d.h. die Spinprojektion auf die Bewegungsrichtung eines Elektrons bzw. eines Positrons ist Erhaltungsgröße und halbzahlig.

$\Rightarrow$ Dirac-Gl. beschreibt Teilchen mit halbzahligem Spin

- Was passiert, wenn man die KG-Gl. mit Anti-Kommutatoren quantisiert?

Mikrokausalität:

$$[A(x), B(y)] = 0 \quad \text{für } (x-y)^2 < 0 \qquad (**)$$

$\forall$ Observablen A, B

Observable sind Bilinearformen der Felder. Damit $(**)$ gilt muß entweder

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0 \quad \text{für } (x-y)^2 < 0 \qquad (\mathrm{I})$$

gelten oder

$$[\phi(x), \phi(y)]_+ = 0 \quad \text{für } (x-y)^2 < 0. \qquad (\mathrm{II})$$

(I) ist erfüllt, wenn KG-Gl. mit Vertauschungsrelationen quantisiert wird (Bose-Einstein-Statistik).

Weder (I) noch (II) ist erfüllt, wenn man die KG-Gl. mit Anti-Vert.rel. quantisiert $\Rightarrow$ KG-Gl. beschreibt Bosonen, denn für die Projektion des Spins auf die Bewegungsrichtung findet man 0.

→ Verknüpfung von Statistik ($n = 0,1$ oder $n = 0,1,2,3,\ldots$) mit Spin durch Forderung nach Mikrokausalität und Existenz eines Grundzustands.

- Gilt auch für wechselwirkende Teilchen und andere Spinwerte als 0 und $\frac{1}{2}$

ganzzahliger Spin → Vert. rel. → Bose-Einst.
halbzahliger Spin → Anti-Vert. → Fermi-Dirac

(Spin-Statistik-Theorem)

- Noch kein Gegenbeispiel in der Natur beobachtet

<u>Fermionen-Propagator</u>

- In Analogie zum KG-Feld definieren wir den Fermionen-Propagator als (Indizes r, s unterdrückt)

$$\langle 0 | T\{\Psi(x)\bar{\Psi}(x')\} | 0 \rangle,$$

aber jetzt (vgl. Normalprodukt) Vorzeichenwechsel beim Umordnen:

$$T\{\Psi(x)\bar{\Psi}(x')\} = \begin{cases} \Psi(x)\bar{\Psi}(x') & \text{für } t > t' \\ -\bar{\Psi}(x')\Psi(x) & \text{für } t' > t \end{cases} \qquad \text{(VII71)}$$

– Da $\langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(x')|0\rangle = \langle 0|\psi_+(x)\bar{\psi}_-(x')|0\rangle$

$$= \langle 0|[\psi_+(x), \bar{\psi}_-(x')]_+|0\rangle$$

$$= iS_+(x-x') \qquad \text{trägt bei für } t>t'$$

– Außerdem $\langle 0|\bar{\psi}(x')\psi(x)|0\rangle$

$$= \langle 0|\bar{\psi}_+(x')\psi_-(x)|0\rangle$$

$$= \langle 0|[\psi_-(x), \bar{\psi}_+(x')]_+|0\rangle$$

$$= iS_-(x-x') \qquad \text{trägt bei für } t'>t$$

$$\Rightarrow \quad \langle 0|T\{\psi(x)\bar{\psi}(x')\}|0\rangle = iS_F(x-x') \qquad (\text{VII }72)$$

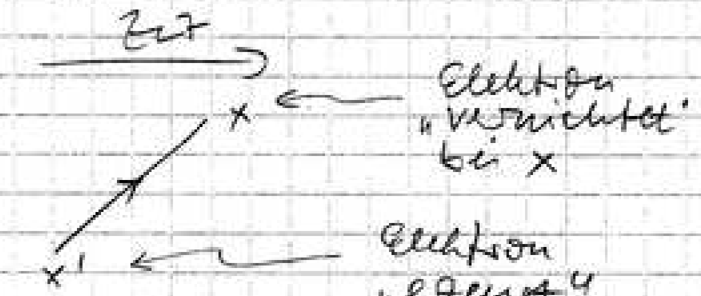
$$S_F(x) = \Theta(t)S_+(x) - \Theta(-t)S_-(x)$$

$$= \left(i\gamma^\mu\partial_\mu + \frac{mc}{\hbar}\right)\Delta_F(x) \qquad (\text{VII }73)$$

