Planck'sches Strahlungsgesetz

Mittlere Besetzungszahl (Seite 69)

$$\langle n_{\vec{p},\lambda} \rangle = \frac{1}{e^{\beta \varepsilon_{\vec{p}}} - 1}$$

Anzahl besetzter Zustände im Impulsraumvolumenelement

$$\langle n_{\vec{p},\lambda} \rangle \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} \underbrace{d^3p}_{4\pi\, dp\, p^2} \qquad (g=2)$$

Anzahl besetzter Zustände im Intervall $[p, p+dp]$

$$\langle n_{\vec{p},\lambda} \rangle \frac{V}{\pi^2\hbar^3} p^2\, dp$$

Mit $p = \hbar k$, $\omega = kc \Rightarrow p = \hbar \frac{\omega}{c} \Rightarrow$

$$\frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \frac{V}{\pi^2\hbar^3} \hbar^2 \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\hbar}{c}\, d\omega$$

$$= \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^2\, d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$

Def. spektrale Energiedichte $u(\omega)$

= Energie pro Volumen und Frequenzeinheit

Da $E = \sum_{\vec{p},\lambda} \varepsilon_{\vec{p}} \langle n_{\vec{p},\lambda} \rangle$

$$\Rightarrow \frac{E}{V} = \sum_{\vec{p},\lambda} \frac{\hbar\omega}{V} \langle n_{\vec{p},\lambda} \rangle$$

$$= \int d\omega \underbrace{\frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega}-1}}_{u(\omega)}$$

Also $$u(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/kT}-1}$$

(Plancksches Strahlungsgesetz)

- Versagen des Rayleigh-Jeans-Strahlungsgesetz veranlasste Planck Quanten $\hbar\omega$ einzuführen $\longrightarrow$ „Geburt" der Quantentheorie

- Für $\vec{p} \to 0 \Rightarrow \varepsilon_{\vec{p}} = 0$ und $\langle n_{\vec{p},\lambda} \rangle \to \infty$
  $\to$ Besetzungszahl divergiert

- Da Zustandsdichte $\sim \omega^2$ (und spektrale Energiedichte $\sim \omega^3$) ist diese Divergenz unproblematisch.

- Die spektrale Energiedichte hat ein Maximum bei

$$\hbar\omega_{max} = 2.82\, kT \qquad (*)$$

(Wiensches Verschiebungsgesetz)

$T_3 > T_2 > T_1$

- Grenzfälle:

  • $\hbar\omega \ll kT$

$$\Rightarrow \quad u(\omega) \simeq \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{\underbrace{1 + \frac{\hbar\omega}{kT}}_{\simeq e^{\hbar\omega/kT}} - 1}$$

$$= \frac{kT\,\omega^2}{\pi^2 c^3}$$ kein $\hbar$ mehr

(Rayleigh-Jeans-Strahlungsgesetz)

für $\omega \to \infty$ Ultraviolettkatastrophe

$\int_0^\infty u(\omega)\,d\omega \to \infty$, unsinnig!

  • $\hbar\omega \gg kT$

$$\Rightarrow \quad u(\omega) \simeq \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}\, e^{-\hbar\omega/kT}$$

(Wiensches Gesetz, vor Planck lediglich empirisch gefunden)

Schwarzer Körper

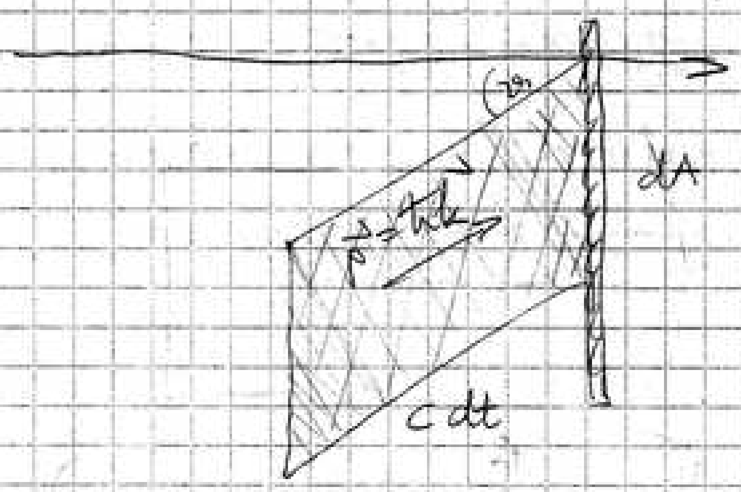
d.h. Körper, der jegliche einfallende Strahlung absorbiert.

Man denke sich Hohlraum, dessen innere Wände schwarz sind

Sperrt man in diesen Hohlraum Strahlung ein, so wird sich durch vielfache Absorption und Emission an den Wänden ein thermisches Gleichgewicht einstellen.

Hohlraumstrahlung ist isotrop.

