- Hier haben wir die Vertauschungsrelationen für die Felder zu gleichen Zeiten formuliert; später werden wir sehen, wie sie zu verschiedenen Zeiten aussehen.

- Für das Klein-Gordon-Feld finden wir

$$[\phi(\vec{r},t), \dot{\phi}(\vec{r}\,',t)] = i\hbar c^2 \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$
$$[\phi(\vec{r},t), \phi(\vec{r}\,',t)] = [\dot{\phi}(\vec{r},t), \dot{\phi}(\vec{r}\,',t)] = 0 .$$

<u>Symmetrien und Erhaltungssätze</u>

- Für einen nicht explizit zeitabh. Operator $\hat{O}$ lautet die Heisenberg'sche Bewegungsgl.

$$i\hbar \frac{d\hat{O}}{dt} = [\hat{O}, \hat{H}],$$

d.h. falls $[\hat{O},\hat{H}]=0$, ist $\hat{O}$ Konstante der Bewegung

- Transformation $\hat{U}$ (unitär)

$$|\psi\rangle \to |\psi'\rangle = \hat{U}|\psi\rangle, \quad \hat{O} \to \hat{O}' = \hat{U}\hat{O}\hat{U}^+$$

- Für kontinuierliche Trafos

$$\hat{U} = e^{i\alpha\hat{T}}, \quad \hat{T} = \hat{T}^+$$

- Infinitesimale Transformationen

$$\hat{U} \simeq 1 + i\delta\alpha\,\hat{T}$$

$$\hat{O}' = \hat{O} + \delta\hat{O} = (1 + i\delta\alpha\,\hat{T})\hat{O}(1 - i\delta\alpha\,\hat{T})$$

$$= \hat{O} + i\delta\alpha\,\hat{T}\hat{O} - \hat{O}\,i\delta\alpha\,\hat{T} + \mathcal{O}(\delta\alpha^2)$$

$$\Rightarrow \quad \delta\hat{O} = i\delta\alpha\,[\hat{T},\hat{O}] \qquad (\text{VII } 7)$$

$\Rightarrow$ falls $\hat{H}$ invariant unter der betrachteten Trafo, $\delta\hat{H} = 0$ ($\hat{O} = \hat{H}$ in VII 7)

$$\Rightarrow \quad [\hat{T},\hat{H}] = 0$$

$\Rightarrow$ $\hat{T}$ ist Konstante der Bewegung!

- Wie sieht das nun bei Lagrange-Dichten aus?

- Zunächst ganz allgemein: wenn

$$\partial_\alpha f^\alpha = \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0 \qquad (\text{VII } 8)$$

gilt (vgl. Kontinuitätsgl. (VI 49)),

wobei f^α Funktionen der Felder und deren Ableitungen sein dürfen, und

Def. $\quad F^\alpha(t) = \int d^3r\, f^\alpha(\vec{r},t)$,

dann

$$(\text{VII } 8) \Rightarrow \quad \frac{\partial f^0}{\partial ct} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{f} \qquad \Big/ \int d^3r$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{c}\frac{dF^0}{dt} = -\int \vec{\nabla}\cdot\vec{f}\, d^3r \underset{\uparrow}{=} 0$$

Gauß, $\vec{f}$ schnell genug abfallend

$$\Rightarrow \quad T = F^0 = \int d^3r \, f^0(\vec{r},t) \qquad (\text{VII}\,9)$$

ist Erhaltungsgröße.

- Betrachte nun Trafo

$$\phi_r(x) \longrightarrow \phi_r'(x) = \phi_r(x) + \delta\phi_r(x) \qquad (\text{VII}\,10)$$

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r}\delta\phi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{r,\alpha}}\delta\phi_{r,\alpha}$$

$$\overset{(\text{VII}\,2)}{=} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{r,\alpha}}\right)\delta\phi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{r,\alpha}}\delta\phi_{r,\alpha}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{r,\alpha}}\delta\phi_r\right) \qquad (\text{VII}\,11)$$

- Falls $\mathcal{L}$ invariant unter Trafo (VII 10), dann

$$\delta\mathcal{L} = 0 = \partial_\alpha f^\alpha$$

mit $$f^\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{r,\alpha}}\delta\phi_r .$$