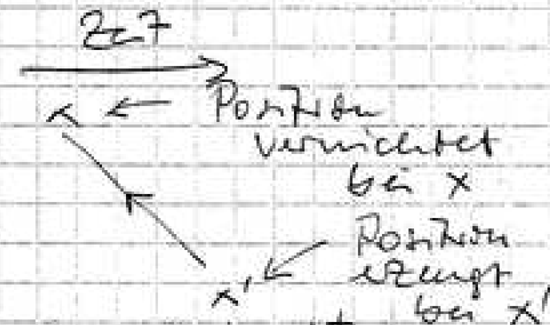
– Mit der obigen Integraldarstellung von Δ_F kann man schreiben

$$S_F(x) = \frac{\hbar}{(2\pi\hbar)^4}\int d^4p\, e^{-ipx/\hbar}\,\frac{\not{p}+mc}{p^2-m^2c^2+i\varepsilon}. \qquad (\text{VII }74)$$

– Graphische Veranschaulichung:



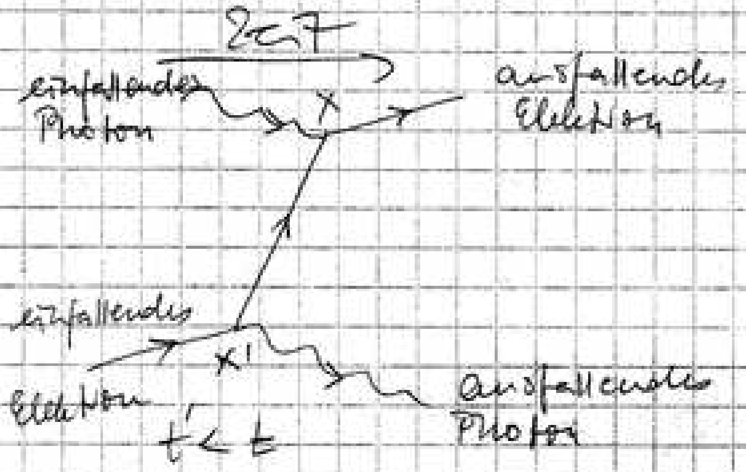
S_+, $\bar{\psi} \sim c^+$, $\psi \sim c$

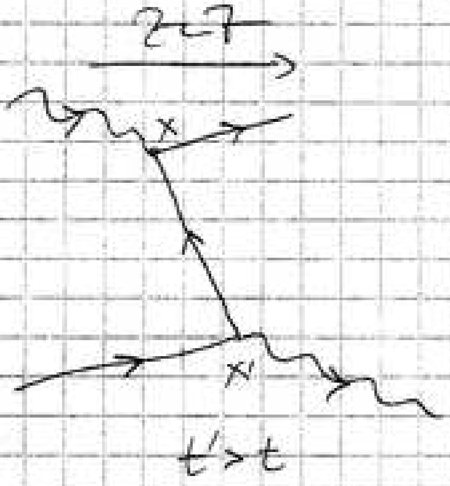


S_-, $\psi \sim d^+$, $\bar{\psi} \sim d$

– Pfeil zeigt vom Vertex von $\bar{\Psi}$ nach Vertex von Ψ $\Rightarrow$ Pfeil zeigt in Zeitrichtung für Elektronen und entgegen Zeitrichtung für Positronen.

