

und

249

$$\vec{P} = \sum_{\vec{k}} \hbar \vec{k} (a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) + \frac{1}{2}). \quad (\text{VII } 35)$$

- Anhand dieses Ausdrucks sieht man explizit, dass Energie und Impuls beim freien K \bar{K} -Feld erhalten sind.

- Vakuum: keine Teilchen $n(\vec{k}) |0\rangle = 0$,
also
$$a(\vec{k}) |0\rangle = 0 \quad \forall \vec{k}$$
$$\Rightarrow \phi_{\pm}^{\text{th}}(x) |0\rangle = 0 \quad \forall x$$

Normalordnung

- Vakuumenergie laut (VII 34) unendlich.

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}}$$

- Da nur Energiedifferenzen von Interesse, führt man die Normalordnung ein, z.B.

$$: a(\vec{k}_1) a(\vec{k}_2) a^\dagger(\vec{k}_3) :$$

$$= a^\dagger(\vec{k}_3) a(\vec{k}_1) a(\vec{k}_2)$$

alle Verschieber stehen rechts von allen Erzeugern; Reihenfolge der Erzeuger und Verschieber untereinander bei Bosonen egal, da sie vertauschen.

- Da in ϕ_{-} nur Erzeuger und in ϕ_{+} nur Verschieber

$$: \phi(x) \phi(y) :$$

$$= : (\phi_+(x) + \phi_-(x)) (\phi_+(y) + \phi_-(y)) :$$

$$= : \phi_+(x) \phi_+(y) : + : \phi_+(x) \phi_-(y) : + \dots$$

$$= \phi_+(x) \phi_+(y) + \phi_-(y) \phi_+(x) \\ + \phi_-(x) \phi_+(y) + \phi_-(x) \phi_-(y)$$

- \mathcal{L} und alle Observablen werden derart „neu definiert“, daß sie normalgeordnet sind. Man kann sich auch vorstellen, daß erst quantisiert wird, wenn alle Ausdrücke derart geschrieben sind, daß nach der Quantisierung Normalordnung vorliegt
- Normalgeordnete Ausdrücke für Observable haben verschwindende Vakuum Erwartungswerte, z.B.

$$\mathcal{P}^\alpha = (\mathbb{H}/c, \vec{\mathcal{P}}) = \sum_{\vec{k}} \hbar k^\alpha a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k})$$

$$\text{denn } : \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \hbar k^\alpha (a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) + a(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k})) :$$

$$= \sum_{\vec{k}} \hbar k^\alpha a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k})$$

Komplexes Klein-Gordon-Feld

- Wir hatten bereits auf Seite 236 ff gesehen, dass neutrale Felder nur Teilchen ohne Ladungen beschreiben.

Die neutrale KG-Gl. beschreibt also neutrale spin-0-Bosonen (z.B. π^0 Pion).

- Wir betrachten nun das komplexe KG Feld mit der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = : \phi_{, \alpha}^{\dagger} \phi_{, \alpha} - \mu^2 \phi^{\dagger} \phi : \quad (\text{VII } 36)$$

- ϕ und ϕ^{\dagger} sind als unabh. Felder zu betrachten

- Als Feldgl. folgen aus (VII 2)

$$(\square + \mu^2) \phi(x) = 0, \quad (\square + \mu^2) \phi^{\dagger}(x) = 0$$

- Die konjugierten Felder lauten

$$\pi(x) = \frac{1}{c^2} \dot{\phi}^{\dagger}(x), \quad \pi^{\dagger}(x) = \frac{1}{c^2} \dot{\phi}(x)$$

- Vertauschungsrelationen

$$[\phi(\vec{r}, t), \dot{\phi}^{\dagger}(\vec{r}', t)] = i \hbar c^2 \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

(alle anderen, ϕ mit ϕ , ϕ mit ϕ^{\dagger} , $\dot{\phi}$ mit ϕ , ϕ mit $\dot{\phi}^{\dagger}$, ϕ mit $\dot{\phi}$ null)

- Die Fourier-Entwicklung des Feldes lautet nun

$$\phi(x) = \phi_+(x) + \phi_-(x) = \sum_{\vec{k}} \xi_{\vec{k}} \left(a(\vec{k}) e^{-ikx} + b^\dagger(\vec{k}) e^{ikx} \right) \quad 252$$

$$\phi^\dagger(x) = \phi_+^\dagger(x) + \phi_-^\dagger(x) = \sum_{\vec{k}} \xi_{\vec{k}} \left(b(\vec{k}) e^{-ikx} + a^\dagger(\vec{k}) e^{ikx} \right)$$

und für die Vertauschungsrelationen der Entwicklungskoeff. findet man

$$[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = [b(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}')] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}$$

und alle anderen Kombinationen null.

