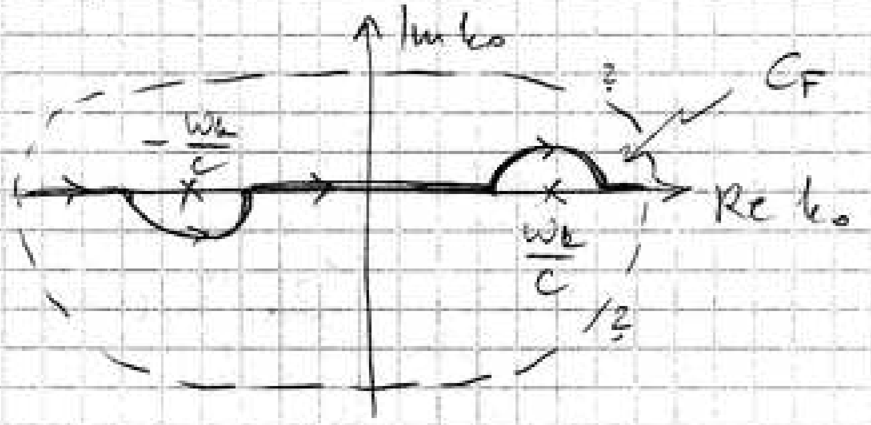
Darstellung des physikalischen Prozesse in Raum und Zeit

– Δ_F kann man schreiben als

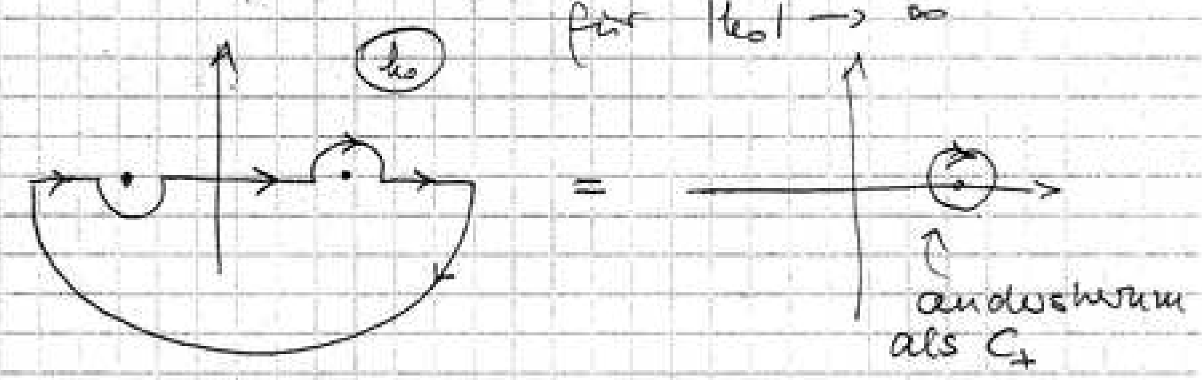
$$\Delta_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_F} \frac{d^4k\, e^{-ikx}}{k^2-\mu^2} \qquad (\text{III } 51)$$

wobei der Weg C_F wie folgt gewählt wird:



Überprüfung: für $t>0$, $x^0>0$
so daß e^{-ik_0ct} auftritt
und der Weg C_F in der unteren Halbebene zu schließen ist, damit $e^{-i(-i|k_0|)ct} \to 0$ für $|k_0| \to \infty$