– Beispiel: Compton-Streuung mit Elektronen

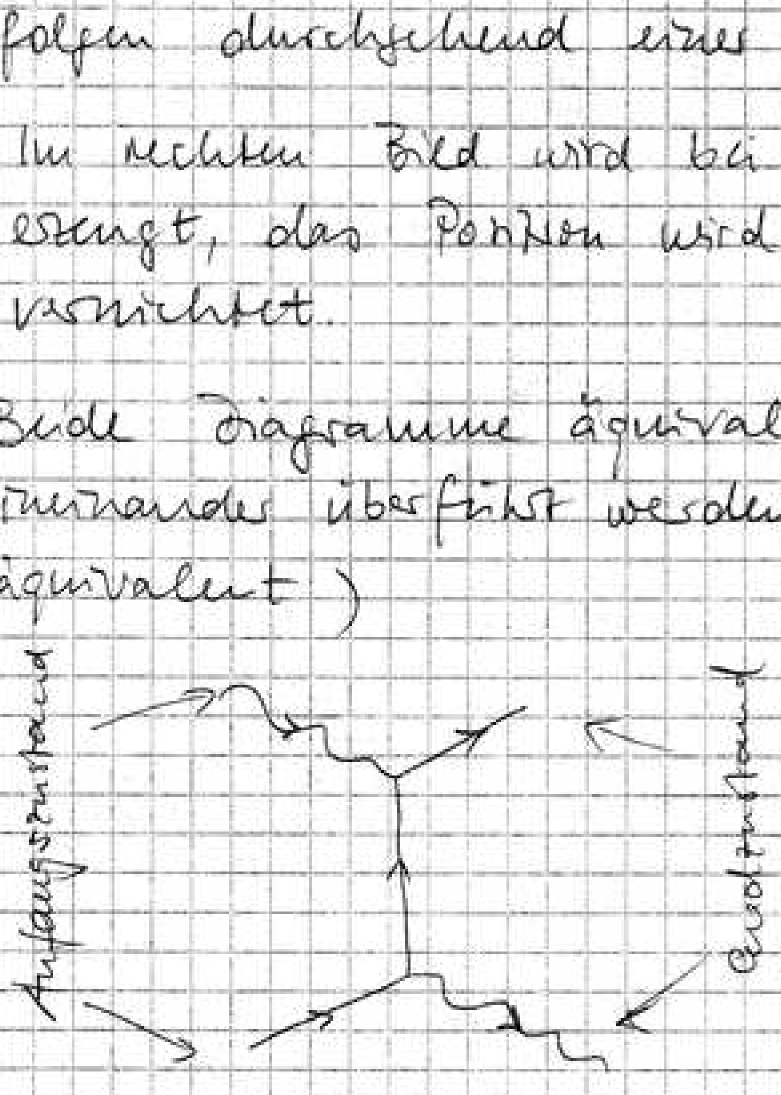




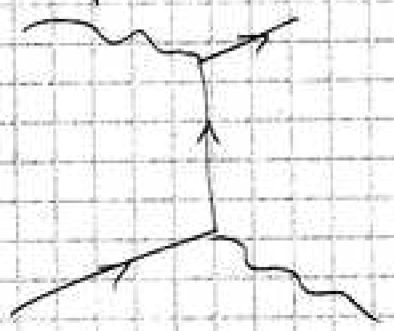
• In beiden Fällen: Pfeile an Elektronenlinien folgen durchgehend einer Richtung

• Im rechten Bild wird bei x ein El.-Pos.-Paar erzeugt, das Positron wird bei x' wieder vernichtet.