Wir betrachten ein Flächenelement und berechnen die Anzahl Photonen einer Mode (ω, λ), die durch ein Flächenelement dA ~~.....~~ hindurchtritt



$$c\,dt\; dA\; \cos\vartheta \times \langle n_{\vec{p},\lambda} \rangle \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}$$

Abgestrahlte Energie pro Zeit und Fläche im Frequenzbereich $[\omega, \omega + d\omega]$

$$I(\vec{p},\lambda)\, d\Omega\, d\omega = \hbar\omega\; c \cos\vartheta\; \langle n_{\vec{p},\lambda} \rangle \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}$$

mit $\vec{p} = \hbar\vec{k}$, $k = \frac{\omega}{c}$ folgt

$$I(\vec{k},\lambda)\, d\Omega\, d\omega = \hbar\omega c \cos\vartheta \, \langle n_{\vec{k},\lambda} \rangle \frac{k^2\, dk\, d\Omega}{(2\pi)^3}$$

$$= \frac{\hbar\omega^3}{c^2} \cos\vartheta \, \langle n_{\vec{k},\lambda} \rangle \frac{d\omega\, d\Omega}{(2\pi)^3}$$

$$\Rightarrow I_\lambda(\omega)\, d\omega = \int d\Omega\, I(\vec{k},\lambda)\, d\omega$$

$$= 2\pi \frac{\hbar\omega^3}{c^2} \frac{1}{(2\pi)^3} d\omega \, \langle n_{\vec{k},\lambda} \rangle \underbrace{\int_0^1 \eta\, d\eta}_{1/2} .$$

$\cos\vartheta$

$$= \frac{\hbar\omega^3}{c^2} \frac{1}{8\pi^2} \langle n_{\vec{k},\lambda} \rangle\, d\omega$$

nur über Halbraum

$$= \frac{c}{8} u(\omega)\, d\omega$$

$$I(\omega) = \sum_\lambda I_\lambda(\omega) = \frac{c}{4} u(\omega)$$

$$I_{tot} = \int d\omega\, I(\omega) = \sigma T^4 \quad \text{(Stefan-Boltzmann-Gesetz)}$$

<u>Mittlere Photonenzahl</u>

Die Photonenzahl N ist nicht fest, denn wir haben keinen Erhaltungssatz für sie. Durch die WW mit Materie (z.B. mit den „schwarzen Wänden") stellt sie sich selbst ein.

Man findet

$$N = 2 \sum_{\vec{p}\neq 0} \frac{1}{e^{\beta c p} - 1} = \frac{V}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{d\omega\, \omega^2}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$

$$= \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} V \left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^3 = 0.244\, V \left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^3 . \quad (*)$$

Bringt man dies mit (**), (***), Seite 100 in Zusammenhang, so erhält man

$$PV = \frac{4}{3}\frac{\sigma}{c} V T^4 = 0.9\, NkT \qquad (*)$$

und $\quad S = 3.6\, Nk$

(Aber Achtung: N nie unabh. von T vorgebbar!)

(*) sieht so aus, als ob Druck pro Teilchenzahl ca wie beim klassischen id. Gas

– Da $m = 0$ beim Photonengas, ist der Ausdruck $\lambda = h/\sqrt{2\pi m kT}$ für die therm. Wellenlänge unbrauchbar

Stattdessen:

$$\lambda_T = \frac{2\pi}{k_{ph}} = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi c\hbar}{\varepsilon_{\vec{p}}} = \frac{2\pi c\hbar}{\hbar\omega}$$

Setzt man nach dem Wienschen Verschiebungsgesetz

$$\hbar\omega = \hbar\omega_{max} = 2.82\, kT$$

ein, so folgt

$$\bar{\lambda}_T = \frac{2\pi\hbar c}{2.82\, kT} = \frac{0.510}{T[K]} \; [\mathrm{cm}]$$

$$\Rightarrow \quad N = 0.244 \left(\frac{2\pi}{2.82}\right)^3 \frac{V}{\lambda_T^3} = 2.70 \frac{V}{\bar{\lambda}_T^3}$$

Für das klass. ideale Gas hatten wir

$$\frac{\bar{\lambda}_T^3}{V/N} \ll 1$$

nun für das Photonengas

$$\frac{\bar{\lambda}_T^3}{V/N} = 2.7 = \text{const.} > 1$$

$\rightarrow$ Photonen immer quantenmechanisch behandeln

- Man sieht anhand der Rechnungen mit F auf Seiten 99 ff, daß mit $g = 3$ $E = \frac{3}{2} PV$ herausgekommen wäre.
  Wir haben $g = 2$ wegen $m = 0$, sodaß die Gültigkeit des Stefan-Boltzmann-Gesetzes uns verrät, daß die Photonenmasse null ist oder aus irgendwelchen Gründen „longitudinale Photonen" nicht mit unserer (bekannten) Materie wechselwirken.
- Das chemische Potential des Photonengases ist null ($\rightarrow$ Übung)

Kosmischer Mikrowellenhintergrund

(Penzias u. Wilson, 1964, Nobelpreis 1972)

$T_0 = 2.728 \pm 0.001$ K

in sehr guter Näherung Schwarzkörper-Strahlung

Wiensches Verschiebungsgesetz (*), Seite 102

$\Rightarrow \hbar\omega_{max} = 2.82\, T_0 \Rightarrow \lambda_{max} \cong 2\,\text{mm}$ (Mikrowellen)

⇒ totale Energiedichte

$$\frac{E}{V} = \int d\omega\, u(\omega) = 4.17 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{J\,m^{-3}}$$
$$= \frac{1}{4}\ \mathrm{MeV}/\mathrm{m}^3$$

Im Vergleich zu anderen Energiedichten klein:

Baryonische Materie: $4.1 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{J/m^3}$
Dunkle Materie : $20 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{J/m^3}$
" Energie $64 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{J/m^3}$

allerdings: Sternenlicht auch nur $0.4 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{J/m^3}$.

Im frühen Universum (bis ca 400000 Jahre) hat Strahlung dominiert.

Expansion des Universums

Das Universum expandiert $V(t) = a(t)^3\, V(t_0)$
t_0: heute

Skalenparameter

Wie ändert sich die Temperatur?

$$dE = \cancel{dQ}_{0} - P\,dV \qquad / dt$$

$$\frac{dE}{dt} = -P\frac{dV}{dt}$$

Da (Seite 100) $E = \frac{4\sigma}{c} V T^4$

$$P = \frac{4}{3}\frac{\sigma}{c} T^4$$