In niedrigster Ordnung $\mu \cong \varepsilon_f$.
Einsetzen in höherer Ordnung

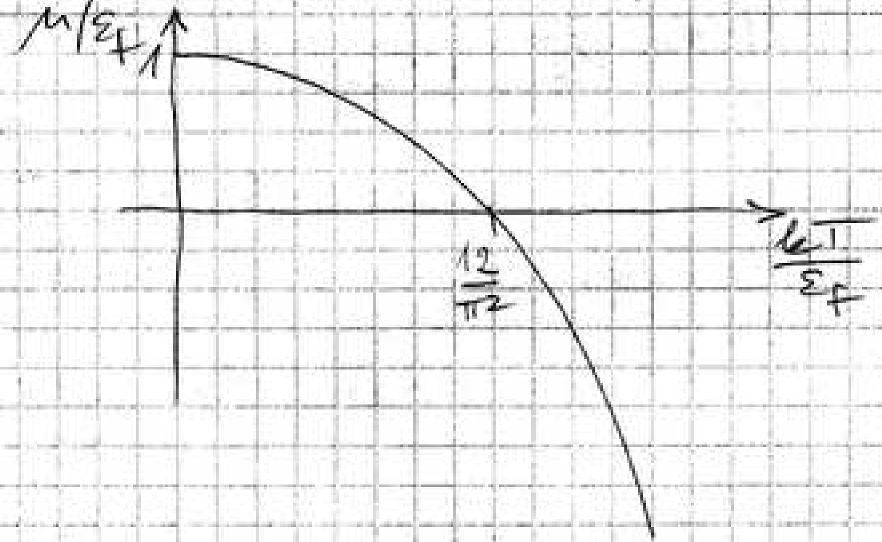
$$1 \cong \left(\frac{\mu}{\varepsilon_f}\right)^{3/2}\left\{1+\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{\varepsilon_f}\right)^2+O(T^4)\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \mu \cong \varepsilon_f \, \frac{1}{\left(1+\underbrace{\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{\varepsilon_f}\right)^2}_{\epsilon}\right)^{2/3}}$$

$$\simeq \varepsilon_f\left\{1-\frac{2}{3}\epsilon\right\} = \varepsilon_f\left\{1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\varepsilon_f}\right)^2\right\}$$

also

$$\mu = \varepsilon_f\left\{1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\varepsilon_f}\right)^2+O(T^4)\right\}. \qquad (*)$$



- μ verringert sich für steigende Temperatur, da immer weniger Zustände innerhalb der Fermi-Kugel besetzt sind.

Für (*), Seite 82 $\quad \Phi = -N\,\varepsilon_f^{-3/2}\int^{\infty} d\varepsilon\, \varepsilon^{3/2}\, n(\varepsilon)$
ergibt sich analog (→ Übung)

$$\Phi = -N\,\varepsilon_f^{-3/2}\left\{\frac{2}{5}\mu^{5/2}+\frac{\pi^2}{6}(kT)^2\,\frac{3}{2}\mu^{1/2}\dots\right\}$$

und mit μ, (*), Seite 85

$$\Phi = -\frac{2}{5} N \varepsilon_f \left\{ 1 + \frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\varepsilon_f}\right)^2 + O(T^4) \right\}$$

$$= -PV$$

also für die thermische Zustandsgl.

$$P = \frac{2}{5}\frac{N}{V} \varepsilon_f \left\{ 1 + \frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\varepsilon_f}\right)^2 + O(T^4) \right\} \quad (*)$$

Mit $E = \frac{3}{2} PV$ folgt sofort die kalorische Zustandsgl.

$$E = \frac{3}{5} N \varepsilon_f \left\{ 1 + \frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\varepsilon_f}\right)^2 + O(T^4) \right\} \quad (**)$$

$$= E(N,V,T)$$ (beachte, daß ε_f von Dichte $n = \frac{N}{V}$ abhängt)

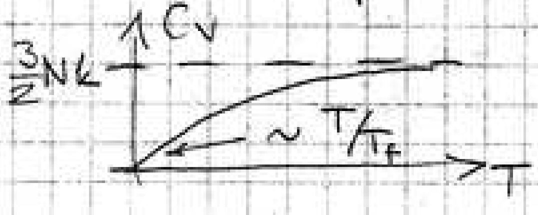
Wärmekapazität für $V = \text{const.}$ (u. $N = \text{const.}$)

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{V,N} = \frac{3}{\cancel{5}} N \cancel{\varepsilon_f} \frac{\cancel{5}\pi^2}{12} 2T \frac{k^2}{\varepsilon_f^{\cancel{2}}}$$

$$= Nk \frac{\pi^2}{2} \frac{T}{T_f} \quad (***)$$

mit $T_f = \frac{\varepsilon_f}{k}$ (Fermi-Temperatur).