- Interpretation: $a, a^\dagger, b, b^\dagger$ sind Vernichter und Erzeuger von a - und b -Teilchen,

$$n_a(\vec{k}) = a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}), \quad n_b(\vec{k}) = b^\dagger(\vec{k}) b(\vec{k})$$

sind die entsprechenden Besetzungszahloperatoren

- Für den Ladungsoperator (VII.14) finden wir nun

$$\begin{aligned} Q &= -\frac{i\eta}{\hbar c^2} \int d^3r : \dot{\phi}^\dagger(x) \phi(x) - \dot{\phi}(x) \phi^\dagger(x) : \\ &= q \sum_{\vec{k}} (n_a(\vec{k}) - n_b(\vec{k})) \end{aligned}$$

\Rightarrow a -Teilchen haben Ladung $+q$
 b -Teilchen " " " $-q$

- Lagrange-Dichte \mathcal{L} symmetrisch
in ϕ und ϕ^* in dem Sinne, daß
unter Phasentransf. $\phi' = e^{i\varepsilon} \phi$
invariant

\Rightarrow zwei Teilchensorten mit entgegengesetzter Ladung!

\Rightarrow Gesamtladung erhalten!

- a- und b-Teilchen werden Teilchen und Antiteilchen genannt

\rightarrow komplexes KG-Feld \rightarrow z.B.

π^+ , π^- -Mesonen

\rightarrow reelles KG-Feld \rightarrow z.B. π^0 -Meson

- Wir haben uns in unseren Beispielen auf el. Ladung beschränkt; allgemein bedeutet Invarianz unter Phasentransf. nur die Erhaltung einer additiven Größe

- Beispiel: K^0 - und \bar{K}^0 -Mesonen sind el. neutral, unterscheiden sich aber in der Hyperladung \rightarrow auch el. neutrale Teilchen können Antiteilchen haben.

Kovariante Vertauschungsrelationen 254

- Da wir die Vertauschungsrelationen zu einem festen Zeitpunkt gewählt haben, ist die Kovarianz nicht offensichtlich

- Betrachte für nulls KG-Feld $[\phi(x), \phi(y)]$ an beliebigen Raumpunkten x, y (beide Vektorraum).

$$[\phi(x), \phi(y)] = [\phi_+(x), \phi_-(y)] + [\phi_-(x), \phi_+(y)]$$

denn ϕ_+ enthält nur Vorräger, ϕ_- nur Erzeuger

- Mit den Entwicklungen (VI 29)

$$[\phi_+(x), \phi_-(y)] = \frac{\hbar c^2}{2V} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \frac{1}{(\omega_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}'})^{1/2}} \overbrace{[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] }^{\delta_{\vec{k}\vec{k}'}} e^{-i\vec{k}x + i\vec{k}'y}$$

$$= \frac{\hbar c^2}{2V} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\omega_{\vec{k}}} e^{-i\vec{k}(x-y)} \quad \text{da } k_0 = \frac{\omega_{\vec{k}}}{c} = k_0'$$

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \rightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \quad \frac{\hbar c^2}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\omega_{\vec{k}}} e^{-i\vec{k}(x-y)}$$

- Def. $\Delta_+(x) = \frac{-ic}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\omega_{\vec{k}}} e^{-i\vec{k}x}$ (VI 37)

$$k_0 = \frac{\omega_{\vec{k}}}{c}$$

so days also

255

$$[\phi_+(x), \phi_-(y)] = i\hbar c \Delta_+(x-y) \quad (\text{VII } 38)$$

- Analog definieren wir eine Funktion $\Delta_-(x)$
so days

$$\begin{aligned} [\phi_-(x), \phi_+(y)] &= i\hbar c \Delta_-(x-y) \quad (\text{VII } 39) \\ &= -i\hbar c \Delta_+(y-x) \end{aligned}$$

