- Wir finden also

$$\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \simeq \frac{e^{ikr}}{r} e^{-i\vec{k}_f \cdot \vec{r}'} \qquad (\text{II }15)$$

(Hätten wir überall $|\vec{r}-\vec{r}'|$ durch r ersetzt, wäre keine Winkellabh. mehr da!)

- Damit folgt

$$\psi_{\vec{k}} \xrightarrow[r\to\infty]{} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{2m}{4\pi\hbar^2} \int e^{-i\vec{k}_f \cdot \vec{r}'} V(\vec{r}')\psi_{\vec{k}}(\vec{r}') d^3r'$$

$$(\text{II }16)$$

- In erster Ordnung V finden wir wiederum das Resultat der Bornschen Näherung

$$f_k(\vartheta, \varphi) = -\frac{2m}{4\pi\hbar^2} \int e^{-i\vec{k}_f \cdot \vec{r}'} V(\vec{r}')\, e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}'} d^3r'.$$

$$(\text{II }17)$$

- Es gibt noch eine andere Möglichkeit $G^0(\vec{r})$ zu berechnen, die sich Cauchys Theorem bedient ($\rightarrow$ Übung).

- Eine Analyse der Gültigkeit der Bornschen Näherung ergibt die Bedingung

$$\frac{m V_0 r_0^2}{\hbar^2} \ll k r_0 ,$$

rechte Seite groß

d.h. Bornsche Näherung gut bei hohen Energien und bei seichten Potentialen (die keine Teilchen binden können)

linke Seite klein

II.3 Partialwellenzerlegung

- Für sphärisch symm. Potentiale $V(\vec{r}) = V(r)$ gilt $f_k(\vartheta, \varphi) = f_k(\vartheta)$

- Entwicklung in Legendre-Polynomen

$$P_\ell(\cos\vartheta) = \left(\frac{4\pi}{2\ell+1}\right)^{1/2} Y_\ell^0 ,$$

$$f_k(\vartheta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1)\, a_\ell(k)\, P_\ell(\cos\vartheta) \qquad (\text{II}\,18)$$

Partialwellenzerlegung

$a_\ell(k)$ Amplituden einer Partialwelle mit Drehimpulsquantenzahl ℓ

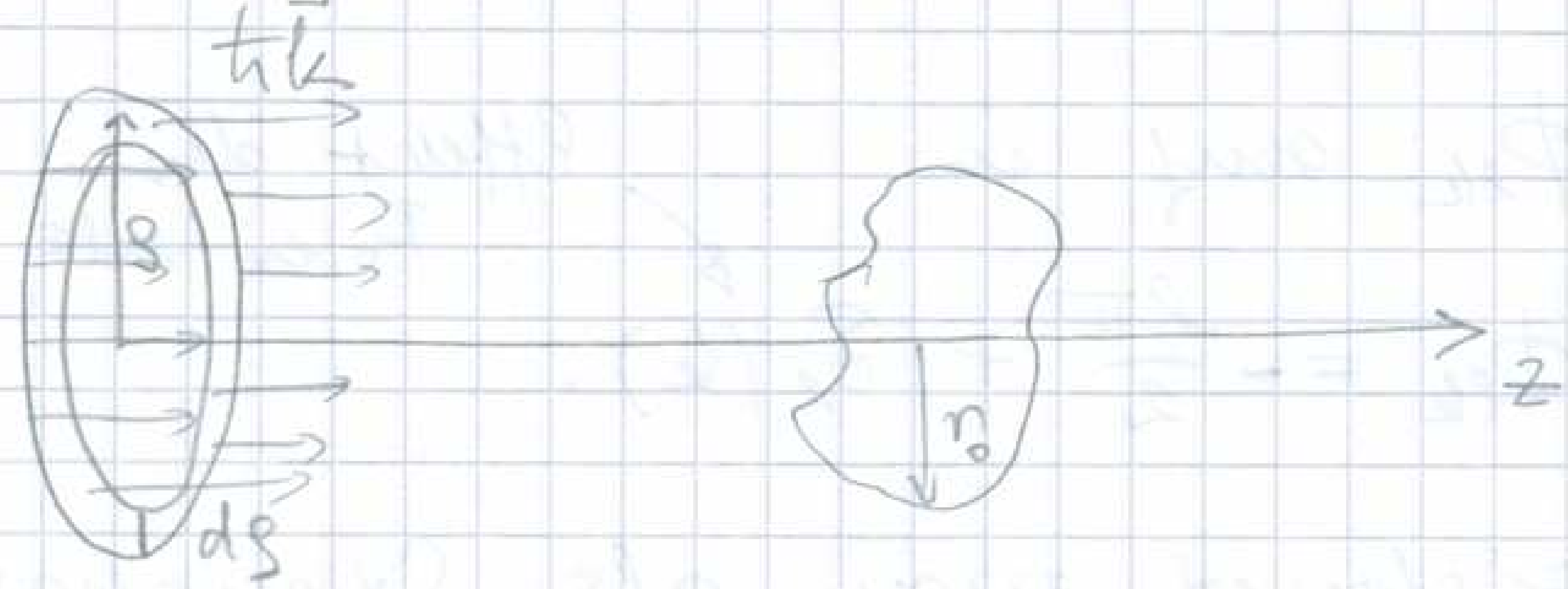
- Kugelsymm. Potentiale erhalten Drehimpuls
  → jede Partialwelle streut unabhängig

