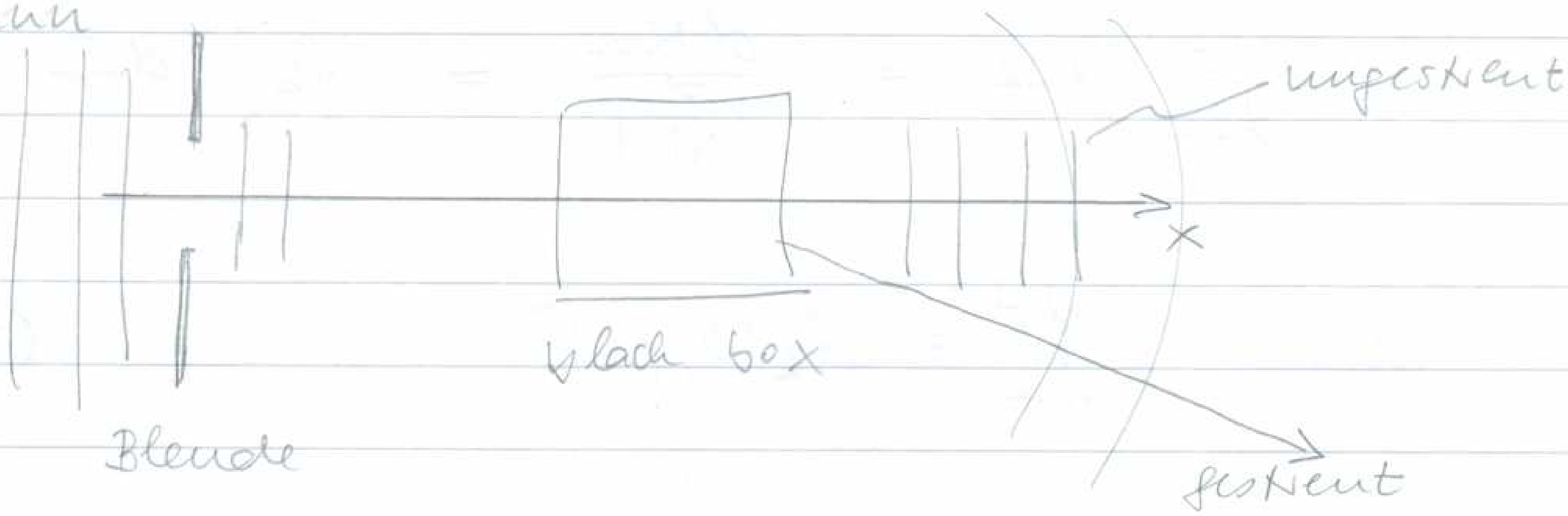
die einfallende Welle (wie in Experimenten) lateral beschränkt vorstellen, sodass für $r \to \infty$ und $\vartheta \neq 0$ nur $\psi_s$ beitragen kann




Dann haben wir $(\vartheta \neq 0)$

$$\vec{j}_s \sim \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi_s^* \vec{\nabla}\psi_s - \psi_s \vec{\nabla}\psi_s^*\right).$$

Mit

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \underbrace{\vec{e}_\vartheta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \varphi}}_{\to 0 \text{ für } r \to \infty}$$

und $$\frac{\partial}{\partial r} f_k(\vartheta,\varphi)\frac{e^{ikr}}{r} = f_k(\vartheta,\varphi)\, ik \frac{e^{ikr}}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{j}_s \sim \frac{\hbar}{mi}|f_k|^2 ik \frac{1}{r^2}\vec{e}_r = \frac{\vec{e}_r}{r^2}|f_k|^2\frac{\hbar k}{m}$$

– Die Wahrsch., die in das Raumwinkelelement $d\Omega$ fliegt lautet

$$dR_\Omega = \vec{j}_s \cdot \vec{e}_r\, r^2\, d\Omega$$

$$\sim |f_k|^2 \frac{\hbar k}{m} d\Omega$$

- Damit folgt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{dR_\Omega}{|\vec{j}_i|} = |f_k|^2 d\Omega ,$$

also $$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_k(\vartheta,\varphi)|^2 . \qquad (\text{II} 5)$$

## II.1 Born'sche Näherung

- Wahrsch., unter dem Winkel $(\vartheta, \varphi)$ mit einem Öffnungswinkel ein Teilchen zu messen:

$$P(\vec{p}_i \to d\Omega) = \sum_{\vec{p}_f \text{ in } d\Omega} |\langle \vec{p}_f | \hat{S} | \vec{p}_i \rangle|^2$$

Streumatrix

$$\hat{S} = \lim_{\substack{t_f \to \infty \\ t_i \to -\infty}} \hat{U}(t_f, t_i)$$

Zeitentw.