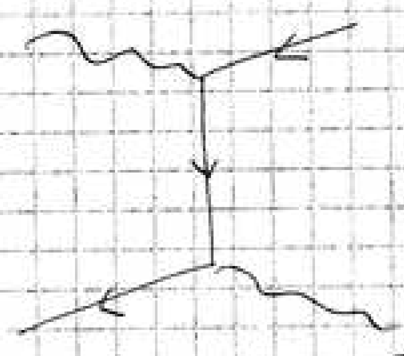
– Beide Diagramme äquivalent (können ineinander überführt werden, topologisch äquivalent)



- Die Pfeile an den Photonenlinien sind überflüssig, da es keine Antiphotonen gibt. Allerdings gibt es auch einen Comptoneffekt an Positronen:



Compton-Effekt mit Elektronen



... mit Positronen

Elektromagnetische Wechselwirkung

- In der nicht-rel. QM erfolgt die Ankopplung an das elektromagnetische Feld durch die sog. „minimale Kopplung“

$$i\hbar\partial_t \to i\hbar\partial_t - q\Phi(x), \quad -i\hbar\vec{\nabla} \to -i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}(x)$$

Mit Vier-Vektor des Vektorpotentials

$$A^\mu = (\Phi, \vec{A})$$

lautet diese Ersetzung

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + \frac{iq}{\hbar c}A_\mu(x) \qquad (\text{VII } 75)$$

- Mit $q=-e$ wird die Dirac-Gl. zu

$$(i\hbar\gamma^\mu D_\mu - mc)\Psi = 0$$

$$\left(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc\right)\psi = -i\hbar\gamma^\mu\frac{iq}{\hbar c}A_\mu\psi$$

$$= -\frac{e}{c}\underbrace{\gamma^\mu A_\mu}_{\not{A}}\psi \qquad (\mathrm{VII}\,76)$$

- Die Lagrange-Dichte wird zu

$$\mathcal{L} = c\bar{\psi}(x)\left(i\hbar\gamma^\mu D_\mu - mc\right)\psi(x)$$

$$= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{WW} \qquad (\mathrm{VII}\,77)$$

$\mathcal{L}_0 = c\bar{\psi}\left(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc\right)\psi$

$\mathcal{L}$ vom freien Dirac-Feld

$\mathcal{L}_{WW} = \underbrace{e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi}A_\mu$

hier wird der erhaltene Strom $s^\mu = c(-e)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ an das el. magn. Feld A_μ gekoppelt

- Es fehlt noch die Lagrange-Dichte des freien Feldes A_μ (kommt später)

- Eichtransformation: Wir wissen, daß unter der Trafo

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu f(x) \qquad (\mathrm{VII}\,78)$$

die el. magn. Felder $\vec{E}, \vec{B}$ invariant bleiben.

Damit auch $\mathcal{L}$ invariant bleibt muß man die Felder wiefolgt transformieren:

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \psi(x)\, e^{ief(x)/\hbar c}$$
$$\bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)\, e^{-ief(x)/\hbar c} \qquad (\text{VII } 79)$$

- Im Unterschied zu den in Zusammenhang mit der Ladungserhaltung betrachteten globalen Phasentrafo ist (VII 79) eine <u>lokale</u> Phasentrafo, da sie von x abhängt.

- (VII 78) und (VII 79) zusammen nennt man Eichtransformation

- Das Noether-Theorem liefert für die Invarianz von $\mathcal{L}$ unter (VII 78, 79) wiederum die Ladungserhaltung.

<u>Kovariante Theorie der Photonen</u>

- Zerlegung in transversales und longitudinales Feld abh. vom Bezugssystem → kovariante Formulierung wünschenswert

- Wir schreiben zunächst die Maxwell-Gl. in kovarianter Form.

- Def.: Feldtensor

$$F^{\mu\nu}(x) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \nu = 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \mu = \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \qquad (\text{VII } 80)$$

(antisymmetrisch) $\quad F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$

Mit der Stromdichte

$$s^\mu(x) = (c\rho(x), \vec{j}(x)) \qquad (\underline{VII}\,81)$$

kann man die Maxwell-Gl. schreiben als

$$\partial_\nu F^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{c} s^\mu(x), \qquad (\underline{VII}\,82)$$

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu}(x) + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0.$$

$$(\underline{VII}\,83)$$

z.B. $\mu = 0$

$$(\underline{VII}\,82) \Rightarrow \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = \frac{1}{c} c\rho$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho \;\checkmark$$