- Zerlegung der einfallenden Welle nach Drehimpulsquantenzahlen:

$$e^{ikz} = e^{ikr\cos\vartheta} = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell (2\ell+1)\, j_\ell(kr)\, P_\ell(\cos\vartheta) . \qquad (\text{II}\,19)$$

- Anstelle einer Funktion $f_k(\vartheta)$ haben wir es nun mit unendlich vielen $a_\ell(k)$ zu tun; macht nur Sinn wenn nur wenige $a_\ell(k)$ beitragen.

- Was ist das maximale $\ell = \ell_{max}$, das noch beiträgt?



ρ: Stoßparameter

Drehimpuls $\hbar k \rho \simeq \hbar l$

$$\Rightarrow l_{max} \simeq k\rho_{max} \simeq kr_0$$

$\Rightarrow$ Partialwellenzerlegung sinnvoll bei niedrigen Energien (Beispiele in Übungen).

- Da für $r \to \infty$ gilt $j_l(kr) \to \dfrac{\sin(kr - \frac{l\pi}{2})}{kr}$

folgt für (II 19)

$$e^{ikz} \longrightarrow \sum_{l=0}^{\infty} \left(e^{i\pi/2}\right)^l (2l+1) \frac{1}{2ikr} \left(e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})} - e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})}\right) \times P_l(\cos\vartheta)$$

$$= \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left(\frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{-i(kr - l\pi)}}{r}\right) P_l(\cos\vartheta). \qquad \text{(II 20)}$$

- Selbst bei Anwesenheit eines Potentials muß für $r \to \infty$ die Radialwellenfunktion von der Gestalt

$$R_l(r) = \frac{u_l(r)}{r} \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{A_l \sin(kr + \phi_{lk})}{r}$$

sein.

- Wir spalten Φ_{lk} auf in

Effekt des Potentials

$$\Phi_{lk} = -\frac{l\pi}{2} + \delta_l(k).$$

Die $\delta_l(k)$ bezeichnet man als Streuphasen. Wir haben also

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) \longrightarrow \sum_{l=0}^{\infty} A_l \frac{e^{i(kr - l\pi/2 + \delta_l)} - e^{-i(kr - l\pi/2 + \delta_l)}}{r} P_l \tag{II 21}$$

V ändert nur an den auslaufenden Wellen etwas. Daher liefert der Vergleich mit (II 20)

$$A_l e^{-i(kr - l\pi/2 + \delta_l)} \overset{!}{=} \frac{2l+1}{2ik} e^{-i(kr - l\pi)}$$

$$\longrightarrow \quad A_l = \frac{2l+1}{2ik} e^{i(l\pi/2 + \delta_l)}$$

sodaß

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) \longrightarrow \frac{1}{2ikr} \sum_l (2l+1) \left[e^{i(kr + 2\delta_l)} - e^{-i(kr - l\pi)} \right] P_l$$

$$= e^{ikz} + \underbrace{\left(\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2ik} P_l \right)}_{f_k(\vartheta)} \frac{e^{ikr}}{r}. \tag{II 22}$$

- Vergleich mit (II 18) liefert die Partialwellenamplituden

$$a_l(k) = \frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2ik}. \tag{II 23}$$

- Ohne Potential sind alle $\delta_l = 0 \implies a_l = 0$.