- Wenn wir das Streupotential $\hat{V}$ als Störung ansehen und bis zur ersten Ordnung zeitabh. Störungstheorie betreiben, so folgt aus Fermi's Golden Rule

$$dR_\Omega = \frac{2\pi}{\hbar}\left[\int_0^\infty |\langle \vec{p}_f|\hat{V}|\vec{p}_i\rangle|^2\, \delta\Big(\underbrace{\frac{p_f^2}{2m}-\frac{p_i^2}{2m}}_{g(p_f)}\Big)\, p_f^2\, dp_f\right] d\Omega$$

$$g'(p_f) = \frac{p}{m}$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar}\left[\int_0^\infty |\langle \vec{p}_f|\hat{V}|\vec{p}_i\rangle|^2\, \frac{\delta(p_f-p_i)}{p_f}\, m\; p_f^2\, dp_f\right] d\Omega$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar}\, |\langle \vec{p}_f|\hat{V}|\vec{p}_i\rangle|^2\, m\, p\, d\Omega \quad , \quad p = p_f = p_i$$

$$|\vec{j}_i| = \left|\frac{\hbar}{2mi}\left(\frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\,\vec{\nabla}\,\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} - \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{(\;)^{3/2}}\,\vec{\nabla}\,\frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{(\;)^{3/2}}\right)\right|$$

$$= \left|\frac{\hbar\vec{k}}{m}\,\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\right| = \frac{\hbar k}{m}\,\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega}\, d\Omega = \frac{dR_\Omega}{|\vec{j}_i|} = (2\pi)^4 \hbar^2\, \frac{m}{\hbar k}\, |\langle \vec{p}_f|\hat{V}|\vec{p}_i\rangle|^2$$

$$\times\, m \underbrace{p}_{\hbar k}\, d\Omega$$

$$= (2\pi)^4 \hbar^2 m^2\, \Big|\underbrace{\langle \vec{p}_f|\hat{V}|\vec{p}_i\rangle}_{\int d^3r'\, V(\vec{r}\,')\, \langle \vec{p}_f|\vec{r}\,'\rangle \underbrace{\langle \vec{r}\,'|\vec{p}_i\rangle}_{\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{r}\,'\cdot\vec{p}_i}}}\Big|^2 d\Omega$$