Die Konstante der Bewegung ist dann laut (VII 9)

$$F^0 = \int d^3r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{r,0}}\delta\phi_r = c\int d^3r \, \pi_r \, \delta\phi_r$$

(Noether-Theorem) $\qquad (\text{VII}\,12)$

- Betrachte nun Spezialfall komplexer Felder und

$$\begin{aligned} \phi_r &\rightarrow \phi_r' = e^{i\varepsilon}\phi_r \simeq (1+i\varepsilon)\phi_r \\ \phi_r^+ &\rightarrow \phi_r^{+\prime} = e^{-i\varepsilon}\phi_r^+ \simeq (1-i\varepsilon)\phi_r^+ \end{aligned} \qquad (\text{VII}\,13)$$

$\Rightarrow \delta\phi_r = i\varepsilon\phi_r , \quad \delta\phi_r^+ = -i\varepsilon\phi_r^+$

$\Rightarrow F^0 = i\varepsilon c \int d^3r \left(\Pi_r \phi_r - \Pi_r^+ \phi_r^+ \right)$

(beachte, daß ϕ_r und ϕ_r^+ ja als unabh. betrachtet werden müssen und in (VII 12) über alle Feldkomponenten zu summieren ist)

– Def. Ladungsoperator

$$Q = -\frac{q}{\varepsilon c \hbar} F^0 = -\frac{iq}{\hbar} \int d^3r \left(\Pi_r \phi_r - \Pi_r^+ \phi_r^+ \right) \qquad \text{(VII 14)}$$

(warum Q so heißt, wird später klar werden)

Q ist Konstante der Bewegung, falls $\mathcal{L}$ invariant unter Trafo (VII 13).

($\frac{iq}{\hbar}$ muß nicht infinitesimal sein, da Hintereinanderausführung infinitesimaler Trafos zu endlichen Trafos führt, unter denen $\mathcal{L}$ auch invariant ist.)

– Betrachte Kommutator

$$[\hat{Q}, \phi_r(x)] = -\frac{iq}{\hbar} \int d^3r' \, \overbrace{[\Pi_s(x'), \phi_r(x)]}^{-i\hbar\delta_{rs}\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')} \phi_s(x')$$

$\phi_r(x)$ vertauscht mit allem außer Π_r

$= -q\,\phi_r(x)$

$\Rightarrow$ falls $\hat{Q}|Q'\rangle = Q'|Q'\rangle$,

dann $\phi_r|Q'\rangle$ auch Eigenzustand von

$\hat{Q}$, aber zum Eigenwert $(Q'-q)$,

denn

$$\hat{Q}\,\phi_r\,|Q'\rangle = \left([\hat{Q},\phi_r] + \phi_r\hat{Q}\right)|Q'\rangle$$

$$= \left(-q\,\phi_r + \phi_r\,\hat{Q}\right)|Q'\rangle$$

$$= \left(-q\,\phi_r + \phi_r\,Q'\right)|Q'\rangle$$

$$= (Q'-q)\,\phi_r\,|Q'\rangle \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ ϕ_r vernichtet Teilchen mit Ladung q
(bzw. erzeugt eins mit $-q$)

Entsprechend vernichtet ϕ_r^+ Teilchen mit $-q$ und erzeugt eins mit $+q$ (s.u.).

- Wir haben gezeigt: falls $\mathcal{L}$ invariant unter Trafo (VII 13) $\Rightarrow$ Ladung erhalten, da $d\hat{Q}/dt = 0$

- Globale Phasentransformation der Art (VII 13) (Phase ε unabh. von x) heißt auch Eichtransformation erster Art

- Man sieht anhand der Gestalt von Q in (VII 14), daß komplexwertige Felder benötigt werden, um Teilchen mit Ladung zu beschreiben; ansonsten ist $\phi_r^+ = \phi_r$, $\pi_r^+ = \pi_r$ und $\Rightarrow Q \equiv 0$.