$\rightarrow$ bei tiefen Temp $C_V \sim T$



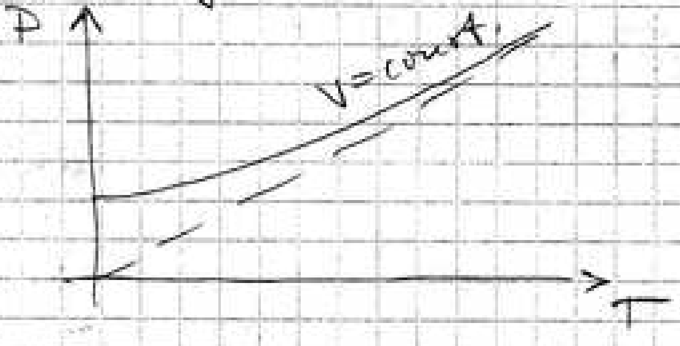
Mit (*), Seite 86 und $\varepsilon_f = \left(\frac{6\pi^2}{g}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m} n^{2/3}$

folgt

$$P = \frac{2}{5}\,\frac{N}{V}\left(\frac{6\pi^2}{g}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}\left\{1 + \frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\varepsilon_f}\right)^2 + \cdots\right\}$$

$$= \frac{2}{5}\left(\frac{6\pi^2}{g}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}\left\{ \qquad " \qquad \right\}.$$

→ für $T \to 0$ bleibt endlicher Druck übrig (wegen Pauli-Verbot).



→ Isotherme Kompressibilität (→ Übung)

$$\varkappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = \frac{3(V/N)}{2\varepsilon_f}\left\{1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\varepsilon_f}\right)^2 + \cdots\right\}$$

→ Entropie (→ Übung)

$$S = kN\frac{\pi^2}{2}\frac{T}{T_f}$$

Def. Zustandsdichte

$$\nu(\varepsilon) = \frac{Vg}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \; \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\vec{p}}) \qquad (*)$$

Man kann damit Integrale umschreiben:

$$\int d^3p \; f(\varepsilon_{\vec{p}}) = \int d\varepsilon \int d^3p \; f(\varepsilon)\, \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\vec{p}})$$

$$= \frac{(2\pi\hbar)^3}{Vg} \int d\varepsilon \; \nu(\varepsilon) f(\varepsilon)$$

z.B. ist die Teilchenzahl

$$N = \frac{gV}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \; n(\varepsilon_{\vec{p}}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \; \nu(\varepsilon)\, n(\varepsilon)$$

Mit $\varepsilon_{\vec{p}} = \frac{p^2}{2m}$ folgt aus $(*)$

$$\nu(\varepsilon) = \frac{Vg}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi \int dp \; p^2 \, \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\vec{p}})$$

$$d\varepsilon_{\vec{p}} = 2p\,dp \cdot \frac{1}{2m} = \frac{1}{m} p\,dp$$

$$\Rightarrow \quad dp = m \frac{1}{p} d\varepsilon_{\vec{p}}$$

$$= \frac{Vg}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi m \int d\varepsilon_{\vec{p}} \; p \; \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\vec{p}})$$

$$= \frac{Vg}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi m \sqrt{2m} \int d\varepsilon_{\vec{p}} \; \varepsilon_{\vec{p}}^{1/2} \, \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\vec{p}})$$

$$= \frac{gV}{2\pi^2\hbar^3} 2^{1/2} m^{3/2} \varepsilon^{1/2} = \frac{gV}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \varepsilon^{1/2}$$

$$= \frac{3}{2} N \frac{\varepsilon^{1/2}}{\varepsilon_f^{3/2}}$$

Damit können wir (***), Seite 86 schreiben als

$$C_V = \frac{1}{3}\pi^2 \nu(\varepsilon_f) k^2 T + \mathcal{O}((T/T_f)^3) \quad (*)$$

$$= \frac{1}{\cancel{3}}\pi^2 \frac{\cancel{3}}{2} N \frac{1}{\varepsilon_f} k^2 T = Nk \frac{\pi^2}{2} \frac{T}{T_f} \quad \checkmark$$

Ebenso für die isoth. Kompressibilität

$$\varkappa_T = \frac{V}{N^2} \nu(\varepsilon_f) + \mathcal{O}((T/T_f)^2) \quad (**)$$

Anmerkung: (*), (**) gelten allgemein, d.h. das Tieftemperaturverhalten wird maßgeblich durch die Zustandsdichte an der „Fermi-Kante" bestimmt.

