LIE-ALGEBREN UND GRUPPEN IN DER ZEITABHÄNGIGEN QUANTENTHEORIE

(E. KALNINS, W. MILLER JR., J. MATH. PHYS **15** (1974) 1025 - 1032)
(WEITERFÜHREND: PRA **49**, 2301 (1994), ARXIV: HEP-TH/0011209v1)

WIR BETRACHTEN $\left(\hbar = \frac{\hbar^2}{2m} = 1\right)$

$$\boxed{\underbrace{(i\partial_t + \partial_x^2)}_{=:\,Q}\,\psi(t,x) = 0} \qquad (*)$$

TAKE-HOME:
- SYMMETRIEN $\longrightarrow$ SEPARIERBARKEIT
- GRUPPEN / ALGEBREN HABEN VERSCHIEDENE DARST.
- 4 SEPARABLE LÖSUNGEN ($\hat{=}$ 4 GLEICHUNGEN MIT NICHT-TRIVIALER SYM-ALG)
- GRUPPENDARSTELLUNG AUF $L^2(\mathbb{R})$ $\hat{=}$ ZEITENTWICK.-OP.
- QT $\hat{=}$ DARSTELLUNG "HEISENBERG"-ALGEBRA

DIE FREIE SCHRÖDINGER-GLEICHUNG IM KOORDINATENSYSTEM $\{t,x\}$.

LÖSEN DURCH "SEPARATION", d.h., DIE PARTIELLE DIFFGL. WIRD IN GEWÖHNLICHE DIFFGL. AUFGETEILT.

i.) "NATÜRLICHE" SEPARATION:

$$[\partial_x, Q] = 0 \qquad (\text{ODER}: [\partial_x, \partial_t] = 0 \quad \text{AUCH } \partial_t)$$

∂_x UND Q HABEN GEMEINSAME EIGENVEKTOREN. MIT "EIGENVEKTOR"

$$\partial_x U_\lambda(x) = -i\lambda U_\lambda(x)\ ; \quad U_\lambda(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{i\lambda x}$$

$$\langle U_\mu, U_\lambda \rangle = \frac{1}{2\pi}\int dx\ e^{-i(\lambda-\mu)x} = \delta(\lambda-\mu)$$

KÖNNEN WIR MIT DEM SEPARATIONSANSATZ $\psi_\lambda(t,x) = V_\lambda(t)\,U_\lambda(x)$ DIE LÖSUNG ALS

$$\boxed{\psi_\lambda(t,x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(i(\lambda^2 t - \lambda x)\right)}$$

KONSTRUIEREN.

$$i\partial_t V_\lambda(t) \stackrel{!}{=} -\lambda^2 V_\lambda(t)$$
$$-\partial_x^2 U_\lambda(x) \stackrel{!}{=} -\lambda^2 U_\lambda(x)$$
λ^2... SEPARATIONSKONST.

ii.) ALLGEMEINE SEPARATION:

$$[K, Q] = 0$$

$K = a(t,x)\partial_x + b(t,x)\partial_t + c(t,x)$ EIN OPERATOR, DER MIT Q KOMMUTIERT UND GEMEINSAME "EIGENVEKTOREN" HAT

MAN KANN LOKAL (UM PUNKT $(t_0, x_0) = \vec{x}_0$) EIN KOORDINATENSYSTEM FINDEN, SO DASS

$$K = f(v)\partial_v + g(v) \qquad \text{IN } \{v(t,x), u(t,x)\}$$

DIES IST EIN WEITERES KOORDINATENSYSTEM, NEBEN $\{t;x\}$, IN DEM MAN DIE GLEICHUNG (*) DURCH SEPARATION LÖSEN KANN

$$\psi(v,u) = V(v)\,U(u) \Longleftrightarrow Q = K(v) + L(u)$$

iii.) R-SEPARATION

NIMM AN, DASS EINE LÖSUNG VON (*) DURCH

$$\psi = R\Phi = \exp(iR(\vartheta,u))\,\Phi(\vartheta,u)$$

GEGEBEN SEI UND DASS

$$R(\vartheta,u) \neq a(\vartheta) + b(u)$$

$$\Phi(\vartheta,u) = U(u)\,V(\vartheta)$$

$\Longrightarrow$ MIT $Q\psi = 0$ FOLGT

$$Q'\Phi = \exp(-iR)\underbrace{Q\exp(iR)\,\Phi}_{=0} = 0$$

MAN TRANSFORMIERT Q IN EINEN ÄQUIVALENTEN OPERATOR Q' UND MACHT DORT DIE SEPARATION IN $\{\vartheta, u\}$.