(wobei wir hier sog. rationalisierte Gaußschen Einheiten verwenden $e \to e\sqrt{4\pi}$, $\vec{E}, \vec{B} \to \vec{E}, \vec{B}\,/\sqrt{4\pi}$)

z.B. $\nu = 2, \mu = 1, \lambda = 3$

$$-\partial_z B_z - \partial_x B_x - \partial_y B_y = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \;\checkmark$$

- Aus $(\underline{VII}\,82)$ und der Antisymmetrie von $F^{\mu\nu}$

$$\Rightarrow \partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu}(x) = 0 = \frac{1}{c}\partial_\mu s^\mu(x)$$

$$\Rightarrow \partial_\mu s^\mu(x) = 0. \qquad (\underline{VII}\,84)$$

→ der Strom, an den ein Feld koppelt ist erhalten

– Zusammenhang mit Vektorpotential

$$A^\mu = (\phi, \vec{A})$$

lautet

$$F^{\mu\nu}(x) = \partial^\nu A^\mu(x) - \partial^\mu A^\nu(x) \qquad (\text{VII }85)$$

z.B.

$$F^{03}(x) = E_z = -\partial_x A^0 - \partial_{ct} A^3$$

$$= -\partial_x \phi - \frac{1}{c}\partial_t A_z \quad \checkmark$$

– Mit (VII 85) wird (VII 82) zu

$$\Box A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = \frac{1}{c} s^\mu \qquad (\text{VII }86)$$

– Invariant unter Eichtrafo (VII 78)

$$A^\mu(x) \to A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu f(x)$$

– Lagrange-Dichte I

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \underset{\substack{\uparrow \\ A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}}}{F_{\mu\nu}(x)} F^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{c} s_\mu(x) A^\mu(x) \qquad (\text{VII }87)$$

führt zur Feldgl (VII 86) (vier reelle A^μ unabh. betrachtet bei der Variation)

– Problem:

$$\Pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{c\,\partial A_{\mu,0}}$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\left(A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}\right)\left(A^{\mu,\nu} - A^{\nu,\mu}\right) - \frac{1}{c} s_\mu A^\mu$$

$$= -\frac{1}{4}\Big(A_{\mu,\nu} A^{\mu,\nu} - A_{\mu,\nu} A^{\nu,\mu} - A_{\nu,\mu} A^{\mu,\nu}$$

$$- A_{\nu,\mu} A^{\nu,\mu} - A_{\nu,\mu} A^{\mu,\nu} + A_{\nu,\mu} A^{\nu,\mu} \Big)$$

$$- \frac{1}{c} s_\mu A^\mu$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\eta,\nu}} = -\frac{1}{4}\Big(2A^{\mu,\nu}\delta^\eta_\mu - 2A^{\nu,\mu}\delta^\eta_\mu - 2A^{\nu,\nu}\delta^\eta_\nu$$

$$+ 2A^{\nu,\nu}\delta^\eta_\nu \Big)$$

$$= -\left(A^{\eta,\nu} - A^{\nu,\eta} \right) = -F^{\eta\nu}$$

$\Rightarrow \quad \pi^\mu = -\frac{1}{c} F^{\mu 0} \quad \Rightarrow \quad \pi^0(x) = 0$

$\Rightarrow$ kanonische Vertauschungsrelation

$$\left[A^0(\vec{r},t), \pi^0(\vec{r}\,',t) \right] = i\hbar\, \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$$

nicht erfüllbar

- Lagrange-Dichte II

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\left(\partial_\nu A_\mu\right)\left(\partial^\nu A^\mu\right) - \frac{1}{c} s_\mu A^\mu \qquad (\text{VII } 88)$$

$\rightarrow$ Feldgl. $\quad \Box A^\mu(x) = \frac{1}{c} s^\mu \qquad (\text{VII } 88.5)$

verträglich mit (VII 86) wenn

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \qquad \text{Lorentz-Bedingung} \qquad (\text{VII } 89)$$