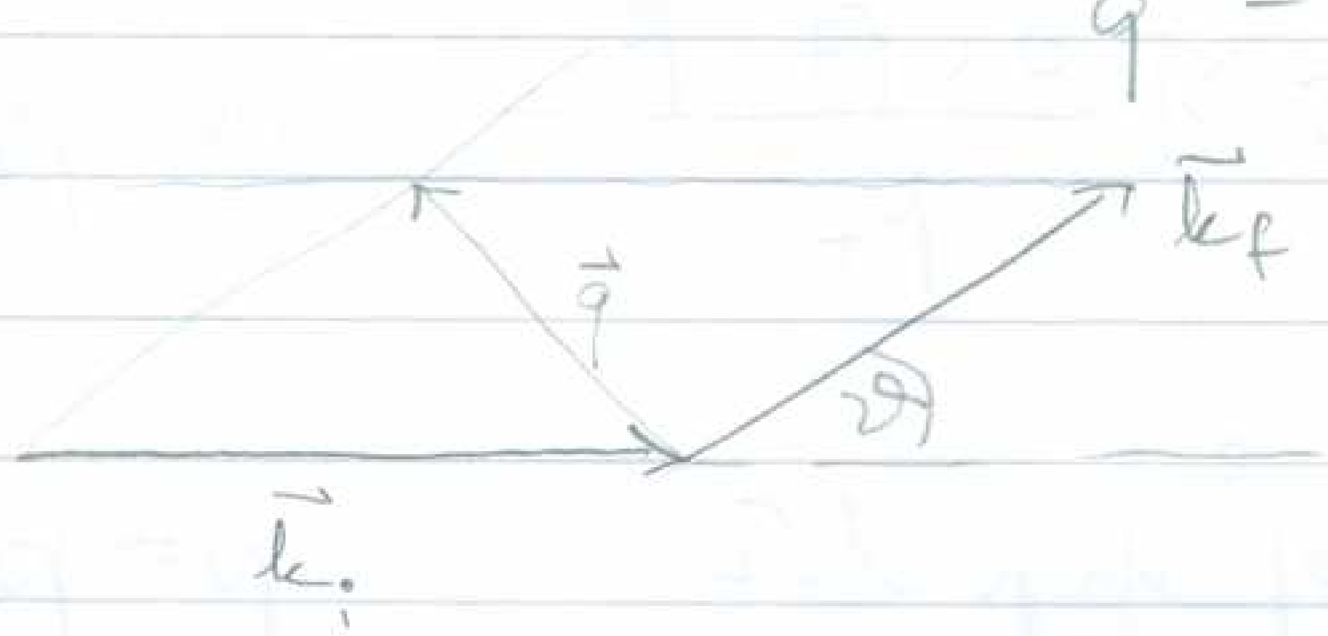
$\hbar\vec{q} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$

$$= \left|(2\pi)^2 \hbar m\, \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3r'\, V(\vec{r}\,')\, e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}\,'}\right|^2 d\Omega$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}\,'} V(\vec{r}\,')\, d^3r' \right|^2 \qquad (\mathrm{II}6)$$

Impulsübertrag $\quad \hbar\vec{q} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$

$$\vec{q} = \vec{k}_f - \vec{k}_i$$




$$|\vec{q}|^2 = |\vec{k}_f - \vec{k}_i|^2 = k^2 - 2\underbrace{\vec{k}_f\cdot\vec{k}_i}_{k^2\cos\vartheta} + k^2$$
$$= 2k^2(1-\cos\vartheta)$$
$$= 4k^2 \sin^2 \vartheta/2$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{q}| = q = 2k \sin\frac{\vartheta}{2} \qquad (\mathrm{II}7)$$

- Vergleich von (II5) mit (II6) $\Rightarrow$

$$f_k(\vartheta,\varphi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}\,'} V(\vec{r}\,')\, d^3r' \qquad (\mathrm{II}8)$$

wird später begründet

$\rightarrow$ in Bornscher Näherung ist die Streuamplitude $\sim$ Fourier-Trafo des Streupotentials bzgl. des Impulsübertrags.

– Im Fall rotationssymm. Streupotentiale

$$V(\vec{r}) = V(r)$$

haben wir die Freiheit, $\vec{e}_z^{\,\prime} \parallel \vec{q}$ zu legen.

$$f_k(\vartheta,\varphi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{-iqr'\overbrace{\cos\vartheta'}^{u}} V(r')\, d(\overbrace{\cos\vartheta'}^{u})\, d\varphi\, r'^2 dr'$$

$$= -\frac{m}{\hbar^2}\int \frac{e^{-iqr'u}}{-iqr'}\Bigg|_{-1}^{1} V(r')\, r'^2 dr'$$

$$= -\frac{m}{\hbar^2}\int \frac{2\sin qr'}{q} V(r')\, r' dr'$$

$$= -\frac{2m}{\hbar^2}\int \frac{\sin qr'}{q} V(r')\, r' dr'$$

$$= f_k(\vartheta) \qquad (\text{da } q(\vartheta) = 2k\sin\tfrac{\vartheta}{2})$$