SOLCHE R-SEPARIERBAREN LÖSUNGEN HÄNGEN MIT OPERATOREN K' ZUSAMMEN FÜR DIE

$$[K', Q] = R_K Q \quad , \; R_K \neq 0 \, , \; R_K \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$$

GILT.

OBWOHL DIESE K' NICHT MIT Q KOMMUTIEREN, BILDEN SIE LÖSUNGEN ψ IN LÖSUNGEN AB

$$Q\underbrace{K'\psi}_{=\psi'} = K'\underbrace{Q\psi}_{=0} - R_K\underbrace{Q\psi}_{=0} = 0 \quad \Rightarrow \text{GEMEINSAME EIGENVEKTOREN (IN } \mathcal{F}_0 !)$$

IM ALLGEMEINEN SUCHEN WIR, FÜR LÖSUNGEN DER FORM

$$\psi = \exp(iR)\,\Phi,$$

DIE (R-) SEPARIEREN NACH „<u>SYMMETRIEOPERATOREN</u>" K

$$\boxed{[K, Q] = R_K Q}$$

DER FREIEN SG (*).

$$\Longrightarrow \boxed{Q = f(\vartheta,u)\big(K(\vartheta) + L(u)\big)}$$

UM DIESE OPERATOREN ZU FINDEN IST ES HINREICHEND UND NOTWENDIG DASS DIE KOEFFIZIENTEN BEI $\partial_x^2, \partial_x, \partial_t$ UND 1 AUF BEIDEN SEITEN VON

$$[a\partial_x + b\partial_t + c\,;\, Q] = R_K Q$$

GLEICH SIND

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\{ K_2 &= -t^2\partial_t - tx\partial_x - \tfrac{t}{2} + i\tfrac{x^2}{4}\,;\; K_1 = -t\partial_x + i\tfrac{x}{2}\,;\; K_0 = i \\ K_{-1} &= \partial_x\,;\; K_{-2} = \partial_t\,;\; K^0 = x\partial_x + 2t\partial_t + \tfrac{1}{2} \} = \mathfrak{g}_2\end{aligned}}$$

AUS DIESER "BASIS" DER SYMMETRIE-OPERATOREN LASSEN SICH ALLE MÖGLICHEN SYMMETRIE-OPERATOREN DURCH LINEAR KOMBINATIONEN BILDEN.

$\Rightarrow$ DIE $\{K_j\,;\,K^0\}$ GEHORCHEN FOLGENDEN KOMMUTATOR-RELATIONEN

$$[K^0, K_j] = j\,K_j \quad (j = \pm 2, \pm 1, 0)$$

$$[K_{-1}, K_1] = \tfrac{1}{2} K_0$$

$$[K_{-1}, K_2] = K_1$$

$$[K_{-2}, K_1] = -K_{-1}$$

$$[K_{-2}, K_2] = -K^0$$

DEFINITION [LIE-ALGEBRA]:

EINE LIE-ALGEBRA $\mathfrak{g}$ IST EIN VEKTORRAUM MIT EINER VERKNÜPFUNG

$$[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \quad \ldots \text{"LIE-KLAMMER"}$$

DIE FOLGENDE BEDINGUNGEN ERFÜLLT FÜR $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ UND $A, B, C \in \mathfrak{g}$

i) $[\alpha A + \beta B\,;\, C] = \alpha[A, C] + \beta[B, C]$

$[C, \alpha A + \beta B] = \alpha[C, A] + \beta[C, B]$ "BILINEARITÄT"

ii) $[A, A] = \Theta$

iii) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = \Theta$

"JACOBI IDENTITÄT"