- Damit folgt

$$[\phi(x), \phi(y)] = i\hbar c \Delta(x-y) \quad (\text{VII } 40)$$

mit

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= \Delta_+(x) + \Delta_-(x) \\ &= -\frac{c}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\omega_k} \underbrace{(ie^{-ikx} - ie^{+ikx})}_{2 \sin kx} \\ &= -\frac{c}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\omega_k} \sin kx \quad (\text{VII } 41) \end{aligned}$$

- Man kann zeigen, daß Δ_+ , Δ_- und Δ
eine KG-Gl. erfüllen

$$(\square_x + \mu^2) \Delta(x-y) = 0. \quad (\text{VII } 42)$$

- Um die Kovarianz zu sehen, schreiben
wir (VII 41) um:

$$\Delta(x) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4k \delta(k^2 - \mu^2) \epsilon(k_0) e^{-ikx} \quad (\text{VII } 43)$$

$$d^4 k = d k_0 d^3 k$$

und über k_0 von $-\infty$ bis $+\infty$ integriert wird

$$\varepsilon(k_0) = \frac{k_0}{|k_0|} = \begin{cases} +1 & \text{für } k_0 > 0 \\ -1 & \text{für } k_0 < 0 \end{cases}$$

- Da/s (VII 43) gleich (VII 41) ist sieht man anhand

$$\delta(k^2 - \mu^2) = \delta(k_0^2 - (\vec{k})^2 - \mu^2)$$

$$\text{wegen } k^\mu k_\mu = \frac{\omega_k^2}{c^2} - (\vec{k})^2 = \mu^2$$

$$\Rightarrow -(\vec{k})^2 - \mu^2 = -\frac{\omega_k^2}{c^2}$$

$$= \delta\left(k_0^2 - \frac{\omega_k^2}{c^2}\right) = \sum_{k_{0i}} \delta(k_0 - k_{0i}) \frac{1}{|g'(k_{0i})|}$$

Nullstellen

$$= \frac{1}{2k_0} \Big|_{k_0 = \frac{\omega_k}{c}} \left(\delta\left(k_0 + \frac{\omega_k}{c}\right) + \delta\left(k_0 - \frac{\omega_k}{c}\right) \right)$$

$$\frac{c}{2\omega_k}$$

Wenn man das in (VII 43) einsetzt, folgt (VII 41). $\varepsilon(k_0)$ sorgt für die richtigen Vorzeichen.

- Die Invarianz von (VII 43) ist offensichtlich, da jeder Faktor unter eigentlichen Lorentz-Transformationen invariant ist.

- $\Sigma(k_0)$ ist invariant, da eigentliche Lorentz-Transf. Vergangenheit und Zukunft nicht vertauschen

- Für feste Zeiten $t = t'$ laut (VII 6) gelten

$$[\phi(\vec{r}_1, t), \phi(\vec{r}'_1, t)] = 0$$

andererseits

$$[\phi(\vec{r}_1, t), \phi(\vec{r}'_1, t)] = i\hbar c \Delta(\vec{r} - \vec{r}', 0)$$

\uparrow
 $t - t' = 0$

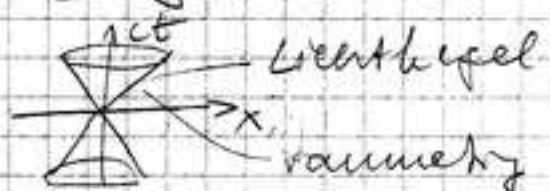
In der Tat gilt mit (VA 41)

$$\begin{aligned} \Delta(\vec{r} - \vec{r}', 0) &= -\frac{e}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\omega_k} \sin(0 - \vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')) \\ &= \frac{c}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\omega_k} \sin \vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') \\ &= \frac{c}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 \frac{1}{\omega_k} \int_{-1}^1 du \sin k |(\vec{r} - \vec{r}')| u \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Man beachte: Zu gleichen Zeiten ist