$e^{2i\delta_l}$ heißt auch S-Matrix-Element der Partialwelle,

$$S_l(k) = e^{2i\delta_l(k)}.$$

- Wir berechnen nun den Wirkungsquerschnitt. Mit

$$a_l(k) = \frac{e^{2i\delta_l}-1}{2ik} = \frac{e^{i\delta_l}\sin\delta_l}{k}$$

folgt

$$f_k(\vartheta) = \frac{1}{k}\sum_l (2l+1)\, e^{i\delta_l}\sin\delta_l\, P_l(\cos\vartheta). \qquad \text{(II24)}$$

Der totale Wirkungsquerschnitt ist (s. (II5))

$$\sigma(k) = \int |f_k|^2 \, d\Omega .$$

Da

$$\int P_l(\cos\vartheta)\, P_{l'}(\cos\vartheta)\, d(\cos\vartheta) = \frac{2}{2l+1}\,\delta_{ll'}$$

↑ Kronecker-δ

$$\Rightarrow \quad \sigma(k) = 2\,\frac{2\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)\sin^2\delta_l = \sum_l \sigma_l(k) \qquad \text{(II25)}$$

mit $\sigma_l(k) = \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\sin^2\delta_l$.

- Vergleich von (II25) mit (II24) zeigt:

$$\sigma(k) = \frac{4\pi}{k}\,\mathrm{Im}\, f_k(\vartheta=0). \qquad \text{(II26)}$$

- Dies ist das „Optische Theorem", das den totalen Wirkungsquerschnitt mit der Streuamplitude in Vorwärtsrichtung $\vartheta=0$ verknüpft.

<u>Beispiel:</u> Streuphasen für Streuung an harten Kugeln

$$V(r) = \begin{cases} \infty & \text{für } r < r_0 \\ 0 & \text{für } r \geq r_0 . \end{cases}$$

Die radiale Wellenfunktion

$$R_\ell(r) = A_\ell j_\ell(kr) + B_\ell n_\ell(kr)$$

muß für $r < r_0$ verschwinden. Daher muß gelten

$$R_\ell(r_0) = 0 \implies \frac{B_\ell}{A_\ell} = -\frac{j_\ell(kr_0)}{n_\ell(kr_0)} .$$

Für $r \to \infty$ wissen wir, daß

$$R_\ell(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{1}{kr}\left[A_\ell \sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2}\right) - B_\ell \cos\left(kr - \frac{\ell\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{kr}\left[\frac{A_\ell}{2i}\left(e^{i(kr-\frac{\ell\pi}{2})} - e^{-i(kr-\ell\pi/2)}\right) - \frac{B_\ell}{2}\left(e^{i(kr-\frac{\ell\pi}{2})} + e^{-i(kr-\frac{\ell\pi}{2})}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2kr}\left[-e^{i(kr-\ell\pi/2)}(B_\ell + iA_\ell) + e^{-i(kr-\ell\pi/2)}(A_\ell i - B_\ell)\right]$$

$$= \frac{i}{2kr}\left[(A_\ell + iB_\ell)e^{-i()} - \underbrace{(A_\ell - iB_\ell)}_{\sqrt{A_\ell^2+B_\ell^2}\, e^{i\delta_\ell}} e^{i()}\right]$$

$$\tan\delta_\ell = -\frac{B_\ell}{A_\ell} = \frac{j_\ell(kr_0)}{n_\ell(kr_0)}$$

$$= \frac{i\sqrt{A_l^2 + B_l^2}}{2kr}\left[e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l)} - e^{i(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l)}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{A_l^2 + B_l^2}}{kr}\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right)$$

- z.B. ist für $l=0$ wegen

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad n_0(x) = -\frac{\cos x}{x}$$

sodaß

$$\delta_0 = \arctan(-\tan kr_0) = -kr_0$$

- Streuphase negativ → Verschiebung hin zu größeren r, da Wellenfunktion erst bei $r = r_0$ beginnt zu schwingen anstatt schon bei $r=0$.