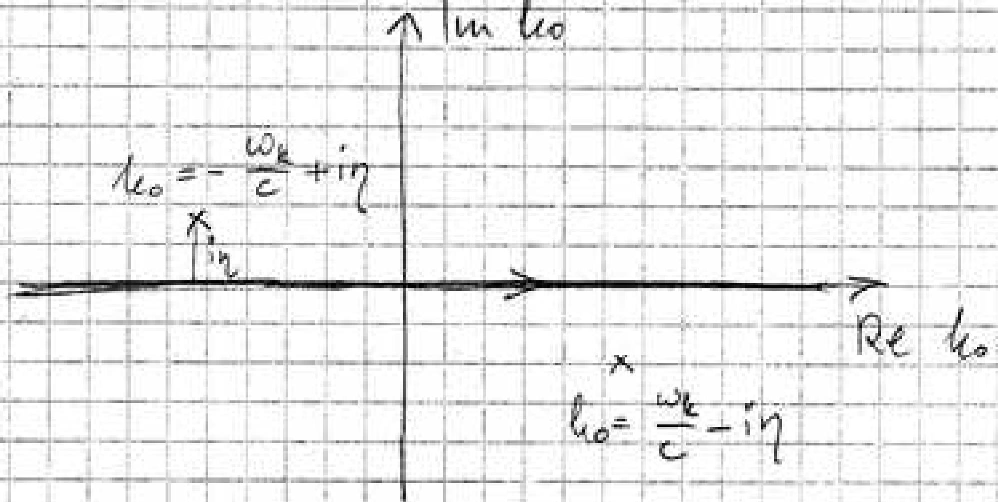
$\Rightarrow$



$\Rightarrow \Delta_F(x) = \Delta_+(x)$ für $t>0$

genauso findet man $\Delta_F(x) = -\Delta_-(x)$ für $t<0$ ✓

- Alternativ kann man auch die Pole infinitesimal verrücken und entlang der reellen k_0-Achse integrieren



$$\Delta_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k \, e^{-ikx}}{k_0^2 - \left(\frac{\omega_k}{c} - i\eta\right)^2}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k \, e^{-ikx}}{k^2 - \mu^2 + i\varepsilon}$$

$$k^2 - \mu^2 = k_0^2 - \underbrace{(\vec{k})^2 - \mu^2}_{-\left(\frac{\omega_k}{c}\right)^2}$$

mit $\varepsilon = 2 \frac{\omega_k}{c} \eta$ infinitesimal (η^2 kann vernachlässigt werden).

- Für das komplexe KG-Feld findet man anstatt (VII 48)

$$\langle 0 | T\{\Phi(x)\, \Phi^\dagger(x)\} | 0 \rangle = i\hbar c\, \Delta_F(x-x') \qquad \text{(VII 52)}$$

mit dem gleichen Δ_F wie in (VII 51).

- kanonische Quantisierung führte zu Bosonen
- Eine entsprechende Theorie für Fermionen erhält man, indem man Vertauschungs-relationen durch Anti-Vertauschungsrelationen ersetzt → Pauli-Verbot, wissen wir bereits aus Abschnitt V.

- Bosonen: $[\hat{a}_r, \hat{a}_s^+] = \delta_{rs}$

$$[\hat{a}_r, \hat{a}_s] = [\hat{a}_r^+, \hat{a}_s^+] = 0$$

$$\hat{n}_r = \hat{a}_r^+ \hat{a}_r$$

(VII 53)

- Aus $[\hat{n}_r, \hat{a}_s] = -\delta_{rs} \hat{a}_s$, $[\hat{n}_r, \hat{a}_s^+] = \delta_{rs} \hat{a}_s^+$ folgte die Interpretation von $\hat{a}, \hat{a}^+$ als Vernichter und Erzeuger

Vakuumzustand dadurch definiert, daß

$$\hat{a}_r |0\rangle = 0 \quad \forall r$$

- Führt man nun den Anti-Kommutator

$$[A, B]_+ = AB + BA \qquad \text{(VII 54)}$$

ein und

$$[\hat{a}_r, \hat{a}_s^+]_+ = \delta_{rs}, \quad [\hat{a}_r, \hat{a}_s]_+ = [\hat{a}_r^+, \hat{a}_s^+]_+ = 0, \qquad \text{(VII 55)}$$

so sind (VII 53) auch erfüllt!

⇒ Man kann wiederum $\hat{a}, \hat{a}^+$ als Vernichter und Erzeuger interpretieren, aber diesmal gilt automatisch

$$(\hat{a}_r)^2 = (\hat{a}_r^+)^2 = 0 \qquad (\text{VII}\,56)$$

→ Pauli-Verbot „eingebaut".