$$(x-y)_\mu (x-y)^\mu = -(\vec{x} - \vec{y})^2 < 0$$

raumartiger Abstand



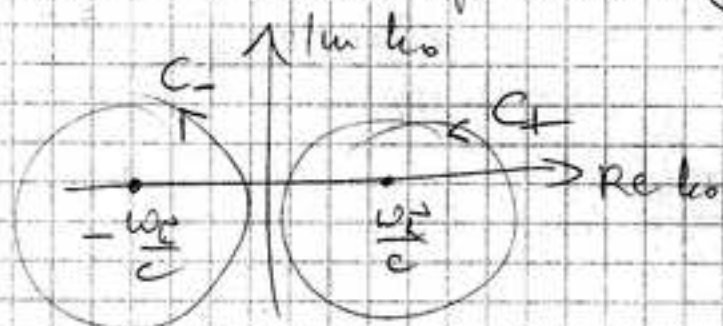
⇒ Messungen des Feldes an räumlich getrennten Punkten dürfen nicht voneinander abhängen, sei der Abstand noch so klein (Mikrokausalität).

– muß auch so sein wenn Feld selbst keine Observable (sm.).

– Man kann $\Delta_{\pm}(x)$ auch als Linienintegral in der komplexen k_0 -Ebene auffassen:

$$\Delta_{\pm}(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_{\pm}} \frac{d^4 k e^{-ikx}}{k^2 - \mu^2}$$

mit den Integrationswegen



$$x = (x^0, \vec{r})$$

$$\Delta_{\pm}(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_{\pm}} \frac{dk_0 d^3 k e^{-ik_0 x^0} e^{i\vec{k}\vec{r}}}{k_0^2 - (\vec{k})^2 - \mu^2} \quad (\text{VII } 44)$$

Betrachte $\int_{C_{\pm}} \frac{dk_0 e^{-ik_0 x^0}}{k_0^2 - \frac{\omega_k^2}{c^2}} = \int_{C_{\pm}} \frac{dk_0 e^{-ik_0 x^0}}{k_0 \underbrace{\left(k_0 + \frac{\omega_k}{c}\right)}_{\text{gehört zu } C_-} \underbrace{\left(k_0 - \frac{\omega_k}{c}\right)}_{\text{gehört zu } C_+}}$

$$= 2\pi i \text{Res}_{\pm}$$

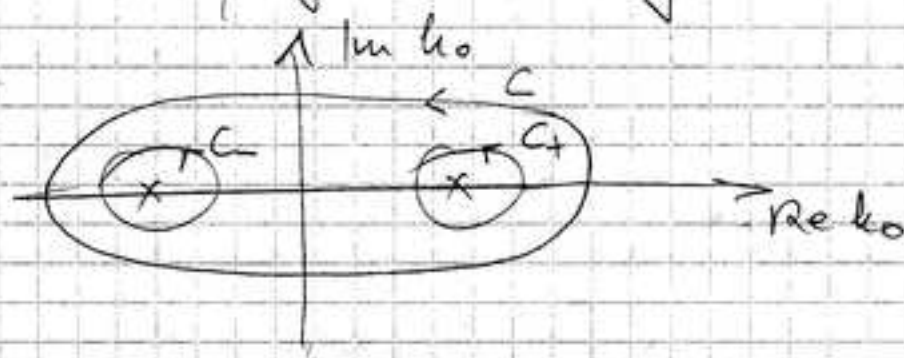
$$= \pm 2\pi i e^{\pm i \frac{\omega_k}{c} x^0} \frac{1}{2 \frac{\omega_k}{c}}$$

Damit wird (VII 44)

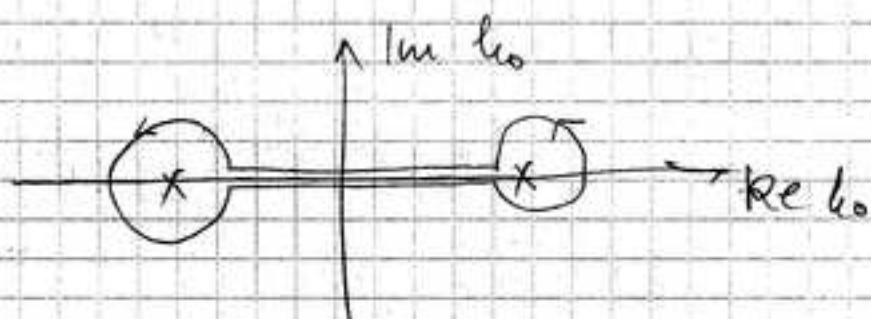
$$\Delta_{\pm}(x) = \mp \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{i c}{2} \int \frac{d^3 k}{\omega_k} e^{\mp i k x} \quad \checkmark$$

wie (VII 37)