– Beispiel: Yukawa potential

$$V(r) = \alpha\,\frac{e^{-\mu r}}{r}$$

$$f_k(\vartheta) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2 q}\int \frac{e^{iqr'} - e^{-iqr'}}{2i}\, e^{-\mu r'} dr'$$

$$= -\frac{m\alpha}{\hbar^2 q i}\left[\frac{e^{-r'(\mu-iq)}}{-(\mu-iq)} - \frac{e^{-r'(\mu+iq)}}{-(\mu+iq)}\right]_0^\infty$$

$$= -\frac{m\alpha}{\hbar^2 q i}\left[\frac{1}{\mu-iq} - \frac{1}{\mu+iq}\right] = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2(\mu^2+q^2)}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4m^2\alpha^2}{\hbar^4\left(\mu^2 + 4k^2\sin^2\vartheta/2\right)^2}$$

– Für $\alpha = Ze^2$, $\mu = 0$ $\Rightarrow$ $V(r) = \frac{Ze^2}{r}$

$$\Rightarrow \left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{Coul.}} = \frac{4m^2(Ze^2)^2}{16\underbrace{(\hbar k)^4}_{p^4 = (2mE)^2}\sin^4\frac{\vartheta}{2}}$$

$$= \frac{(Ze^2)^2}{16E^2\sin^4\frac{\vartheta}{2}} \qquad \text{(II 9)}$$

→ das gleiche Ergebnis wie klassisch

→ ist sogar exaktes, quantenmech. Resultat

→ totaler Wirkungsquerschnitt

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}\, d\Omega \quad \text{divergiert}$$

wegen Langreichweitigkeit

→ Achtung: unser Formalismus eigentlich nicht anwendbar, da für

$$\psi \xrightarrow[r\to\infty]{} e^{ikz} + f_k(\vartheta,\varphi)\frac{e^{ikr}}{r}$$

angenommen wurde, daß $V(r)\,r \to 0$ für $r \to \infty$.

- Berücksichtigt man die Langreichweitigkeit des Coulomb-Potentials, so findet man

$$f_{C\vec{k}}(\vartheta) = -\frac{\gamma}{2k\sin^2\vartheta/2}\, e^{-i\gamma\ln\sin^2\vartheta/2}\, e^{2i\sigma_0}, \qquad (\text{II}10)$$

wobei

$$\gamma = \frac{Ze^2 m}{\hbar^2 k}$$

der sog. Sommerfeld-Parameter ist und

$$e^{2i\sigma_0} = \frac{\Gamma(1+i\gamma)}{\Gamma(1-i\gamma)}.$$

- Einige Eigenschaften kann man direkt an (II8), $(V(\vec{r}) = V(r))$

$$f_{\vec{k}}(\vartheta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}\,'}\, V(r')\, d^3r'$$

ablesen:

- bei niedrigen Energien $(k \to 0)$ gilt $q = 2k\sin\frac{\vartheta}{2} \to 0$, so daß

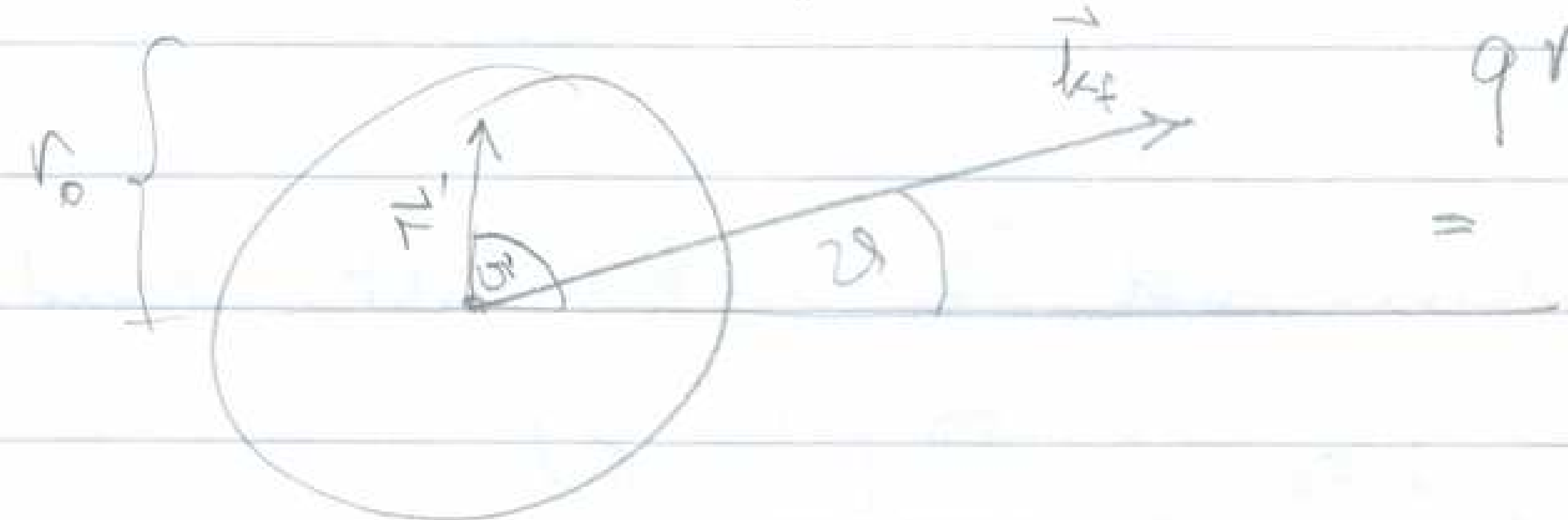
$$f_{\vec{k}}(\vartheta) \simeq -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int V(\vec{r}\,')\, d^3r'$$