- Kann man auch so sehen:

$$\hat{n}_r^2 = \hat{a}_r^+ a_r \hat{a}_r^+ \hat{a} = \hat{a}_r^+ (1 - \hat{a}_r^+ \hat{a}_r) \hat{a}_r \overset{(\text{VII}56)}{=} \hat{a}_r^+ \hat{a}_r = \hat{n}_r$$

$$\Rightarrow \hat{n}_r^2 - \hat{n}_r = \hat{n}_r(\hat{n}_r - 1) = 0$$

⇒ Eigenwerte $n_r = 0, 1$. → Fermi-Dirac-Statistik

- Schreibweise

$$|1_r\rangle = \hat{a}_r^+ |0\rangle$$

$$|1_r 1_s\rangle = \hat{a}_r^+ \hat{a}_s^+ |0\rangle = -\hat{a}_s^+ \hat{a}_r^+ |0\rangle = -|1_s 1_r\rangle$$

$$|2_r\rangle = (\hat{a}_r^+)^2 |0\rangle = 0$$

- Die Dirac-Gl. haben wir bereits kennengelernt:

$$i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) - mc\,\psi(x) = 0$$

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2 g^{\mu\nu}$$

$$\gamma^{0+} = \gamma^0, \quad \gamma^{j+} = -\gamma^j, \quad j = 1, 2, 3$$

zusammengefaßt: $\gamma^{\mu+} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$

- Adjungiertes Feld

$$\bar{\psi}(x) = \psi^+(x)\gamma^0$$

- Lagrange-Dichte des Dirac-Feldes

$$\mathcal{L} = c\,\bar{\psi}(x)\left[i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc\right]\psi(x). \quad (\text{VII}\ 57)$$

ψ hat vier Komponenten, $\bar{\psi}$ ist als unabh. zu betrachten (komplexes Feld)

- In Abschnitt $\underline{\text{VI}}$ hatten wir bereits die freien Lösungen $w^r(\vec{p})$ der Dirac-Gl. betrachtet (s. (VI 61)); wir unterscheiden nun die Lösungen pos. und negativer Energie ($\varepsilon_r = +1$ für $r = 1,2$ und $\varepsilon_r = -1$ für $r = 3,4$) in $u_r(\vec{p})$ und $v_r(\vec{p})$ und lassen r nur noch über 1 und 2 laufen

vierkomponentiges Objekt (für jeden r)!

$$(\not{p} - mc)\,u_r(\vec{p}) = 0, \quad (\not{p} + mc)\,v_r(\vec{p}) = 0$$

$$r = 1,2 \quad (\text{VII}\ 58)$$

- Normierung

$$u_r^+(\vec{p})\,u_s(\vec{p}) = v_r^+(\vec{p})\,v_s(\vec{p}) = \frac{E}{mc^2}\,\delta_{rs}$$

$$E = E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4} \quad (\text{VII}\ 59)$$

- 2. Quantisierung

$$\psi(x) = \psi_+(x) + \psi_-(x)$$

$$= \sum_{r\vec{p}} \left(\frac{mc^2}{VE_{\vec{p}}}\right)^{1/2} \left[c_r(\vec{p})\,u_r(\vec{p})\,e^{-ipx/\hbar} + d_r^+(\vec{p})\,v_r(\vec{p})\,e^{ipx/\hbar}\right]$$

$$(\text{VII}\ 60)$$

$$\bar{\Psi}(x) = \bar{\Psi}_+(x) + \bar{\Psi}_-(x)$$
$$= \sum_{r\vec{p}} \left(\frac{mc^2}{VE_{\vec{p}}}\right)^{1/2} \left[d_r(\vec{p})\,\bar{v}_r(\vec{p})\,e^{-ipx/\hbar} + c_r^+(\vec{p})\,\bar{u}_r(\vec{p})\,e^{ipx/\hbar} \right]$$
(VII 61)

$c_r(\vec{p})$, $d_r(\vec{p})$ werden nun Antivertauschungsrelationen unterworfen

$$[c_r(\vec{p}), c_s^+(\vec{p}\,')]_+ = [d_r(\vec{p}), d_s^+(\vec{p}\,')]_+ = \delta_{rs}\delta_{\vec{p}\vec{p}'}$$
(VII 62)