- Man sieht nun, dass man $\Delta(x)$ erhält, wenn man den folgenden Weg C wählt:



denn dieser Weg lässt sich deformieren zu



Mesonen Propagator

- Reelles $U(1)$ -Feld

- (VII 38) $i\hbar c \Delta_{+}(x-x') = [\phi_{+}(x), \phi_{-}(x')]$

$$\langle 0 | \dots | 0 \rangle \Rightarrow$$

$$i\hbar c \Delta_{+}(x-x') = \langle 0 | [\phi_{+}(x), \phi_{-}(x')] | 0 \rangle$$

$$= \langle 0 | \phi_{+}(x) \phi_{-}(x') | 0 \rangle$$

da $\phi_{+}(x) | 0 \rangle = 0$

- Außerdem auch

$$\begin{aligned} i\hbar c \Delta_+(x-x') &= \langle 0 | \phi(x) \phi(x') | 0 \rangle \\ &= -i\hbar c \Delta_-(x'-x) \end{aligned} \quad (\text{VII 45})$$

- Def. zeitgeordnetes Produkt (T-Produkt)

$$T \{ \phi(x) \phi(x') \} = \begin{cases} \phi(x) \phi(x') & \text{für } t > t' \\ \phi(x') \phi(x) & \text{für } t' > t \end{cases} \quad (\text{VII 46})$$

Zeit „läuft“ von rechts nach links,
die Op zu früheren Zeiten kommen zuerst

- Offenbar folgt mit der Heavisidefunktion

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T \{ \phi(x) \phi(x') \} &= \Theta(t-t') \phi(x) \phi(x') \\ &\quad + \Theta(t'-t) \phi(x') \phi(x) \end{aligned} \quad (\text{VII 47})$$

- Def. Feynmansche Δ -Funktion Δ_F

$$i\hbar c \Delta_F(x-x') = \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(x') \} | 0 \rangle \quad (\text{Feynman-Propagator}) \quad (\text{VII 48})$$

- Man kann Δ_F auch schreiben als

$$\begin{aligned} i\hbar c \Delta_F(x-x') &= \langle 0 | \Theta(t-t') \phi(x) \phi(x') | 0 \rangle \\ &\quad + \langle 0 | \Theta(t'-t) \phi(x') \phi(x) | 0 \rangle \\ &\stackrel{(\text{VII 45})}{=} \Theta(t-t') i\hbar c \Delta_+(x-x') \\ &\quad + \Theta(t'-t) (-i\hbar c \Delta_-(x-x')) \end{aligned}$$

sodass mit $t - t' \rightarrow t$
 $x - x' \rightarrow x$

$\Rightarrow \Delta_F(x) = \Theta(t) \Delta_+(x) - \Theta(-t) \Delta_-(x)$ (VII 49)

$\Rightarrow \Delta_F(x) = \pm \Delta_{\pm}(x)$ für $t \gtrless 0$ (VII 50)

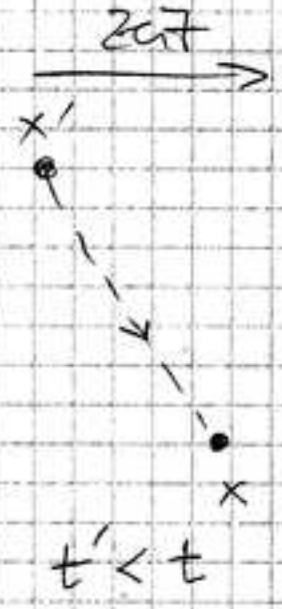
- (VII 48) kann man wie folgt veranschaulichen:

• für $t > t' \Rightarrow T \{ \phi(x) \phi(x') \} = \phi(x) \phi(x')$

und

$\langle 0 | \phi(x) \phi(x') | 0 \rangle$
 $= \langle 0 | \phi_+(x) \phi_-(x') | 0 \rangle$