$\rightarrow$ konjugiertes Feld $\quad \pi^\mu = -\frac{1}{c^2} \dot{A}^\mu$

nicht identisch null ✓

- Wir können also startend von (VII 88) Feldtheorie betreiben, quantisieren etc. und fordern zusätzlich noch die Lorentz-Bedingung (VII 89)

- Wir starten mit irgendwelchen Potentialen A^μ und machen dann eine Eichtrafo (VII 75), so daß die Lorentz-Bed (VII 89) erfüllt ist.

f so, daß $\partial_\mu A^\mu + \Box f = 0$

Man sieht, A^μ noch nicht eindeutig durch (VII 89) bestimmt, da es beliebig viele f mit $\Box f = 0$ gibt.

- Für $s^\mu = 0$ (freies Feld) wird (VII 88.5) zu

$$\Box A^\mu = 0$$

$\rightarrow$ KG-Feld für masselose Teilchen

- Analog zum KG-Feld

$$A^\mu(x) = A^\mu_+(x) + A^\mu_-(x) \qquad \text{(VII 90)}$$

$$A^\mu_+(x) = \sum_{r\vec{k}} \left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\vec{k}}}\right)^{1/2} \varepsilon^\mu_r(\vec{k})\, a_r(\vec{k})\, e^{-ikx}$$

$$A^\mu_-(x) = \sum_{r\vec{k}} \left(\quad\right)^{1/2} \varepsilon^\mu_r(\vec{k})\, a^\dagger_r(\vec{k})\, e^{ikx} \qquad \text{(VII 91)}$$

- Disp rel. $k^0 = k_0 = \frac{\omega_{\vec{k}}}{c} = |\vec{k}|$ (VII 92)

– Polarisationsvektoren $\varepsilon_r^\mu(\vec{k})$,
$r = 0,1,2,3$ seien reell und erfüllen die folgenden Orthonormalitäts- und Vollständigkeitsrelationen

$$\varepsilon_r(\vec{k})\,\varepsilon_s(\vec{k}) = \varepsilon_{r\mu}(\vec{k})\,\varepsilon_s^\mu(\vec{k}) = -\zeta_r\,\delta_{rs}$$

$$\zeta_0 = -1, \quad \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 1 \qquad (\text{VII } 93)$$

$$\sum_r \zeta_r\,\varepsilon_r^\mu(\vec{k})\,\varepsilon_r^\nu(\vec{k}) = -g^{\mu\nu}$$

– Offenbar zwei zusätzliche Polarisationsvektoren, die dadurch herrühren, daß wir hier das <u>gesamte</u> Feld A^μ für jedes $\vec{k}$ beschreiben → enthält auch Coulomb-WW zwischen Ladungen; außerdem (VII 89) noch nicht eingebaut!

– Eine oft gebräuchliche spezielle Wahl eines Satzes Pol. vektoren lautet

$$\varepsilon_0^\mu(\vec{k}) = n^\mu = (1,0,0,0)$$

$$\varepsilon_r^\mu(\vec{k}) = (0, \vec{\varepsilon}_r(\vec{k})) \quad r = 1,2,3 \qquad (\text{VII } 94)$$

$$\vec{k}\cdot\vec{\varepsilon}_r(\vec{k}) = 0 \quad \text{für } r = 1,2$$

$$\vec{\varepsilon}_3(\vec{k}) = \vec{k}/|\vec{k}|$$

und $\vec{\varepsilon}_r(\vec{k})\,\vec{\varepsilon}_s(\vec{k}) = \delta_{rs}$, $r,s = 1,2,3$

ε_3 läßt sich kovariant schreiben als

$$\varepsilon_3^\mu(\vec{k}) = \frac{k^\mu - (kn)n^\mu}{\sqrt{(kn)^2 - k^2}} \qquad (\text{VII } 95)$$