IN EINER ASSOZIATIVEN ALGEBRA, d.h.,

$$(AB)C = A(BC)$$

WIRD FÜR DIE LIE-ALGEBRA MEIST DER KOMMUTATOR VERWENDET

SOMIT IST $\mathfrak{g}_2$ MIT DEM KOMMUTATOR EINE "6-DIMENSIONALE LIE-ALGEBRA" (6 BASIS-VEKTOREN)

DER VEKTORRAUM IST DER RAUM ALLER LINEAREN-OPERATOREN

BETRACHTE EINE BASIS-TRANSFORMATION

$$\{ L_1 = K^0 ,\ L_2 = K_{-2} + K_2 ,\ L_3 = K_{-2} - K_2$$
$$C_1 = K_{-1} ,\ C_2 = K_1 ,\ E = K_0 \} .$$

MAN SIEHT, DASS

$$\{L_1, L_2, L_3\} \text{ MIT } [L_1, L_2] = -2L_3 ; [L_3, L_1] = 2L_2 ; [L_2, L_3] = 2L_1$$
$$\{C_1, C_2, E\} \text{ MIT } [C_1, C_2] = \tfrac{1}{2} E ; [C_i ; E] = 0$$

JE EINE UNTERALGEBRA VON $\mathfrak{g}_2$ BILDEN.

MAN KANN EINE SOLCHE UNTERALGEBRA AUCH ANDERS ALS MIT DIFF-OPERATOREN DARSTELLEN:

$$sl(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \text{ ..."SPURLOSE 2x2-MATRIZEN"}$$

$$= \left\{ l_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; l_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; l_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\cong \{L_1, L_2, L_3\}$$

ISOMORPH
$\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ IST
BIJEKTIV, $[\cdot,\cdot]$
BLEIBT ERHALTEN

$$W_1 = \left\{ c_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\cong \{ C_1, C_2, E \} \quad \text{... "Weyl Algebra"}$$

<u>Definition [Lie-Gruppe]</u>:

Sei G eine C^∞-Mannigfaltigkeit

$$G = \{ g(\lambda) \mid C^\infty \text{ bezüglich } \lambda = (\lambda_1, \dots) \text{ kont. Parameter} \}$$

mit einer C^∞-Verknüpfung

$$(g_1, g_2) \in G \times G \longrightarrow g_1 g_2 \in G$$

und einer C^∞-Inversen

$$g \in G \longrightarrow g^{-1} \in G .$$

Erfüllt G die Gruppen Axiome

i.) $g_1 (g_2 g_3) = (g_1 g_2) g_3$ ... "Assoziativität"

ii.) $ge = eg = g$ ... "Einheitselement e"

iii.) $g^{-1} g = g g^{-1} = e$ ... "inverses Element"

Dann ist G eine Lie-Gruppe.

Verbindung zwischen $\mathfrak{g}$ und G: <u>"Die exponentielle Darstellung"</u>

Für jedes Element $A \in \mathfrak{g}$ erzeugt

$$\exp : t \in \mathbb{R} \longrightarrow \exp(tA) \in G$$

eine ein-parametrige Untergruppe von G, so dass

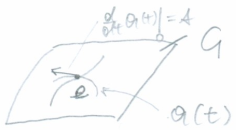
$$\exp(At_1) \exp(At_2) = \exp((t_1 + t_2) A) \in G$$

$$\left. \frac{d}{dt} \exp(tA) \right|_{t=0} = A \in \mathfrak{g}$$

$$\left. \exp(tA) \right|_{t=0} = e \in G$$

DER VEKTORRAUM DER "LIE-ALGEBRA $\mathfrak{g}$" IST DER "TANGENTIALRAUM" AM EINHEITSELEMENT e DER LIE-GRUPPE G

$\Longrightarrow$ MAN LEGT ALLE MÖGLICHEN STETIGEN WEGE DURCH e UND DIFFERENZIERT BEI e NACH DEM PARAMETER $\equiv$ LIE-ALGEBRA



MIT DER EXPONENTIAL-ABBILDUNG INDUZIERT DIE BASIS DER LIE-ALGEBRA EINE LOKALE BASIS DER LIE-GRUPPE

BEISPIEL: "SPEZIELLE LINEARE GRUPPE"

$$\exp(\alpha L_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} L^k = \begin{pmatrix} e^{\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\exp(\varphi L_2) = \begin{pmatrix} \cosh(\varphi) & \sinh(\varphi) \\ \sinh(\varphi) & \cosh(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\exp(\theta L_3) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