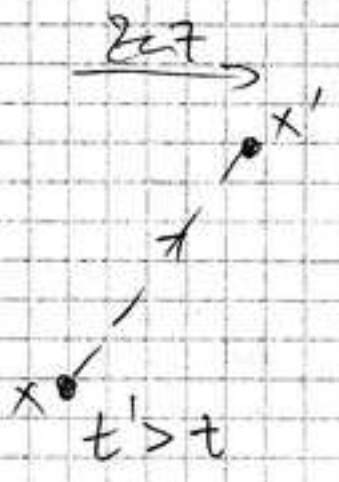
erzeugt Meson an
Raumzeitpunkt x'
vernichtet dieses Meson bei x



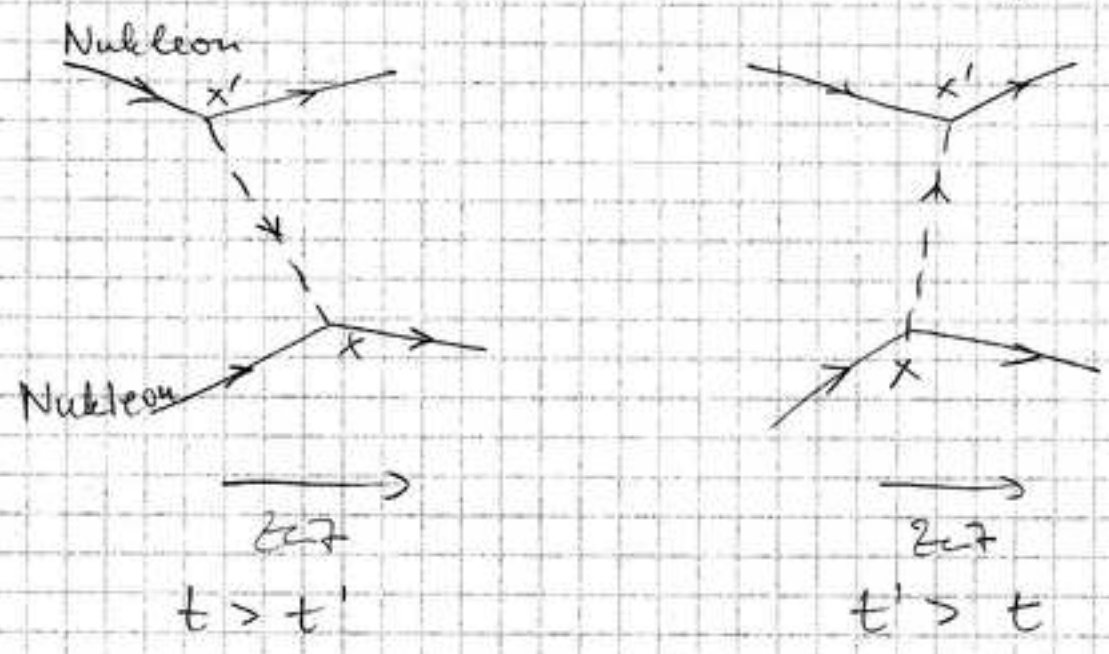
• für $t' > t \Rightarrow \phi(x') \phi(x)$

$\langle 0 | \phi_+(x') \phi_-(x) | 0 \rangle$

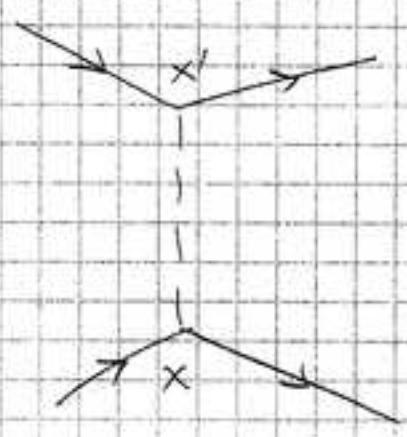
Meson wird bei x erzeugt
und bei x' vernichtet



- Mesonen treten ^{z.B.} als "Austauschteilchen" bei der WW von Nucleonen auf



In Berechnungen treten Integrationen über x und x' auf, so dass eine Zeitordnung wegfällt und es ausreicht einfach



zu zeichnen (ohne zu spezifizieren ob $t' > 0$ oder $t' < 0$, da dies bei räumlichen Abständen ohnehin beintragungssystemabhängig ist).

- Grundidee der Feynman-Graphen oder Diagramme
- Nur veranschaulichte Mathematik, keine