$$+ c\Pi_r S_{rs}^{\alpha\beta} \phi_s \Big\} \qquad (\text{VII } 29)$$

- Da T^{0i}/c die Impulsdichte darstellt, erkennen wir im ersten Klammer-Term von (VII 29) den Bahndrehimpuls.

- Der zweite Term (mit S) beschreibt den intrinsischen Drehimpuls des Feldes (Spin), dem wir schon in Zusammenhang mit den Transformationseigenschaften von Spinoren begegnet sind.

- Der Spin tritt hier auf, ohne daß wir irgendetwas quantisiert haben →
Spin ist eine Eigenschaft von Feldern und hat per se nichts mit Quantentheorie zu tun!

<u>Klein-Gordon-Feld</u>

- Zur Erinnerung: $p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$, $\quad \frac{E}{c} \leftarrow \frac{1}{c} i\hbar\partial_t, \quad \vec{p} \leftarrow -i\hbar\vec{\nabla}$

$p^\mu p_\mu = m^2c^2 \qquad p_\mu = \left(\frac{E}{c}, -\vec{p}\right)$, $\quad \frac{E}{c} \leftarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial ct}, \quad -\vec{p} \leftarrow i\hbar\vec{\nabla}$

$\Rightarrow E^2 = m^2c^4 + c^2p^2$

$$\Rightarrow \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial (ct)^2} + \hbar^2\nabla^2\right)\phi = m^2c^2\,\phi$$

$$(\Box + \mu^2)\,\phi(x) = 0 \qquad \mu = \frac{mc}{\hbar}$$

- Schwierigkeiten mit (nicht-) positiv definiter Wahrsch.dichte und negativen Energien; wird behoben durch Quantisierung

- KG-Gleichung ist Gleichung für ein einzelnes skalares Feld $\phi(x)$
→ kein intrinsischer Drehimpuls möglich, denn

$$\phi'(x') = \phi(x) + \tfrac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}\, S^{\alpha\beta}\,\phi(x)$$
$$= \underbrace{\left(1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}\, S^{\alpha\beta}\right)}_{\text{Zahl}}\phi(x)$$

(intrinsischer Drehimpuls (Spin) bedeutet, daß Komponenten $\phi_r(x)$, $r = 1, 2 \ldots$ vorliegen müssen, die bei Drehungen durch $S^{\alpha\beta}_{rs}$ miteinander gekoppelt werden)

→ KG-Gl. beschreibt Spin-0-Teilchen (π-Mesonen, K-Mesonen)

- Wir wissen bereits (s. VII 5 etc.)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\phi_{,\alpha}\,\phi_{,}{}^{\alpha} - \mu^2\phi^2\right)$$

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\phi} = \frac{1}{c^2}\dot\phi(x)$$

$$\left[\phi(\vec r, t), \dot\phi(\vec r\,', t)\right] = i\hbar c^2\,\delta(\vec r - \vec r\,')$$

sowie ϕ mit ϕ und $\dot\phi$ mit $\dot\phi$ null.

- Wir entwickeln das Feld $\phi(x)$ in einem vollständigen Satz von Lösungen der KG-Gl.

$$\phi(x) = \phi_+(x) + \phi_-(x)$$

$$\phi_+(x) = \sum_{\vec{k}} \left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\vec{k}}}\right)^{1/2} a(\vec{k})\, e^{-ikx}$$

$$\phi_-(x) = \sum_{\vec{k}} \underbrace{\left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\vec{k}}}\right)^{1/2}}_{g_{\vec{k}}} a^+(\vec{k})\, e^{ikx} \qquad (\text{VII } 29)$$

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L}(n_1, n_2, n_3), \quad n_1, n_2, n_3 = 0, \pm 1, \ldots,$$

damit periodische Randbedingungen erfüllt sind, $V = L^3$ (box-quantization)

$$kx = k^\mu x_\mu, \quad k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right)$$