BILDEN BASIS FÜR

$$SL(2,\mathbb{R}) = \left\{ M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \,\middle|\, \det A = \alpha\delta - \gamma\beta \stackrel{!}{=} 1;\ \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R} \right\}$$

(INVERSES ELEMENT EXISTIERT DA $\det A \neq 0$)

DIE DARSTELLUNG DER LIE-ALGEBRA MIT DIFFERENTIAL-OPERATOREN WIRD ALS "VERALLGEMEINERTE LIE-ABLEITUNG" BEZEICHNET. DIE ZUGEHÖRIGE DARSTELLUNG DER LIE-GRUPPE WIRD ALS "LOKALE MULTIPLIKATOR REPRÄSENTATION" BEZEICHNET.

FÜR EIN $f(\vec{x}) \in C^{\infty}$ KANN MAN DAMIT DIE WIRKUNG EINES GRUPPENELEMENTS $a \in G$ EINFACH DURCH

$$\underbrace{\exp(tA)}_{=a} f(\vec{x}) = \left[\hat{T}(a) f\right](\vec{x}) = \nu(\vec{x}, a)\, f(\vec{x}^{a})$$

DARSTELLEN.

WOBEI MIT

$$D_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}(\vec{x})\, \partial_{x_i} + P_j(\vec{x}) \qquad ; \; j = 1, \dots, \underset{\text{DIM. DER ALGEBRA}}{d}$$

$$\frac{dx_i(\tau)}{d\tau} = \sum_{j=1}^{d} P_{ij}(\vec{x}(\tau))\,\alpha_j \quad ; \; \vec{x}(0) = \vec{x}^{(0)} \quad ; \text{ FÜR } A = \sum_j \alpha_j D_j$$

$$\frac{d}{d\tau} \ln v(\vec{x}^0, \exp(\tau D_j)) = \sum_{j=1}^{d} P_j(\vec{x}(\tau))\,\alpha_j$$

ZU LÖSEN IST.

<u>BEISPIEL</u>: "<u>LOKALE MULTIPLIKATORDARSTELLUNG DER WEYL GRUPPE</u>"

$$\{ C_1 = \partial_x \; ; \; C_2 = -t\partial_x + \frac{ix}{2} \; ; \; E = i \} \quad ; \; j = 1,2,3 \; ; \; n = 2 \; ; \; \{ t \equiv x_1, x \equiv x_2 \}$$

i.) $D_1 \equiv C_1 = \partial_x : \quad P_{21}(\vec{x}) = 1$

$$\longrightarrow \frac{dx(\tau)}{d\tau} = 1 \Longrightarrow x(\tau) = x^{(0)} + \tau \quad , \; t(\tau) = t^{(0)}$$

$$\frac{d}{d\tau} \ln v(\vec{x}^0, \exp(\tau C_1)) = 0 \Longrightarrow \frac{dv(\tau)}{d\tau} = 0 \; : \; v(\tau) = 1 \quad \text{(NORM!)}$$

$$\boxed{\exp(\tau C_1) f(t,x) = f(t, x+\tau)}$$

"<u>TRANSLATION IN x</u>"

ii.) $D_2 \equiv C_2 = -t\partial_x + i\frac{x}{2} : P_{22}(\vec{x}) = -t \; , \; P_2(\vec{x}) = \frac{ix}{2}$

$$\longrightarrow \frac{dx(\tau)}{d\tau} = -t \Longrightarrow x(\tau) = x^{(0)} - t\tau \quad , \; t(\tau) = t^{(0)}$$

$$\frac{d}{d\tau} \ln v(\vec{x}^{(0)}, e^{\tau D_2}) = \frac{1}{v(\tau)} \frac{dv(\tau)}{d\tau} = \frac{ix(\tau)}{2} \Longrightarrow v(\tau) = e^{\frac{i\tau}{2}(x^{(0)} - \frac{t\tau}{2})}$$

$$\boxed{\exp(\tau C_2) f(t,x) = \exp(\tfrac{i}{2}\tau(x - \tfrac{t\tau}{2})) f(t, x - t\tau)}$$