- Im allgemeinen: $\delta_l < 0$ für repulsive Potentiale,
  $\delta_l > 0$ für attraktive

- Für $k \to 0$ findet man

$$\tan\delta_l \underset{k\to 0}{\simeq} \delta_l \sim (kr_0)^{2l+1}, \qquad (\text{II}27)$$

d.h. nur wenig Effekt auf hohe Drehimpulsbeiträge.

- (II27) kann man heranziehen, um r_0 eines Potentials zu bestimmen.

– Für $k \to 0$ ist also $l=0$ dominant und somit mit (II 25)

$$\sigma(k) \cong \frac{4\pi}{k^2}\sin^2\delta_0$$

$$= \frac{4\pi}{k^2}\sin^2 kr_0 \simeq \frac{4\pi}{k^2}(kr_0)^2$$

$$= 4\pi r_0^2$$

– Für $k \to \infty$ haben wir

$$\tan\delta_l = \frac{j_l(kr_0)}{n_l(kr_0)} \simeq -\frac{\sin(kr_0 - l\pi/2)}{\cos(kr_0 - l\pi/2)},$$

also

$$\delta_l = -kr_0 + \frac{l\pi}{2}.$$

Einsetzen in (II 25) $\left(\sigma(k) = \frac{4\pi^2}{k^2}\sum_l (2l+1)\sin^2\delta_l\right)$

$$\sigma(k) = \frac{4\pi}{k^2}\Big\{\sin^2 kr_0 + 3\sin^2\left(kr_0 - \frac{\pi}{2}\right) + 5\sin^2(kr_0 - \pi) + 7\sin^2\left(kr_0 - \frac{3}{2}\pi\right) + \dots\Big\}$$

$$= \frac{4\pi}{k^2}\Big\{\sin^2 kr_0 + \overbrace{\sin^2\left(kr_0 - \frac{\pi}{2}\right)}^{\cos^2 kr_0} + 2\Big(\overbrace{\sin^2\left(kr_0 - \frac{\pi}{2}\right)}^{\cos^2 kr_0} + \overbrace{\sin^2(kr_0 - \pi)}^{\sin^2 kr_0}\Big) + 3\Big(\underbrace{\sin^2(kr_0 - \pi)}_{\sin^2 kr_0} + \underbrace{\sin^2\left(kr_0 - \frac{3\pi}{2}\right)}_{\cos^2 kr_0}\Big) + \dots\Big\}$$

max. relev. Drehimpuls wächst wie kr_0

$$= \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{kr_0} l = \frac{4\pi}{k^2}\,\frac{1}{2}kr_0(kr_0+1)$$

$$\xrightarrow[kr_0 \gg 1]{} 2\pi r_0^2$$

$\neq \pi r_0^2$, wie vielleicht erwartet und aus der klass. Mech. bekannt.

Warum bekommen wir ein doppelt so großes Ergebnis wie klassisch?

Eine detailliertere Rechnung liefert für den diff. Wirkungsquerschnitt (für $kr_0 \gg 1$)