Alle anderen Anti-Kommutatoren verschwinden:

$$[\underset{(\vec{p})}{c_r}, \underset{(\vec{p}\,')}{c_s}]_+ = [c_r^+, c_s^+]_+ = [d_r, d_s]_+ = \dots = 0.$$
(VII 63)

- c_r, c_r^+, d_r, d_r^+ Vernichter und Erzeuger,

$$n_r(\vec{p}) = c_r^+(\vec{p})\,c_r(\vec{p})$$
$$\bar{n}_r(\vec{p}) = d_r^+(\vec{p})\,d_r(\vec{p})$$

Besetzungszahlop. von zwei Sorten von Teilchen, beide Fermionen

$$c_r(\vec{p})|0\rangle = d_r(\vec{p})|0\rangle = 0 \qquad \forall \vec{p}, r$$
$$\Psi_+(x)|0\rangle = \bar{\Psi}_+(x)|0\rangle = 0 \qquad \forall x$$

- Für Bosonen hatten wir bereits das Normalprodukt eingeführt (Vernichter rechts von Erz., Komm. null setzen)

Für Fermionen werden entsprechend die Anti-Komm null gesetzt → Vorzeichenwechsel.

z.B.

Vernichter drin ... Erzeuger drin

$$:\psi_r \psi_s: = :(\psi_{r+} + \psi_{r-})(\psi_{s+} + \psi_{s-}):$$

Bi-Spinor-Index $r,s = 1,2,3,4$

$$= :\psi_{r+}\psi_{s+} + \psi_{r+}\psi_{s-} + \psi_{r-}\psi_{s+} + \psi_{r-}\psi_{s-}:$$

$$= \psi_{r+}\psi_{s+} - \psi_{s-}\psi_{r+} + \psi_{r-}\psi_{s+} + \psi_{r-}\psi_{s-}$$

- Achtung ist geboten, denn z.B.

$$:\bar\psi O \psi: = :\bar\psi_r O_{rs} \psi_s:$$

4x4-Matrix, z.B. γ^μ

$$= :(\bar\psi_{r+} + \bar\psi_{r-}) O_{rs} (\psi_{s+} + \psi_{s-}):$$

$$= \bar\psi_{r+} O_{rs} \psi_{s+} - \psi_{s-} O_{rs} \bar\psi_{r+} + \bar\psi_{r-} O_{rs} \psi_{s+} + \bar\psi_{r-} O_{rs} \psi_{s-}$$

$$= \bar\psi_+ O \psi_+ - \psi_- O^+ \bar\psi_+ + \bar\psi_- O \psi_+ + \bar\psi_- O \psi_-$$

(um Fehler zu gehen Spinorindizes besser ausschreiben)

- In die Konstanten der Bewegung, z.B.

$$H = \int d^3r :\bar\psi(x) \left[-i\hbar c \gamma^j \frac{\partial}{\partial x^j} + mc^2\right] \psi(x):$$

kann man nun die Entwicklungen (VII60), (VII61) einsetzen und die Orthog.-relation (VII59) benutzen. Man findet

$$H = \sum_{r\vec{p}} E_{\vec{p}} \left[n_r(\vec{p}) + \bar{n}_r(\vec{p}) \right]$$

$$\vec{P} = \sum_{r\vec{p}} \vec{p} \left[n_r(\vec{p}) + \bar{n}_r(\vec{p}) \right] \qquad (VII64)$$

$$Q = -e \sum_{r\vec{p}} \left[n_r(\vec{p}) - \bar{n}_r(\vec{p}) \right]$$

ähnlich wie beim komplexen KG-Feld

- $n_r(\vec{p})$: Besetzungszahlop. für Elektronen, Masse m, Ladung $-e < 0$

  $\bar{n}_r(\vec{p})$: " " Positronen, Masse m, Ladung $e > 0$

- Aus den Antivertauschungsrelationen (VII 62, 63)

=>
$$\left[\psi_r(x), \psi_s(y) \right]_+ = \left[\bar{\psi}_r(x), \bar{\psi}_s(y) \right]_+ = 0 \qquad (VII\,65)$$

- Außerdem findet man

$$\left[\psi_{r\pm}(x), \bar{\psi}_{s\mp}(y) \right]_+ = i \left(i \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{mc}{\hbar} \right)_{rs} \Delta_\pm(x-y), \qquad (VII66)$$

mit $\Delta_\pm$ aus der KG-Gl.