"<u>GALILEI BOOST</u>"

iii.) $\boxed{\exp(\tau E) = \exp(i\tau) f(t,x)}$

$\{ \exp(v C_1) ; \exp(u C_2) ; \exp([s + \frac{uv}{4}] E) \}$ BILDEN BASIS VON W_1

$$\Rightarrow \hat{T}(u,v,\rho) f(t,x) = \exp\left(\left[\rho + \frac{uv}{4}\right] E\right) \exp(uC_2) \underbrace{\exp(vC_1) f(t,x)}_{= f(t,\, x+v)}$$

ANALOG FINDEN WIR FÜR $SL(2,\mathbb{R})$ DIE LOKALE MULTIPLIKATOR DARSTELLUNG

$$\boxed{\hat{T}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}}_{=M}\Big) f(x,t) = \exp\left[i\left(\frac{x^2\beta/4}{\delta + t\beta}\right)\right] (\delta + t\beta)^{-1/2} f\left(\frac{\gamma + t\alpha}{\delta + t\beta}, \frac{x}{\delta + t\beta}\right)}$$

BEACHTE $\hat{T}\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\right)$ UND $\hat{T}(u,v,\rho)$ BILDEN EBENFALLS LÖSUNGEN VON (*) IN LÖSUNGEN AB, DA JEDES ELEMENT $\{K_j, K^0\} = \mathcal{G}_2$ LÖSUNGEN AUF LÖSUNGEN ABBILDET, d.h.,

$$\exp(\tau K_j) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^k}{k!} K_j^k$$

UND JEDES GLIED DER SUMME BILDET $\mathcal{F}_0$ AUF $\mathcal{F}_0$ AB.
LÖSUNGSRAUM

DIE LOKALE SYMMETRIE GRUPPE G_2 ZU $\mathcal{G}_2$ IST DAS "SEMI-DIREKTE PRODUKT"

$$SL(2,\mathbb{R}) \ltimes W_1 \cong G_2$$

DIE LOKALE MULTIPLIKATOR DARSTELLUNG VON G_2 IST MIT

$$g = (M, \vec{w} = (u,v,\rho)) \in G_2$$

$\hat{T}(g) = \hat{T}(M)\, \hat{T}(\vec{w})$ SODASS

$$\begin{aligned}
\hat{T}(g)\hat{T}(g') &= \hat{T}(M)\, \hat{T}(\vec{w})\, \hat{T}(M')\, \hat{T}(\vec{w}') \\
&= \hat{T}(M)\, \hat{T}(M')\, \hat{T}(M'^{-1})\, \hat{T}(\vec{w})\, \hat{T}(M')\, \hat{T}(\vec{w}') \\
&= \hat{T}(MM') \left\{ \hat{T}(M'^{-1})\, \hat{T}(\vec{w})\, \hat{T}(M') \right\} \hat{T}(\vec{w}') \\
&= \hat{T}(g g') \\
&= \hat{T}\Big((MM';\, \underbrace{\hat{T}(M'^{-1})\, \hat{T}(\vec{w})\, \hat{T}(M')}_{= \hat{T}(u\delta + v\beta;\; u\gamma + v\alpha;\; \rho)}\, \hat{T}(\vec{w}')) \Big)
\end{aligned}$$

$\hat{T}(g^{-1}) = \hat{T}(\omega^{-1})\,\hat{T}(M^{-1})$ … "INVERSES ELEMENT"

ÜBER DIE "<u>EIGENVEKTOREN</u>" DER SYMMETRIE-OPERATOREN $K \in \mathcal{G}_2$ WERDEN WIR ALLE R-SEPARIERBAREN LÖSUNGEN VON (*) SUCHEN MIT DEM ZUGEHÖRIGEN KOORDINATENSYSTEM $\{\vartheta, u\}$.

$$K\psi_\lambda = i\lambda\psi_\lambda$$

EIN MIT $\hat{T}(g)$ TRANSFORMIERTER EIGENVEKTOR ψ_λ BLEIBT EIN EIGENVEKTOR ZU λ NUR IN EINEM TRANSFORMIERTEN KOORDINATENSYSTEM DA MIT $\psi'_\lambda = \hat{T}(g)\psi_\lambda$

$$K^g = \hat{T}(g)\,K\,\hat{T}(g^{-1})$$

$$K^g\psi'_\lambda = \hat{T}(g)\,K\,\hat{T}(g^{-1})\,\hat{T}(g)\,\psi_\lambda = i\lambda\psi'_\lambda$$