- Angenommen wir gestatten eine Wechselwirkung zwischen den Fermionen, z.B. Coulomb-Abstoßung von Elektronen in Metallen: N Elektronen in Volumen V

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} \frac{e^2}{r_{ij}}$$

Die charakteristische Länge des Systems ist der Radius r_0 der Kugel, die von einem Teilchen besetzt ist

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} \Rightarrow r_0 = \left(\frac{3V}{4\pi N}\right)^{1/3}$$

Führt man $r' = r/r_0$, $p' = p r_0$ ein

$$\Rightarrow H = \frac{1}{r_0^2}\left(\sum_i \frac{p_i'^2}{2m} + r_0 \sum_{i \neq j} \frac{e^2}{r'_{ij}} \right)$$

Für große Dichten ist r_0 klein $\Rightarrow$
für große Dichten überwiegt die kinetische Energie und die Annahme nicht-WW Teilchen ist umso begründeter.
(Gilt nicht für Bosonen für $T \to 0$, da dort die kinetische Energie $\to 0$).

<u>Bose-Einstein-Kondensation</u>

Wir betrachten nicht-relativistisches Bose-Gas, $\varepsilon_{\vec{p}} = \frac{p^2}{2m}$

(*), Seite 72 $\qquad \frac{1}{v} = \frac{g}{\lambda^3} g_{3/2}(z)$, $\quad z = e^{\mu\beta}$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m kT}}, \quad v = \frac{V}{N}$$

Nehmen wir an Spin $s = 0 \Rightarrow g = 1$

$$\Rightarrow \frac{\lambda^3}{v} = g_{3/2}(z)$$

Da $n(\varepsilon_{\vec{p}}) = \dfrac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\vec{p}} - \mu)} - 1}$ für Bosonen, und $n(\varepsilon_{\vec{p}}) \geq 0$

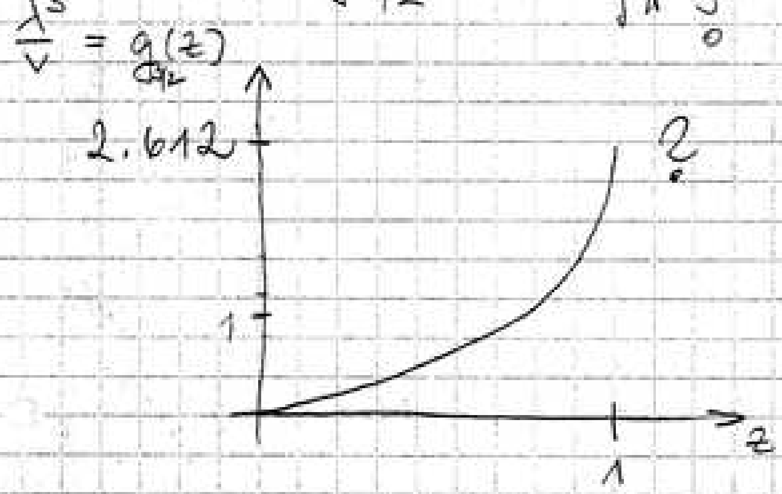
$$\Rightarrow e^{\beta(\varepsilon_{\vec{p}} - \mu)} > 1, \text{ also } \mu < \min \varepsilon_{\vec{p}}$$

Für nicht-WW Bosonen in einer Box $V \to \infty$ ist $\min \varepsilon_{\vec{p}} = 0$, also $\mu < 0$.

und somit $z \leq 1$.

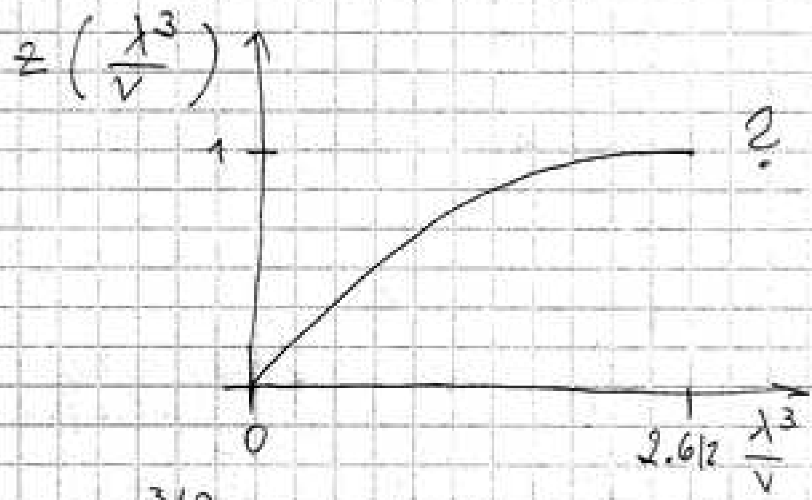
Plottet man

$$g_{3/2}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx \, \frac{x^{1/2}}{e^x z^{-1} - 1} = \sum_{k=1}^\infty \frac{z^k}{k^{3/2}}$$