$$\simeq -\frac{m V_0 r_0^3}{\hbar^2},$$

wobei $V_0$ eine effektive Stärke des Potentials ist und $r_0$ eine eff. Reichweite.

- bei hohen Energien oszilliert der Exponent in $e^{-iqr'\cos\vartheta'}$ sehr schnell, sodaß nur Streuwellen beitragen, bei denen die Phase stationär wird.

$$\Rightarrow \quad q r' \cos\vartheta' \lesssim \pi$$



$$q r_0 \lesssim \pi$$

$$= 2k \underbrace{\sin \vartheta/2}_{\approx \vartheta/2} \cdot r_0 \lesssim \pi$$

d.h. wir erwarten hauptsächlich Streuung in Vorwärtsrichtung

$$\vartheta \lesssim \frac{1}{k r_0} ,$$

vorausgesetzt, kleine $r'$ tragen (wegen Singularitäten) nicht überproportional bei, da sonst die obige Abschätzung nicht funktioniert.

- Konkrete Beispiele werden in den Übungen behandelt.

## II.2 Greens – Funktionsmethode

– Anstatt zeitabh. Störungstheorie zu verwenden, können wir auch direkt versuchen, Lösungen der Form

$$\psi_{\vec{k}} = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \psi_s$$

mit

$$\psi_s \xrightarrow[r\to\infty]{} f_k(\vartheta,\varphi)\,\frac{e^{ikr}}{r}$$

der zeitunabh. Schrödinger-Gl.

$$(\nabla^2 + k^2)\psi_{\vec{k}} = \frac{2m}{\hbar^2} V \psi_{\vec{k}} \qquad (\text{II}\,11)$$

zu finden. Wir wählen

$$\vec{k} \parallel \vec{e}_z$$

– Nehmen wir an, wir hätten die Greens-Funktion $G^0(\vec{r},\vec{r}\,')$ gefunden, die

$$(\nabla^2 + k^2) G^0(\vec{r},\vec{r}\,') = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

erfüllt. Dann ist eine formale Lösung von (II 11)

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \psi^0(\vec{r}) + \frac{2m}{\hbar^2}\int G^0(\vec{r},\vec{r}\,')\,V(\vec{r}\,')\,\psi_{\vec{k}}(\vec{r}\,')\,d^3r' \qquad (\text{II}\,12)$$

wobei $\psi^0(\vec{r})$ eine Lösung der Gleichung für das freie Teilchen ist:

$$(\nabla^2 + k^2)\psi^0 = 0.$$

- Wendet man $\nabla^2 + k^2$ auf (II 12) an, so überprüft man leicht, daß in der Tat (II 11) erfüllt ist.

- $\psi_0$ dient dazu, die Randbed. zu erfüllen.