- Unterdrückt man die 4×4-Matrix-Indizes r, s

$$[\psi_\pm(x), \bar\psi_\mp(y)]_+ = i S_\pm(x-y)$$

mit

$$S_\pm(x) = \underbrace{\left(i\gamma^\mu \partial_\mu + \frac{mc}{\hbar}\right)}_{4\times 4\text{-Matrix}} \underbrace{\Delta_\pm(x)}_{\text{Fkt.}}$$

$$\Rightarrow \quad [\psi(x), \bar\psi(y)]_+ = i S(x-y) \qquad (\text{VII }67)$$

mit $S(x) = S_+(x) + S_-(x) = \left(i\gamma^\mu\partial_\mu + \frac{mc}{\hbar}\right)\Delta(x)$.

– Für $\Delta_\pm$ hatten wir

$$\Delta_\pm(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C_\pm} \frac{d^4k\, e^{-ikx}}{k^2-\mu^2}$$

$$= -\frac{\hbar^2}{(2\pi\hbar)^4}\int_{C_\pm} d^4p\, \frac{e^{-ipx/\hbar}}{p^2-m^2c^2}$$

so daß

$$S_\pm(x) = -\frac{\hbar}{(2\pi\hbar)^4}\left(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu + mc\right)\int_{C_\pm} d^4p\, \frac{e^{-ipx/\hbar}}{p^2-m^2c^2}$$

$$= -\frac{\hbar}{(2\pi\hbar)^4}\int_{C_\pm} d^4p\, e^{-ipx/\hbar}\, \frac{\not p + mc}{p^2-m^2c^2}$$

$$(\text{VII }68)$$

Pole: $p^2 - m^2c^2 = 0$

$$p_0^2 - (\vec p)^2 - m^2c^2 = p_0^2 - \frac{E_{\vec p}^2}{c^2} = 0$$

$$\Rightarrow \text{ Pole bei } p_0 = \pm\frac{E_{\vec p}}{c}$$

– Wegen $(\not p \pm mc)(\not p \mp mc) = p^2 - m^2c^2$

schreibt man (VII 68) auch symbolisch

$$S_{\pm}(x) = -\frac{\hbar}{(2\pi\hbar)^4} \int_{C_\pm} d^4p \, \frac{e^{-ipx/\hbar}}{\not p - mc} . \qquad \text{(VII 69)}$$

Zusammenhang zwischen Spin und Statistik

- Was passiert, wenn man Dirac-Gl. mit Vertauschungsrelationen anstatt Antivertauschungsrelationen quantisiert?

Man findet anstelle (VII 64)

$$H = \sum_{r\vec{p}} E_{\vec{p}} \left[n_r(\vec{p}) - \bar{n}_r(\vec{p}) \right] . \qquad (*)$$

Da für Bosonen n und $\bar{n}$ unbeschränkt, ist H nach unten unbeschränkt.
Gerade das wollen wir ja durch die 2. Quantisierung vermeiden
$\Rightarrow$ Dirac-Gl. muß mit Anti-Komm. quantisiert werden

Mit $\sigma_{\vec{p}} = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}$, $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$

$$\vec{\sigma} = (\sigma^{23}, \sigma^{31}, \sigma^{12}) \qquad \text{(VII 70)}$$

und $S_{\vec{p}} = \frac{\hbar}{2} \int d^3r : \psi^+(x)\, \sigma_{\vec{p}}\, \psi(x) :$

(Projektion des Spins auf Bewegungsrichtung (Helizität) ist Erhaltungsgröße)

findet man $S_{\vec{p}}\, c_r^+(\vec{p})\,|0\rangle = (-1)^{r+1} \frac{\hbar}{2}\, c_r^+(\vec{p})|0\rangle$

$r = 1,2$ $\quad S_{\vec{p}}\, d_r^+(\vec{p})\,|0\rangle = (-1)^{r+1} \frac{\hbar}{2}\, d_r^+(\vec{p})|0\rangle$