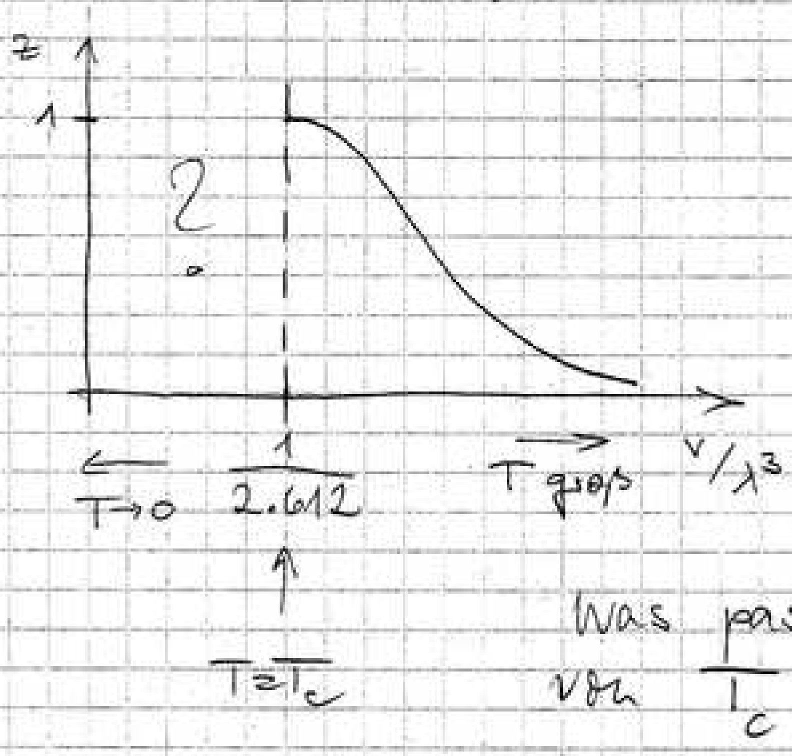


$$g_{3/2}(1) = \zeta\left(\tfrac{3}{2}\right) = 2.612$$

Umkehrfunktion:



aufgetragen über $\frac{v}{\lambda^3} \sim T^{3/2}$, $N, V = \text{const}$, also $v = \text{const}$.



Was passiert unterhalb von T_c?

$$\frac{v}{\lambda^3} = \frac{1}{2.612}$$ definiert kritische Temperatur:

$$\frac{v}{\left(\hbar\left(\frac{2\pi}{mkT_c}\right)^{1/2}\right)^3} = \frac{1}{2.612}$$

$$kT_c(v) = \frac{2\pi\hbar^2/m}{(2.612\,v)^{3/2}} .$$

Wir hatten auf Seite 68

$$N = \sum_p n(\varepsilon_{\vec p}) \quad \text{mit} \quad n(\varepsilon_{\vec p}) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\vec p}-\mu)}-1}$$

und dann auf Seite 71 den Kontinuumslimes

$$\sum_p = g\sum_{\vec p} \longrightarrow g\,\frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\int d^3p$$

vollzogen. Nun betrachten wir $\vec p = 0$ gesondert.

Für $\vec p = 0 \Rightarrow \varepsilon_{\vec p} = 0$, also

$$N = \frac{1}{z^{-1}-1} + \sum_{\vec p \neq 0} n(\varepsilon_{\vec p}) = \frac{1}{z^{-1}-1} + \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\int d^3p\, n$$

$$\Rightarrow \quad N = \frac{1}{z^{-1}-1} + N\frac{v}{\lambda^3}\, g_{3/2}(z)$$

oder, ausgedrückt durch T_c,

$$N = \underbrace{\frac{1}{z^{-1}-1}}_{\substack{N_0 \\ \text{Teilchen im} \\ \text{Grundzustand}}} + \underbrace{N\left(\frac{T}{T_c(v)}\right)^{3/2}\frac{g_{3/2}(z)}{g_{3/2}(1)}}_{\substack{N' \text{ Teilchen in} \\ \text{angeregten Zuständen}}}$$