- (II 12) ist noch nicht die Lösung, denn $\psi_{\vec{k}}$ erscheint unter dem Integral auf der rechten Seite
(anders als bei Poisson-Gl. $\nabla^2 \phi = -4\pi\rho$, wo der Quellterm unabh. ist vom gesuchten Potential $\phi$)

- Näherungen in $V$:

  - Nullte Näherung (Integral von erster Ordnung in $V$)
$$\psi_{\vec{k}} = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \psi^0,$$
also
$$\psi^0 = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}.$$

  - Erste Näherung
$$\psi_{\vec{k}} = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2}\int G^0(\vec{r},\vec{r}\,')\,V(\vec{r}\,')\,\overset{\psi^0}{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}\,'}}\,d^3r'}_{\text{symbolisch}}$$
$$\frac{2m}{\hbar^2}\,G^0 V \psi^0$$

  - Zweite Näherung
$$\psi_{\vec{k}} = \psi^0 + \frac{2m}{\hbar^2}\,G^0 V \psi^0 + \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^2 G^0 V G^0 V \psi^0$$

- Wir bestimmen nun $G^0(\vec{r},\vec{r}\,')$.

- Da $(\nabla^2+k^2)$ und $\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$ translations-invariant sind, existieren auch transl.-invariante Lösungen,

$$G^0(\vec{r},\vec{r}\,') = G^0(\vec{r}-\vec{r}\,').$$

Es genügt also, $(\nabla^2+k^2)G^0(\vec{r}) = \delta(\vec{r})$ zu betrachten.

- Da wir Sternwellen suchen, fordern wir außerdem

$$G^0(\vec{r}) = G^0(r) = \frac{u(r)}{r}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d^2u}{dr^2} + k^2 u\right) = 0$$

mit Lösungen $u(r) = A e^{ikr} + B e^{-ikr}$.

- Da wir nur an auslaufenden Wellen interessiert sind ist

$$B = 0,$$

also $$G^0(r) = \frac{A e^{ikr}}{r}$$

- Für $r \to 0$ finden wir ($\to$ Üb.aufg.)

$$(\nabla^2+k^2)G^0(r) \xrightarrow[r\to 0]{} -4\pi A\,\delta(\vec{r}),$$

also $A = -\frac{1}{4\pi}$

sodaß $$G^0(r) = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r}$$

und somit

$$G^0(\vec r, \vec r\,') = G^0(\vec r - \vec r\,') = -\frac{e^{ik|\vec r - \vec r\,'|}}{4\pi|\vec r - \vec r\,'|} \qquad (\text{II}\,13)$$

also

$$\psi_{\vec k} = e^{i\vec k\cdot\vec r} - \frac{2m}{4\pi\hbar^2}\int \frac{e^{ik|\vec r - \vec r\,'|}}{|\vec r - \vec r\,'|}\, V(\vec r\,')\,\psi_{\vec k}(\vec r\,')\, d^3r' \qquad (\text{II}\,14)$$

$$= e^{i\vec k\cdot\vec r} + \psi_s\,.$$

- Uns interessiert $\psi_{\vec k}$ für $r \to \infty$. Man beachte

$$|\vec r - \vec r\,'| = \left(r^2 + r'^2 - 2\vec r\cdot\vec r\,'\right)^{1/2}$$
$$= r\left(1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\,\frac{\vec r\cdot\vec r\,'}{r^2}\right)^{1/2}$$
$$\simeq r\left(1 - 2\,\frac{\vec r\cdot\vec r\,'}{r^2}\right)^{1/2}$$
$$\simeq r\left(1 - \frac{\vec r\cdot\vec r\,'}{r^2}\right)$$

$(1+x)^n \simeq 1 + nx$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{|\vec r - \vec r\,'|} \simeq \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\vec r\cdot\vec r\,'}{r^2}\right)$$

$$k|\vec r - \vec r\,'| = kr\left(1 - \frac{\vec r\cdot\vec r\,'}{r^2}\right)$$
$$= kr - \frac{k\vec r\cdot\vec r\,'}{r}$$
$$= kr - k\vec e_r\cdot\vec r\,'$$
$$= kr - \vec k_f\cdot\vec r\,'$$