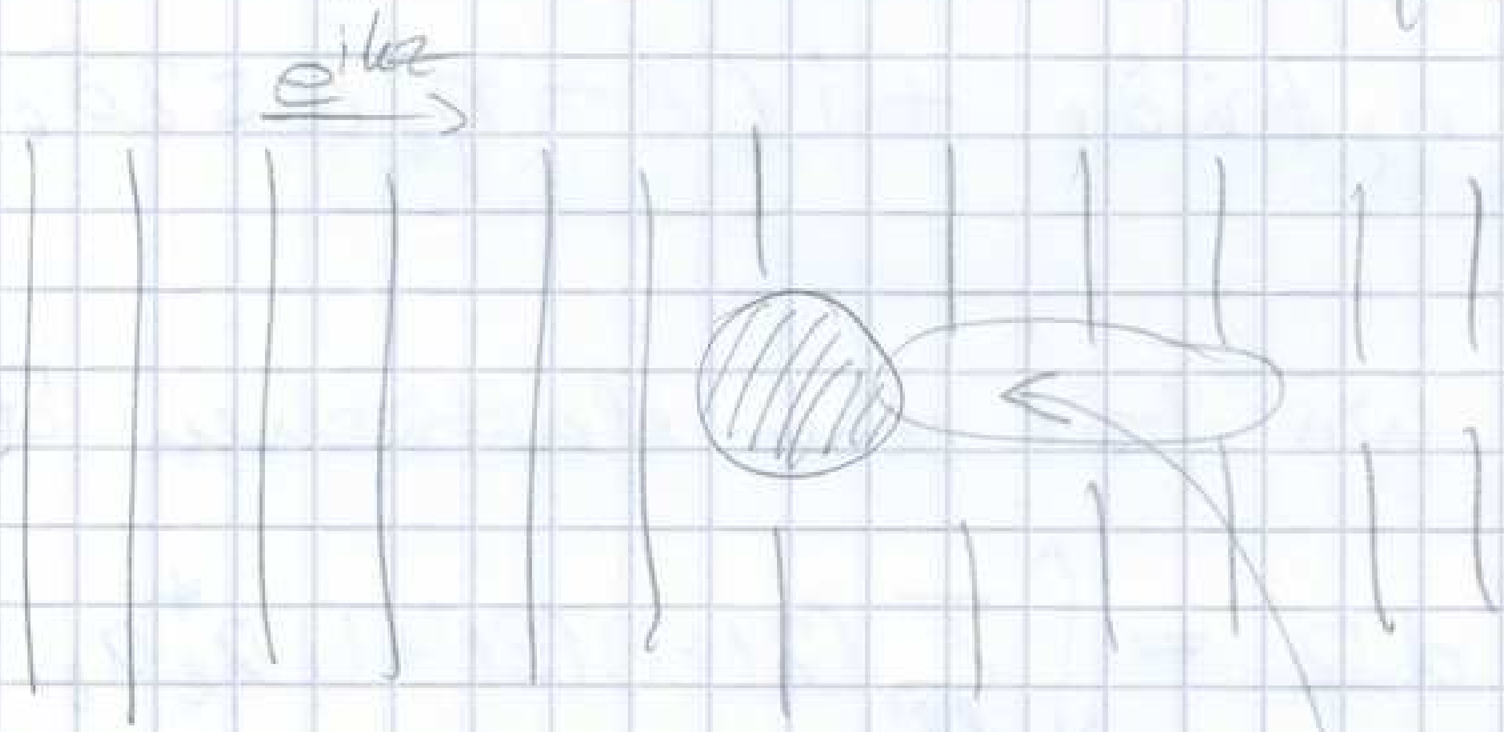
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} r_0^2 \left(1 + \cot^2 \frac{\vartheta}{2} \, J_1^2(kr_0 \sin\vartheta)\right) \quad (\text{II}28)$$

wobei $J_1(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos\left(x - \frac{3}{4}\pi\right)$. (II29)

- Erster Term in (II28) ist isotrop und liefert nach Integration über $d\Omega$
$$\sigma_1 = \pi r_0^2$$

- Zweiter Term ist für Beugung verantwortlich und sehr stark in Vorwärtsrichtung $\vartheta = 0$ konzentriert

→ „verantwortlich" für „Schattenwurf"



im Schattengebiet muß wegen
$\psi_k = e^{ikz} + \psi_s$
ψ_s die einfallende Welle „weginterferieren".
≠ in der klassischen Rechnung

- Wir betrachten nun <u>inelastische Streuung</u>, indem wir zulassen, daß das S-Matrix-Element der Partialwelle modifiziert wird:

$$S_\ell(k) = \eta_\ell(k)\, e^{2i\delta_\ell(k)}, \qquad 0 \leq \eta_\ell \leq 1$$

Idee: damit können wir Anregungen im streuenden Objekt berücksichtigen bzw. Teilchen vernichten.