$\Rightarrow$ OPERATOREN, DIE SICH VERMÖGE

$$K' = \hat{T}(g)\,K\,\hat{T}(g^{-1})$$

INEINANDER ÜBERFÜHREN LASSEN SIND ÄQUIVALENT UND FÜHREN ZU ÄQUIVALENTEN SEPARIERBAREN LÖSUNGEN. WIR SAGEN, SIE SIND IM GLEICHEN "<u>ORBIT</u>"

FÜR EINEN ALLGEMEINEN SYMMETRIE-OPERATOR

$$K = a_2K_2 + a_1K_1 + a_0K^0 + a_{-1}K_{-1} + a_{-2}K_{-2}$$

(WIR IGNORIEREN DIE TRIVIALE SYMMETRIE K_0)
SIEHT MAN, DASS

$$\alpha = (a_2a_{-2} + a_0^2)$$

UNTER DEN TRANSFORMATIONEN $\hat{T}(g)\,K\,\hat{T}(g^{-1})$ INVARIANT IST

$\alpha = 0$: K_{-2}, K_{-1} … "<u>ORBIT 1</u>"
$K_2 \pm K_{-1}$; $K_{-2} \pm K_1$ … "<u>ORBIT 2</u>"
$\alpha > 0$: K^0; $K_2 + K_{-2}$ … "<u>ORBIT 3</u>"
$\alpha > 0$: $K_{-2} - K_2$ … "<u>ORBIT 4</u>"

$\mathcal{G}_2/\{K_0\}$ WIRD DURCH G_2 IN INÄQUIVALENTE ORBITS UNTERTEILT

HILBERTRAUM-DARSTELLUNG VON $\mathfrak{g}_2$

BISHER HABEN WIR UNS LEDIGLICH IM $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ BEFUNDEN. JETZT WOLLEN WIR AUF EINEN HILBERTRAUM $L^2(\mathbb{R})$ (EIGENTLICH $(L^2(\mathbb{R}), \mathcal{D}(\mathbb{R}))$... "RIGGED HILBERTSPACE")

→ IM LÖSUNGSRAUM $\mathcal{F}_0$ KANN MAN FORMAL

$$\partial_t \longmapsto i\partial_{xx}$$

EINSETZEN UND t ALS PARAMETER INTERPRETIEREN

DIE SYMMETRIE-OPERATOREN $\{K_j, K^0\}$ SIND LINEAR-KOMBINATIONEN ZU FESTEM PARAMETER t VON

$$\boxed{\left\{\mathcal{K}_2 = \frac{ix^2}{4}\ ;\ \mathcal{K}_1 = \frac{ix}{2}\ ;\ \mathcal{K}_{-1} = \partial_x\ ;\ \mathcal{K}_{-2} = i\partial_x^2\ ;\ \mathcal{K}_0 = i\ ;\ \mathcal{K}^0 = x\partial_x + \frac{1}{2}\right\}}$$

DIE $\{i\mathcal{K}_j, i\mathcal{K}^0\}$ HABEN EINE EINDEUTIGE SELBSTADJUNGIERTE ERWEITERUNG AUF $L^2(\mathbb{R})$

DIE "SPEKTRAL-THEORIE" SAGT UNS, DASS ES ZU JEDEM "SCHIEF HERMITE'SCHEN OPERATOR" (ANTIHERMITESCH)

$$\mathcal{K}^+ = -\mathcal{K} \in \mathfrak{g}_2$$

EINE "UNITÄRE EINPARAMETRIGE GRUPPE $U(t) = \exp(t\mathcal{K})$" GIBT

$\boxed{\to \exp(\alpha\mathcal{K}) \text{ EXPONIEREN ZU GLOBALER DARSTELLUNG } \tilde{G}_2 \text{ VON } G_2}$