- Quantisierung des freien Photonenfeldes

$$[A^\mu(\vec{r},t), A^\nu(\vec{r}',t)] = [\dot{A}^\mu(\vec{r},t), \dot{A}^\nu(\vec{r}',t)] = 0$$

$$[A^\mu(\vec{r},t), \dot{A}^\nu(\vec{r}',t)] = -i\hbar c^2 g^{\mu\nu}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}') \qquad (\text{VII } 96)$$

- Bis auf Faktor $-g^{\mu\nu}$ wie bei KG

$\Rightarrow$ Ergebnisse aus der Rechnung für KG Feld übertragbar:

$$[A^\mu(x), A^\nu(x')] = i\hbar c\, D^{\mu\nu}(x-x') \qquad (\text{VII } 97)$$

$$D^{\mu\nu}(x) = \lim_{m\to 0}\left[-g^{\mu\nu}\Delta(x)\right]$$

Feynman-Propagator

$$\langle 0|\, T\{A^\mu(x)\, A^\nu(x')\}\, |0\rangle = i\hbar c\, D_F^{\mu\nu}(x-x')$$

mit $\qquad (\text{VII } 98)$

$$D_F^{\mu\nu}(x) = \lim_{m\to 0}\left[-g^{\mu\nu}\Delta_F(x)\right]$$

$$= -\frac{g^{\mu\nu}}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4k\; e^{-ikx}}{k^2+i\varepsilon} \qquad (\text{VII } 99)$$

- Entwicklungen (VII 91) einsetzen

$$[a_r(\vec{k}), a_s^+(\vec{k}')] = \zeta_r\,\delta_{rs}\,\delta_{\vec{k}\vec{k}'} \qquad (\text{VII } 100)$$

$$[a_r, a_s] = [a_s^+, a_r^+] = 0$$

- Für $r = 1,2$ (transversale Photonen) und $r = 3$ (longitudinale Photonen) das übliche

- Jedoch: für $r = 0$ (skalare Photonen) Vorzeichenwechsel!

$$\Rightarrow \langle 1_{\vec{k}r} | 1_{\vec{k}r} \rangle = \zeta_r \langle 0 | 0 \rangle = \zeta_r$$

< 0 für $r = 0$!

- Noch ist (VII 89) nicht benutzt $\Rightarrow$ unsere Feldtheorie noch allgemeiner als Maxwell.

- Da $[\partial_\mu A^\mu(x), A^\nu(x')] = i\hbar c\, \partial_\mu D^{\mu\nu}(x-x')$,

verschwindet Operator $\partial_\mu A^\mu$ nicht identisch.

- Gupta-Bleuler fordern schwächere Bedingung

$$\partial_\mu A^\mu_+ | \Psi \rangle = 0 \qquad (\text{VII } 101)$$

$$\Rightarrow \langle \Psi | \partial_\mu A^\mu_- = 0$$

$\Rightarrow$ alle Erwartungswerte

$$\langle \Psi | \partial_\mu A^\mu | \Psi \rangle = 0 \qquad (\text{VII } 102)$$

$\Rightarrow$ Lorentz-Gl. gelten im klassischen Grenzfall der Theorie

- (VII 101) wird nach Einsetzen der Entwicklungen

$$\left(a_3(\vec{k}) - a_0(\vec{k})\right)|\psi\rangle = 0 \quad \forall \vec{k} \qquad (\text{VII }103)$$

→ nur bestimmte Linearkombinationen von skalaren und longitudinalen Photonen erlaubt

→ nur transversale Photonen tragen, z.B. zum Energieerwartungswert $\langle\psi|H|\psi\rangle$ bei

- Skalare und longitudinale Photonen werden in der Tat nicht als freie Teilchen beobachtet

- (VII 103) reduziert die zwei Freiheitsgr. zu einem

- Eichtransformationsfreiheit entspricht dem verbleibenden Freiheitsgrad

- Bei Anwesenheit von Ladungen vermitteln die skalaren und longitudinalen Photonen die Coulomb-WW