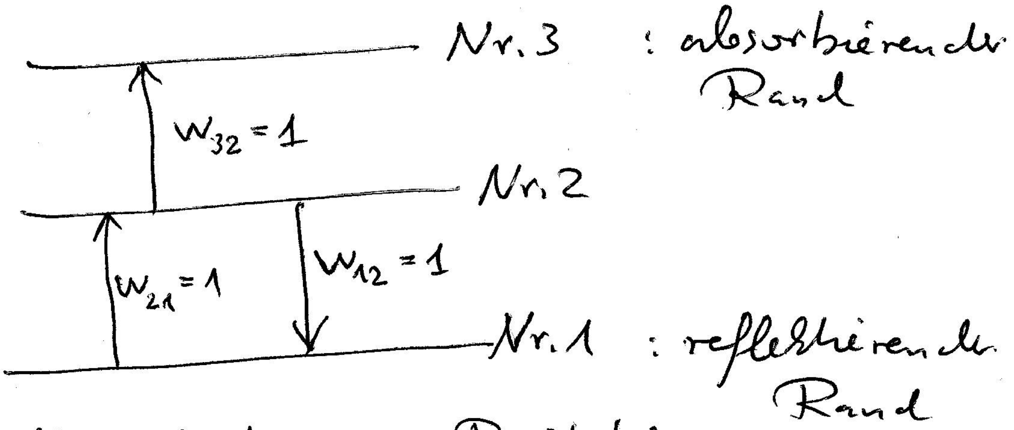
$$\text{mit } W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{pmatrix}$$

Übergangsmatrix

$$w_{nn} = -\sum_{n'} w(n', n)$$

Mache dimensionslos, Zeit wird in τ gemessen S.169

$\rightsquigarrow \quad w_{n,n'} = 1 \quad$ (anstelle $1/\tau$)



offenes System, in Risikoklasse $n=3$ muß der Kredit sofort zurückgezahlt werden

$$W = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \underline{P}(t=0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Allg. Lösung: Linearkombination

$$\boxed{\vec{P}(t) = \sum_{i=1}^{3} c_i \vec{u}_i e^{\lambda_i t}}$$

mit $\lambda_i \leq 0$: Eigenwerte

$\vec{u}_i$: Eigenvektor zum Eigenwert λ_i

c_i : Koeffizienten (aus Anfangsbedingung und Normierung)

$$\vec{P}_i \equiv \vec{u}_i = \begin{cases} \vec{P}_1 \\ \vec{P}_2 \\ \vec{P}_3 \end{cases} \quad \text{drei Eigenvektoren}$$

Resultate: (F. Eisenhut) S. 170 4

- $\lambda_0 = 0 \rightarrow \vec{P}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

alles sammelt sich im Zustand $n = 3$

- $\lambda_1 = \frac{1}{2}(-3+\sqrt{5}) \approx -0,382$

$\hookrightarrow \vec{P}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \\ \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \end{pmatrix}$

- $\lambda_2 = \frac{1}{2}(-3-\sqrt{5}) \approx -2,618$

$\hookrightarrow \vec{P}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \\ \frac{1}{2}(1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$

$C_0 = 1$

$C_1 = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$C_2 = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

Lösung lautet somit

$$\boxed{\vec{P}(t) = \vec{P}_{st} + C_1 \vec{P}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \vec{P}_2 e^{\lambda_2 t}}$$