- Invarianz von $\mathcal{L}$ unter Translationen (in 4D)
  $\longrightarrow$ Impuls- (und Energie-) Erhaltung

- Invarianz von $\mathcal{L}$ unter Rotationen
  $\longrightarrow$ Drehimpulserhaltung

- Translationen und Rotationen bilden kontinuierliche Gruppen $\longrightarrow$ es reicht aus, infinitesimale Trafos zu betrachten

Translation

$$x_\alpha \longrightarrow x'_\alpha = x_\alpha + \delta x_\alpha = x_\alpha + \varepsilon_{\alpha\beta}\, x^\beta + \delta_\alpha \qquad \text{(VII 15)}$$

anti-symm. Tensor, vgl. (VI 36)

- Wie in (VI 37) bewirkt (VII 15) eine Trafo der Felder

$$\phi_r(x) \longrightarrow \phi'_r(x') = \phi_r(x) + \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\alpha\beta}\, S^{\alpha\beta}_{rs}\, \phi_s(x). \qquad \text{(VII 16)}$$

selber Punkt im Raumzeit, ausgedrückt in versch. Koord.

auch Summation über s

- Durch Vgl. mit (VI 37) wird deutlich, daß im Fall des Dirac-Feldes $\varepsilon_{\alpha\beta}$ mit $\Delta\omega_{\alpha\beta}$ und $S^{\alpha\beta}_{rs}$ mit den Matrizen $\sigma^{\alpha\beta}$ zusammenhängt.

- Invarianz bedeutet

$$\mathcal{L}(\phi_r(x), \phi_{r,\alpha}(x)) = \mathcal{L}(\phi'_r(x'), \phi'_{r,\alpha}(x')) \qquad \text{(VII 17)}$$

- Wie sieht nun f^α aus für Translationen und Rotationen?

- Variation bei festem Argument (wie in (VII 10))

$$\delta\Phi_r(x) = \Phi_r'(x) - \Phi_r(x)$$

- Variation für mitvariiertes Argument

$$\delta_T\Phi_r(x) = \Phi_r'(x') - \Phi_r(x)$$

$$= \underbrace{\Phi_r'(x') - \Phi_r(x')}_{} + \underbrace{\Phi_r(x') - \Phi_r(x)}_{}$$

$$= \delta\Phi_r(x') + \frac{\partial\Phi_r}{\partial x_\beta}\delta x_\beta$$

Korrekturen quadratisch in kleinen Größen

$$= \delta\Phi_r(x) + \frac{\partial\Phi_r}{\partial x_\beta}\delta x_\beta \qquad \text{(VII 18)}$$

- Warum betrachten wir das? Deshalb:

$$0 = \mathcal{L}(\Phi_r'(x'), \Phi_{r,\alpha}'(x')) - \mathcal{L}(\Phi_r(x), \Phi_{r,\alpha}(x))$$

Invarianz von $\mathcal{L}$

$$\overset{\text{(VII 18)}}{=} \delta\mathcal{L} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\alpha}\delta x^\alpha \qquad \text{(VII 19)}$$

- Da

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_r}\delta\Phi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_{r,\alpha}}\delta\Phi_{r,\alpha}$$

$$= \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_r}\delta\Phi_r + \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_{r,\alpha}}\delta\Phi_r\right\} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_{r,\alpha}}\right)\delta\Phi_r}_{0 \text{ wegen (VII 2)}}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}} \delta \phi_r\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}}\left[\delta_T \phi_r - \frac{\partial \phi_r}{\partial x_\beta}\delta x_\beta\right]\right\} \qquad (\text{VII } 20)$$

– (VII 19) zusammen mit (VII 20) ergeben

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\underbrace{\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}}\left[\delta_T \phi_r - \frac{\partial \phi_r}{\partial x_\beta}\delta x_\beta\right] + \mathcal{L}\,\underbrace{\delta x^\alpha}_{g^{\alpha\beta}\delta x_\beta}\right\}}_{f^\alpha} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} f^\alpha = \partial_\alpha f^\alpha = 0$$

$$f^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}}\delta_T \phi_r - \mathcal{T}^{\alpha\beta}\delta x_\beta \qquad (\text{VII } 21)$$

mit $\mathcal{T}^{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}}\frac{\partial \phi_r}{\partial x_\beta} - \mathcal{L} g^{\alpha\beta}$ (VII 22)