- Setzt man $e^{\pm ikx}$ in die KG-Gl. ein

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \mu^2\right)e^{\pm ikx} = \left[(\pm i k^\mu)(\pm i k_\mu) + \mu^2\right] e^{\pm ikx}$$

$$= \left[-k_\mu k^\mu + \mu^2\right] e^{\pm ikx} = 0$$

$$\Rightarrow k^2 = \mu^2$$

$$k_\mu k^\mu = \frac{\omega^2}{c^2} - (\vec{k})^2 = \mu^2$$

$$\rightarrow \frac{\omega}{c} = \pm\sqrt{\mu^2 + (\vec{k})^2}$$

wir wählen das positive Vorzeichen (VII 30)

$$\frac{\omega}{c} = \frac{1}{c}\omega_{\vec{k}}$$

Dispersionsrelation (für Photonen $\omega = c|\vec{k}|$)

– Wie lauten Kommutatorrelationen für a, a^+?
– Mit den Entwicklungen (VII 29) folgt

$$\phi(x) = \sum_{\vec{k}} \xi_{\vec{k}} \left(a(\vec{k}) e^{-ikx} + a^+(\vec{k}) e^{ikx} \right)$$

$$\dot{\phi}(x) = c \frac{\partial \phi}{\partial x^0} = c \sum_{\vec{k}} \xi_{\vec{k}} \left(-ik_0 a(\vec{k}) e^{-ikx} + ik_0 a^+(\vec{k}) e^{ikx} \right)$$

$$= \sum_{\vec{k}} \xi_{\vec{k}}\, i\omega_{\vec{k}} \left(-a(\vec{k}) e^{-ikx} + a^+(\vec{k}) e^{ikx} \right)$$

$$\Rightarrow \omega_{\vec{k}'} \phi(x) = \sum_{\vec{k}} \xi_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}'} \left(a(\vec{k}) e^{-ikx} + a^+(\vec{k}) e^{ikx} \right)$$

$$i\dot{\phi}(x) = \sum_{\vec{k}} \xi_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} \left(a(\vec{k}) e^{-ikx} - a^+(\vec{k}) e^{ikx} \right)$$

Summe $$i\dot{\phi} + \omega_{\vec{k}'}\phi = \sum_{\vec{k}} \xi_{\vec{k}}\, a(\vec{k}) e^{-ikx} \left(\omega_{\vec{k}} + \omega_{\vec{k}'} \right) + \sum_{\vec{k}} \xi_{\vec{k}}\, a^+(\vec{k}) e^{ikx} \left(\omega_{\vec{k}'} - \omega_{\vec{k}} \right)$$

$$\int_V d^3r \left(i\dot{\phi} + \omega_{\vec{k}'}\phi \right) e^{ik'x} = \xi_{\vec{k}'}\, a(\vec{k}')\, 2\omega_{\vec{k}'}\, V + 0 \;(\text{da } \vec{k} = -\vec{k}', \text{ aber } \omega_{\vec{k}'} = \omega_{-\vec{k}'})$$

$$= \left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\vec{k}'}} \right)^{1/2} 2V\omega_{\vec{k}'}\, a(\vec{k}')$$

$$= \left(2V\omega_{\vec{k}'}\hbar c^2 \right)^{1/2} a(\vec{k}')$$

$\vec{k}' \to \vec{k}$ umbenennen

$$\Rightarrow a(\vec{k}) = \frac{1}{\left(2\hbar c^2 V \omega_{\vec{k}} \right)^{1/2}} \int d^3r\, e^{ikx} \left(i\dot{\phi}(x) + \omega_{\vec{k}} \phi(x) \right) \qquad \text{(VII 31)}$$

$$a^+(\vec{k}) = \underbrace{\frac{1}{(2\hbar c^2 V\omega_{\vec{k}})^{1/2}}}_{\zeta_{\vec{k}}} \int d^3r\, e^{-ikx} \left(-i\dot{\phi}(x) + \omega_{\vec{k}}\, \phi(x)\right)$$