- Für die Partialwellenamplituden haben wir dann

$$a_\ell(k) = \frac{\eta_\ell(k)\, e^{2i\delta_\ell(k)} - 1}{2ik}$$

$$= \frac{1}{2k}\left(i - i\eta_\ell e^{2i\delta_\ell}\right)$$

$$= \frac{1}{2k}\left(i - i\eta_\ell \cos 2\delta_\ell + \eta_\ell \sin \delta_\ell\right)$$

$$= \frac{1}{2k}\left(\eta_\ell \sin \delta_\ell + i\left(1 - \eta_\ell \cos 2\delta_\ell\right)\right)$$

Damit bekommen wir für den elastischen Streuqu.:

$$\sigma_{el}(k) = \int |f_{el}|^2 d\Omega = \int \sum_{\ell\ell'} (2\ell+1)(2\ell'+1)\, a_\ell^* a_{\ell'} P_\ell^* P_\ell \, d\Omega$$

$$= 2\pi \sum_\ell 2(2\ell+1)|a_\ell|^2$$

$$= 4\pi \sum_\ell (2\ell+1) \frac{1}{4k^2}\left(\eta_\ell^2 \sin^2 \delta_\ell + \left(1 - \eta_\ell \cos 2\delta_\ell\right)^2\right)$$

$$= 4\pi \sum_\ell \frac{2\ell+1}{4k^2}\left(\eta_\ell^2 + 1 - 2\eta_\ell \cos 2\delta_\ell\right)$$

(II 30)

- Um herauszubekommen, welcher Fluß aufgrund von inel. Prozessen verloren geht berechnen wir

$$-\int d\Omega\, r^2\, \vec{e}_r \cdot \vec{j} = I$$

wobei der Strom mit der Gesamtwellenfkt $\psi_{\vec{k}}(\vec{r})$ (s. (II 22)) berechnet wird.
Treten nur elastische Prozesse auf, so ist $I = 0$, da keine Wahrsch. „verloren" geht.

einfallend

Man findet $$I = \frac{\hbar k}{m} \frac{\pi}{k^2} \sum_l (1-\eta_l^2)(2l+1)$$

sodaß

$$\sigma_{inel} = I \Big/ \frac{\hbar k}{m} = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1)(1-\eta_l^2) \qquad (II\,31)$$

In der Tat verschwindet σ_{inel} für $\eta_l = 1$

- Totaler Wirkungsquerschnitt für inelastische Streuung:

$$\sigma_{tot} = \sigma_{el} + \sigma_{inel} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_l (2l+1)(1-\eta_l \cos 2\delta_l) \qquad (II\,32)$$

- Vergleich mit

$$f_k(\vartheta) = \sum_l (2l+1) \frac{\eta_l e^{2i\delta_l} - 1}{2ik} P_l(\cos\vartheta)$$

zeigt, daß

$$\operatorname{Im} f_k(0) = \sum_l (2l+1) \frac{1-\eta_l \cos 2\delta_l}{2k},$$

also das optische Theorem gilt auch für inelastische Streuung:

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} f(0).$$

II.4 Zweiteilchenstreuung

- Bisher hatten wir das streuende Teilchen sehr viel schwerer angenommen als das gestreute.

- Was wenn zwei ähnlich schwere Teilchen aneinander streuen?

- Einfallende Wellen: (beide $\parallel \vec{e}_z$)

$$\psi^0 = e^{ik_1 z_1} e^{ik_2 z_2}$$

$$= e^{i(k_1+k_2)\frac{z_1+z_2}{2}} e^{i\frac{k_1-k_2}{2}(z_1-z_2)}$$

$$\stackrel{\triangle}{=} \psi^0_{CM}(z_{CM}) \; \psi^0_{rel}(z)$$

System, wo $k_1 + k_2 = 0$ (Schwerpunktsyst.)

$\Rightarrow k_2 = -k_1, \quad k = k_1, \quad z = z_1 - z_2$

$\Rightarrow \psi^0_{rel} = e^{ikz}$

- Potential $V(\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ beeinflusst nur Relativbewegung, also

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi^0_{CM}(z_{CM}) \left[e^{ikz} + \psi_{s,rel}(\vec{r}) \right]$$

$$\xrightarrow[r\to\infty]{} \psi^0_{CM}(z_{CM}) \left[e^{ikz} + f_k(\vartheta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r} \right]$$

- Da im Schwerpunktsystem $k_1 + k_2 = 0$ ist $\psi^0_{CM}(z_{CM}) = 1$ und braucht nicht