· BEISPIEL: $SU(2) \to SO(3)$ HABEN GLEICHE ALGEBRA

DIE "ZEITABHÄNGIGE" LIE-ALGEBRA DARSTELLUNG IST

$$\boxed{\begin{aligned} K_j &= \exp(t\mathcal{K}_{-2})\,\mathcal{K}_j\,\exp(-t\mathcal{K}_{-2}) \\ K^0 &= \exp(t\mathcal{K}_{-2})\,\mathcal{K}^0\,\exp(-t\mathcal{K}_{-2}) \end{aligned}}$$

"HEISENBERG UND SCHRÖDINGERBILD"

UNABHÄNGIG VOM BILD HABEN WIR DIE GLEICHEN KOMMUTATORRELATIONEN

$\boxed{\exp(t\mathcal{K}_{-2}) \text{ IST DER ZEITTRANSLATIONS OPERATOR DER FREIEN QUANTENMECHANIK}}$

FÜR $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ FINDEN WIR:

a.) $\Psi(t,x) = \exp(t\mathcal{K}_{-2})\, f(x)$ LÖST $i\partial_t\Psi = -\partial_x^2\Psi$.

b.) $\mathcal{L}_3 = \mathcal{K}_{-2} - \mathcal{K}_2$: $\Psi(t,x) = \exp(t\mathcal{L}_3)\, f(x)$ LÖST $i\partial_t\Psi = (-\partial_x^2 + \frac{x^2}{4})\Psi$

c.) $\mathcal{L}_2 = \mathcal{K}_{-2} + \mathcal{K}_2$: $\psi(t,x) = \exp(t\mathcal{L}_2) f(x)$ LÖST

$$i\partial_t \psi = \left(-\partial_x^2 - \frac{x^2}{4}\right)\psi$$

d.) $\mathcal{W} = \mathcal{K}_{-2} - \mathcal{K}_1$: $\psi(t,x) = \exp(t\mathcal{W}) f(x)$ LÖST

$$i\partial_t \psi = \left(-\partial_x^2 + \frac{x}{2}\right)\psi$$

DIESE 4 GLEICHUNGEN HABEN "ISOMORPHE SYMMETRIE ALGEBREN" UND SOLLTEN GEMEINSAM BEHANDELT WERDEN.

LÖSUNGEN UNTEREINANDER ZU TRANSFORMIEREN KANN MAN VERMÖGE, Z.B., $i\partial_t \psi = -\partial_x^2 \psi \longrightarrow i\partial_t \Phi = \left(-\partial_x^2 - \frac{x^2}{4}\right)\Phi$

$$\Phi(t,x) = \exp(t\mathcal{L}_3)\exp(-t\mathcal{K}_{-2})\,\psi$$

$$= \exp(-t\mathcal{K}_{-2})\underbrace{\exp(t\mathcal{K}_{-2})\exp(t\mathcal{L}_3)\exp(-t\mathcal{K}_{-2})}_{=\exp(tL_3)}\psi$$

ZEIT-ENTWICKLUNG:

$$\boxed{\exp(a\mathcal{K}_{-2}) f(x) = \frac{1}{(4\pi i a)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(x-y)^2/4ia]\, f(y)\, dy}$$

LÖSUNG DURCH SEPARATION UND SPEKTRUM

UNITÄR ÄQUIVALENTE OPERATOREN (IM GLEICHEN ORBIT) HABEN GLEICHES SPEKTRUM

1. ORBIT: $\mathcal{K}_{-1} = \partial_x$ (AM ANFANG)

2. ORBIT: $\mathcal{K}_2 + \mathcal{K}_{-1} = \partial_x + \frac{ix^2}{4}$: (AUF ORBIT VON $\mathcal{K}_{-2} - \mathcal{K}_1 = i\partial_x^2 - i\frac{x}{2}$)

$$\longrightarrow f_\lambda^{(2)}(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-i\left(\lambda x + \frac{x^3}{12}\right)}, \quad -\infty < \lambda < \infty$$

$$F_\lambda^{(2)}(t,x) = \exp(t\mathcal{K}_{-2}) f_\lambda^{(2)}(x) = e^{-\frac{i}{4}\left(\pi + \frac{1}{8v^2} - u^2 v + \frac{u}{v} + \frac{4\lambda}{v}\right)} 2^{1/6}$$

$$\times \mathrm{Ai}\left[2^{2/3}\left(\frac{u}{2} + \lambda\right)\right]$$

$\mathrm{Ai}(z)$ … "AIRY-FUNKTION" ; $\mathrm{Ai}(z) = \pi^{-1}\left(\frac{z}{3}\right)^{1/2} K_{1/3}\left(2z^{3/2}/3\right)$