wir betrachten hier nur das reelle KG-Feld

$$\Rightarrow [a(\vec{k}), a^+(\vec{k}')] = \zeta_{\vec{k}} \zeta_{\vec{k}'} \int d^3r \int d^3r'\, e^{ikx} e^{-ik'x'} [i\dot{\phi}(x) + \omega_{\vec{k}}\phi(x), -i\dot{\phi}(x') + \omega_{\vec{k}'}\phi(x')]$$

hierbei: $k^{(\prime)} = \left(\frac{\omega_{\vec{k}^{(\prime)}}}{c}, \vec{k}^{(\prime)}\right)$

$x^{(\prime)} = (ct, \vec{r}^{(\prime)})$ (gleiche Zeiten!)

$$= \zeta_{\vec{k}} \zeta_{\vec{k}'} \int d^3r \int d^3r'\, e^{ikx} e^{-ik'x'} \left\{ i\omega_{\vec{k}'} \underbrace{[\dot{\phi}(x), \phi(x')]}_{-i\hbar c^2 \delta(\vec{r}-\vec{r}')} - i\omega_{\vec{k}} \underbrace{[\phi(x), \dot{\phi}(x')]}_{i\hbar c^2 \delta(\vec{r}-\vec{r}')} \right\}$$

$$= \zeta_{\vec{k}} \zeta_{\vec{k}'} \underbrace{\int d^3r\, e^{ix(k-k')}}_{V\delta_{\vec{k}\vec{k}'}} \hbar c^2 (\omega_{\vec{k}'} + \omega_{\vec{k}})$$

$$= \frac{V\hbar c^2\, 2\omega_{\vec{k}}}{2\hbar c^2 V\omega_{\vec{k}}} \delta_{\vec{k}\vec{k}'} = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}$$

also
$$[a(\vec{k}), a^+(\vec{k}')] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \qquad (\text{VII } 32)$$

- Entwicklungskoeff. in den Fourier-Reihen (VII 29) erfüllen die Vertauschungsrelationen des harmonischen Oszillators.
- Wir sind mit kanonischer Quantisierung gestartet.

- Außerdem findet man

$$[a(\vec{k}), a(\vec{k}')] = [a^+(\vec{k}), a^+(\vec{k}')] = 0 \,. \qquad (\text{VII } 33)$$

- KG-Gl. beschreibt Bosonen.
- Besetzungszahlop.

$$n(\vec{k}) = a^+(\vec{k})\, a(\vec{k})$$

mit Eigenwerten $0, 1, 2, \ldots$

- $a(\vec{k}),\ a^+(\vec{k})$ Vernichtungs- u. Erzeugungsop. von Teilchen mit Impuls $\hbar\vec{k}$ und Energie $\hbar\omega_k$

- Da ja (s. VII 25)

$$\begin{aligned} H &= \int d^3r \, \{ \Pi(x)\, \dot{\phi}(x) - \mathcal{L} \} \\ &= \int d^3r \, \left\{ \frac{1}{c^2}(\dot{\phi})^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}(\dot{\phi})^2 - (\vec{\nabla}\phi)^2 - \mu^2\phi^2\right) \right\} \\ &= \int d^3r \, \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{c^2}(\dot{\phi})^2 + (\vec{\nabla}\phi)^2 + \mu^2\phi^2 \right\} \end{aligned}$$

und (VII 26)

$$P^j = \int d^3r \, \Pi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \Rightarrow \vec{P} = -\int d^3r \, \frac{1}{c^2} \dot{\phi} \vec{\nabla} \phi$$

folgt durch Einsetzen der Entwicklungen (VII 29)

$$H = \sum_{\vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}} \left(a^+(\vec{k}) a(\vec{k}) + \frac{1}{2} \right) \qquad (\text{VII } 34)$$