stationäre Lösung (Langzeitverhalten) $\hat{=} \vec{P}_0$
$\lambda_0 = 0$

Zeitentwicklung der Wahrscheinlichkeiten $P(n,t) \equiv P_n(t)$

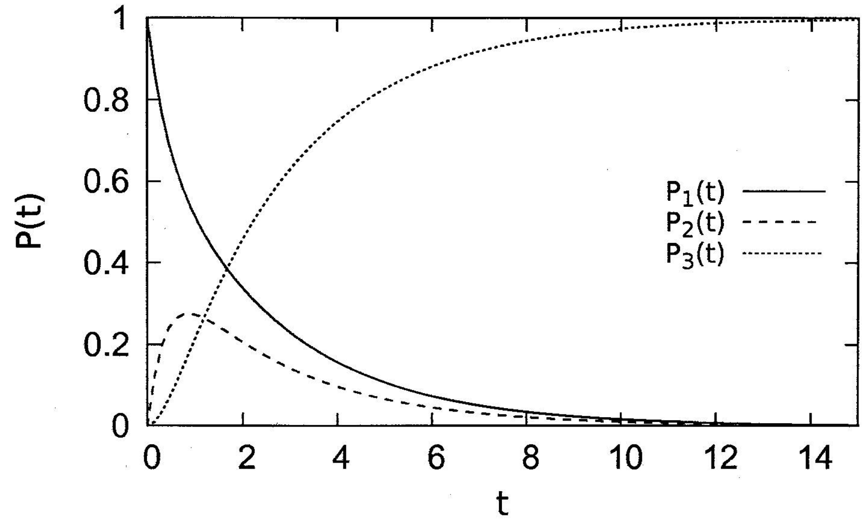


Abb. M. Brics

Die Insolvenzrate (Übergang in den Bankrott [n=3] pro Zeit) beträgt

$$\Phi_3(t) = -\frac{d}{dt}\left(P_1(t) + P_2(t)\right) = \frac{d}{dt} P_3(t)$$

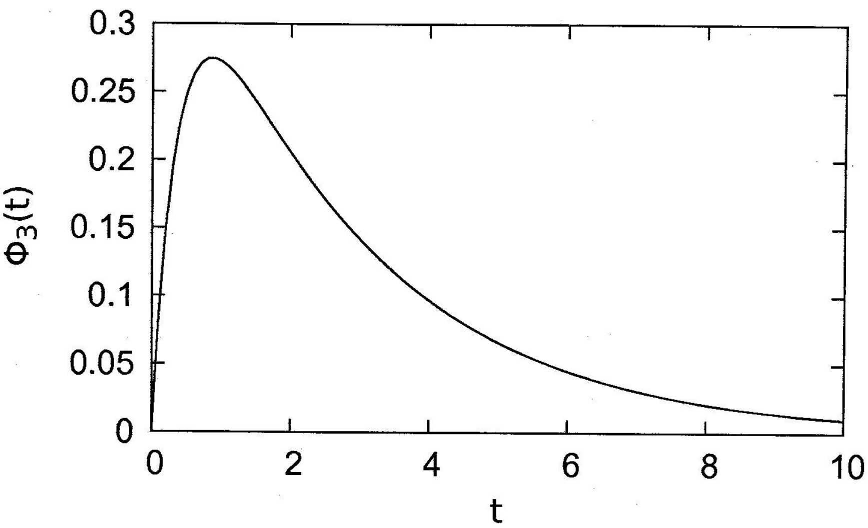


Abb. M. Brics

$$\Phi_3(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(e^{\frac{1}{2}(-3+\sqrt{5})t} - e^{\frac{1}{2}(-3-\sqrt{5})t}\right)$$

Es gilt $\int_0^\infty \Phi_3(t)\,dt = 1$

Jetzt geschlossenes System:
Zwei reflektierende Ränder
bei $n=1$ und $n=3$

S.172

$$1 \rightleftarrows 2 \rightleftarrows 3$$

$$W = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \; ; \; \vec{P}(t=0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_0 = 0 \; ; \; \lambda_1 = -1 \; ; \; \lambda_2 = -3$$

$$\vec{P}_{st} \equiv \vec{P}_0 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$; Gleichverteilung für $t \to \infty$ ✓

$$\vec{P}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \; C_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\vec{P}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \; ; \; C_2 = -\frac{1}{6}$$

$$P_1(t) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{6} e^{-3t}$$; Relaxation ~~von~~ des Zustands $n=1$ ins GG

$$P_2(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} e^{-3t}$$; analog $n=2$

$$P_3(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{6} e^{-3t}$$; analog $n=3$

Fokker-Planck-Gleichung (FPE)

(1dim) Drift-Diffusions-Gleichung

$$\boxed{\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[a(x)\,p(x,t)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[b(x)\,p(x,t)\right]}$$

Driftgeschwindigkeit $v(x)$

Diffusionsfunktion

oftmals: Näherung

$\frac{b(x)}{2} \longrightarrow D$: konstanter Diffusionskoeffizient

FPE entsteht aus Mastergleichung mittels Reihenentwicklung (Kramers-Moyal-Entwicklung) bezüglich der Sprünge $x \to x' = x + dx$

Phenomenologische Herleitung aus Kontinuitätsgleichung

Wahrscheinlichkeitsstrom

$$\boxed{\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} j(x,t) = 0}$$

Ansatz (Fick'sches Gesetz):

$$j(x,t) = +\underbrace{v(x)\,p(x,t)}_{\text{Driftstrom}} - \underbrace{D\frac{\partial}{\partial x}p(x,t)}_{\text{Diffusionsstrom (Gradient)}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(v(x)\,p\right) + D\frac{\partial^2}{\partial x^2}p$$