"MODIFIED BESSELFUNCTION"

R-SEPARIERT IN $\{t = v,\ x = uv + (2v)^{-1}\}$ UND $R = \left(u^2 v - \frac{u}{v}\right)\frac{1}{4}$

3. ORBIT: $K^0 = x\partial_x + \frac{1}{2}$ (AUF ORBIT VON $K_{-2} + K_2 = i\partial_x^2 + i\frac{x^2}{4}$)

$$\longrightarrow f_\lambda^{(3)\pm}(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \, x_\pm^{-i\lambda - \frac{1}{2}} \quad ; \quad -\infty < \lambda < \infty$$

$$x_+^\alpha = \begin{cases} x^\alpha & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad ; \quad x_-^\alpha = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ (-x)^\alpha & x < 0 \end{cases}$$

$$F_\lambda^{(3)\pm}(t,x) = \exp\left(-\frac{x^2}{8it} + \frac{\pi\lambda}{4} + \frac{i\pi}{8}\right) \frac{(2t)^{-i\lambda/2 + \frac{1}{4}}}{(8\pi^2 i t)^{1/2}} \Gamma\left(\tfrac{1}{2} - i\lambda\right)$$

$$\times D_{i\lambda - \frac{1}{2}}\left(-\frac{x\, e^{-i\pi/4}}{(2t)^{1/2}}\right) \quad ; \quad t > 0 \quad ; \quad D_\nu(z) \ldots \text{PARABOLISCHE ZYLINDER FKT}$$

SEPARIERT IN $\{v = t,\ u = \frac{x}{\sqrt{t}}\}$ UND $R = 0$

4. ORBIT: $L_3 = i\partial_x^2 - \frac{ix^2}{2}$:

$$\longrightarrow f_n^{(4)}(x) = \left[n!\,(2\pi)^{1/2}\, 2^n\right]^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4}} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\lambda_n = n + \tfrac{1}{2} \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$F_n^{(4)}(t,x) = \left\{n!\, 2^n \left[2\pi(1+t^2)\right]^{1/2}\right\}^{-1/2} \exp\left(\frac{i}{4}\frac{x^2 t}{1+t^2} - \frac{x^2}{4(1+t^2)} - i\left(n + \tfrac{1}{2}\right)\tan^{-1}(t)\right)$$

$$\times H_n\left\{\frac{x}{[2(1+t^2)]^{1/2}}\right\} \quad ; \quad H_n(x) \ldots \text{HERMITE-POLYNOM}$$

R-SEPARIERBAR IN $\{v = t,\ x = u(1+v^2)^{1/2}\}$ MIT $R = \frac{u^2 v}{4}$

DIES SIND ALLE R-SEPARIERBAREN LÖSUNGEN DER FREIEN (UND ÄQUIVALENTEN) SG.

JEDE ANDERE GLEICHUNG DER FORM

$$(i\partial_t + \partial_x^2 - v(x))\psi = 0$$

HAT LEDIGLICH TRIVIALE SYMMETRIE ALGEBRA $\{\partial_t, E\}$

BEACHTE: DIE GESAMTE QUANTENTHEORIE BERUHT AUF DER DARSTELLUNG VON

$$\{\hat{P}_i \,;\, \hat{Q}_i \,;\, \hat{C} = -i\hbar \hat{\mathbb{1}}\}$$

MIT

$$[\hat{P}_i, \hat{P}_j] = [\hat{Q}_i, \hat{Q}_j] = 0 \,, \quad [\hat{P}_i \,;\, \hat{Q}_j] = -i\hbar \hat{\mathbb{1}}\, \delta_{ij}$$

DER $2n+1$ DIMENSIONALEN "HEISENBERG/WEYL ALGEBRA".

$\rightarrow$ STONE-VON NEUMANN THEOREM GARANTIERT ÄQUIVALENZ VON FOCK-RAUM UND L^2 DARST.