– Für Translationen ist $\varepsilon_{\alpha\beta} = 0$

$$\Rightarrow \quad x_\alpha' = x_\alpha + \delta_\alpha \quad \Rightarrow \quad \delta x_\alpha = \delta_\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \phi_r'(x') = \phi_r(x) + \cancelto{0}{\tfrac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta}_{rs}\phi_s(x)}$$

$$\Rightarrow \quad \delta_T \phi_r = \phi_r'(x') - \phi_r(x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad f^\alpha = -\mathcal{T}^{\alpha\beta}\delta x_\beta$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\mathcal{T}^{\alpha\beta}\delta x_\beta = 0$$

Vier infinitesimale Verrückungen δx_β unabhängig voneinander

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{T}^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} = 0 , \qquad \text{(VII 23)}$$

(vier Kontinuitätsgleichungen für Energie- und Impulserhaltung)

- Laut Noether-Theorem (VII 9) haben wir damit als erhaltene Größen die vier

$$c\mathcal{P}^\beta = \int d^3r \, \mathcal{T}^{0\beta} = \int d^3r \left\{ c\Pi_r(x) \frac{\partial \Phi_r}{\partial x_\beta} - \mathcal{L} g^{0\beta} \right\} . \qquad \text{(VII 24)}$$

- Die 0-Komponente liefert die Hamilton-Funktion (Energie)

$$c\mathcal{P}^0 = \int d^3r \left\{ \Pi_r(x) \dot{\Phi}_r(x) - \mathcal{L}(\Phi_r, \Phi_{r,\alpha}) \right\}$$
$$= \int d^3r \, \mathcal{H} = H \qquad \text{(VII 25)}$$

- Die 3er-Komponente besteht aus den räumlichen Impulskomponenten der Felder

$$\mathcal{P}^j = \int d^3r \, \Pi_r(x) \frac{\partial \Phi_r(x)}{\partial x_j} \qquad \text{(VII 26)}$$

- $\mathcal{T}^{\alpha\beta}$ liefert durch $\partial_\alpha \mathcal{T}^{\alpha\beta}$ Kontinuitäts-gl. für Energie und Impuls und heißt daher <u>Energie-Impuls-Tensor</u>

- Für Rotationen ist $\delta_\alpha = 0$

$\overset{(\text{VII }15)}{\Rightarrow}$ $x'_\alpha = x_\alpha + \underbrace{\varepsilon_{\alpha\beta} x^\beta}_{\delta x_\alpha}$, $\varepsilon_{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\beta\alpha}$

$$\overset{(\text{VII }16)}{\Longrightarrow} \quad \phi'_r(x') = \phi_r(x) + \underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta} S_{rs}^{\alpha\beta} \phi_s(x)}_{\delta_T \phi_r}$$

$\overset{(\text{VII }21)}{\Longrightarrow}$

$$f^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}} \frac{1}{2} \varepsilon_{\beta\gamma} S_{rs}^{\beta\gamma} \phi_s - T^{\alpha\beta} \underbrace{\delta x_\beta}_{\varepsilon_{\beta\gamma} x^\gamma}$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_{\beta\gamma}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}} S_{rs}^{\beta\gamma} \phi_s - T^{\alpha\beta} x^\gamma + \underbrace{x^\beta T^{\alpha\gamma}}\right)$$

Summ. index β und γ vertauscht → Vorzeichenwechsel wegen $\varepsilon_{\beta\gamma} = -\varepsilon_{\gamma\beta}$.

$$\Rightarrow f^\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon_{\beta\gamma} \mathcal{M}^{\alpha\beta\gamma} \qquad (\text{VII }27)$$

mit $\mathcal{M}^{\alpha\beta\gamma} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}} S_{rs}^{\beta\gamma} \phi_s(x) + \left(x^\beta T^{\alpha\gamma} - x^\gamma T^{\alpha\beta}\right)$ (VII 28)

- Wegen $\mathcal{M}^{\alpha\beta\gamma} = -\mathcal{M}^{\alpha\gamma\beta}$ gibt es sechs erhaltene Größen — Indizes umbenannt

$$c M^{\alpha\beta} = \int d^3r\, \mathcal{M}^{0\alpha\beta}$$

$$= \int d^3r \left\{ \left(x^\alpha T^{0\beta} - x^\beta T^{0\alpha}\right)\right.$$