

Allgemein findet man

$$(w^r(\vec{\epsilon}_r \vec{p}))^\dagger w^{r'}(\vec{\epsilon}_{r'} \vec{p}) = \frac{E}{mc^2} \delta_{rr'}. \quad (\text{VI 58})$$

- Außerdem kann man sich leicht davon überzeugen, dass $(\bar{w}^r(\vec{p}) = (w^r(\vec{p}))^\dagger \gamma_0)$

$$\bar{w}^r(\vec{p}) w^{r'}(\vec{p}) = \delta_{rr'} \epsilon_r, \quad (\text{VI 59})$$

(Orthogonalitätsrelation)

$$\sum_{r=1}^4 \epsilon_r w_\alpha^r(\vec{p}) \bar{w}_\beta^r(\vec{p}) = \delta_{\alpha\beta} \quad (\text{VI 60})$$

(Vollständigkeitsrelation).

- Man findet außerdem

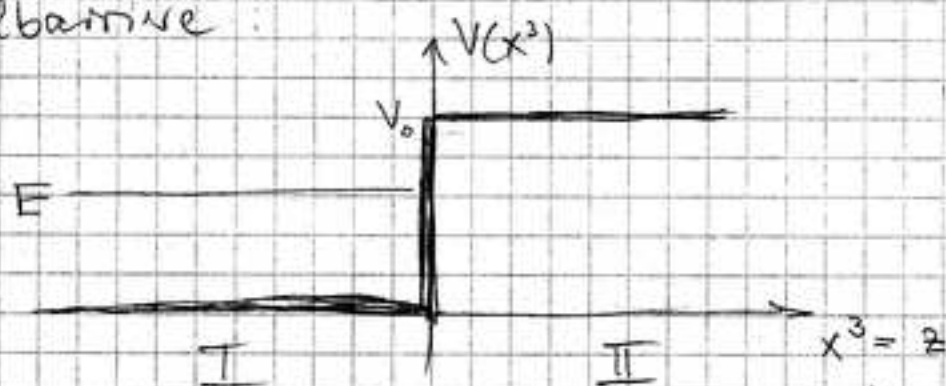
$$(\hat{p} - \epsilon_r mc) w^r(\vec{p}) = 0$$

$$\bar{w}^r(\vec{p}) (\hat{p} - \epsilon_r mc) = 0$$

entspricht
Lösungen
in
Impulsdar-
stellung (VI 61)

Klein-Paradoxon

- Wir betrachten die Reflexion an einer Potentialbarriere



- Für die folgenden Betrachtungen setzen wir $\hbar = c = 1$, um Schreibarbeit zu sparen.

- Da sich alles in x^3 -Richtung abspielt, setzen wir

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, 0, 0, k \right) \\ = \left(\frac{\omega}{c}, 0, 0, k \right)$$

- Da alle im folgenden auftretenden Wellen mit $e^{-i\omega t}$ schwingen, können wir diesen gemeinsamen Vorfaktor weglassen. Ebenso ist der gemeinsame Normierungsfaktor

$$\sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}}$$

nicht wichtig bei unserer

Betrachtung.

- Wir gehen nun wie in der nicht-rel. QM bei der Berechnung der Reflexion an einer Potentialstufe vor:

(VI 56), aber unnormiert und ohne $e^{-i\omega t}$, $\hbar = c = 1$

$$\psi_{in}(x^3) = \psi_{in}^{\uparrow}(x^3) = e^{ikx^3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k/E+m \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{array}{l} \text{Spin-up} \\ \text{Elektron,} \\ \text{pos. Energie} \end{array}$$

$$\psi_{refl}(x^3) = a e^{-ikx^3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -k/E+m \\ 0 \end{pmatrix} + b e^{-ikx^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ k/(E+m) \end{pmatrix} \leftarrow \begin{array}{l} \text{unübliches} \\ \text{Spin-Umklapp} \end{array}$$

- In Region I

225

$$\psi_I = \psi_{\text{in}} + \psi_{\text{refl}}$$

In Region II Ansatz

$$\psi_{II}(x^3) = \psi_{\text{trans}}(x^3) = c e^{iqx^3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ q/(E-V_0+m) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$+ d e^{iqx^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -q/(E-V_0+m) \end{pmatrix}$$

wobei $(E - V_0)^2 = q^2 + m^2$,

also $q = \pm \sqrt{(E - V_0)^2 - m^2}$

- Damit die transmittierte Welle nach rechts läuft, müssen wir das positive Vorzeichen wählen, also

$$q = \sqrt{(E - V_0)^2 - m^2}, \quad (\text{VI } 62)$$

- Anschlussbedingung $\psi_I(0) = \psi_{II}(0)$

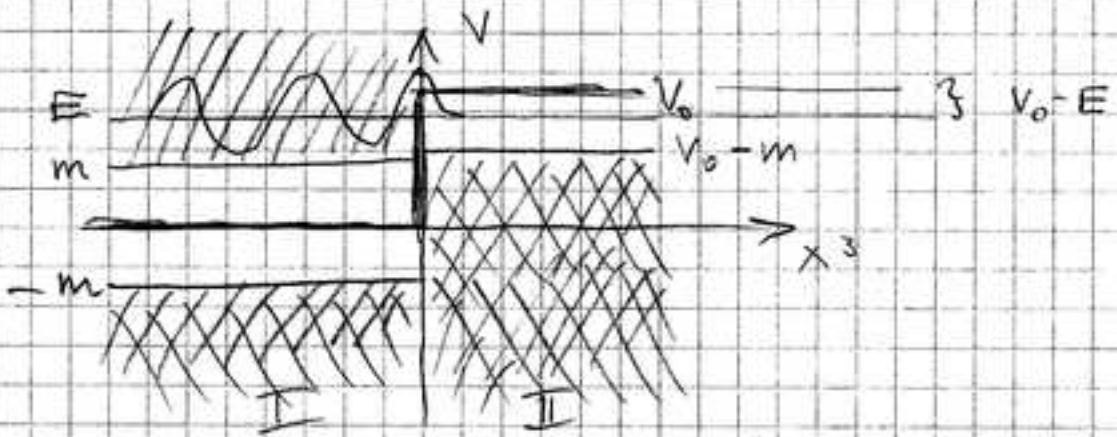
$$\Rightarrow 1 + a = c$$

$$1 - a = r c, \quad r = \frac{q}{k} \frac{E + m}{E - V_0 + m} \quad (\text{VI } 63)$$

$$b = d = 0 \quad (\text{keine Spinnulekapp-Prozesse!})$$

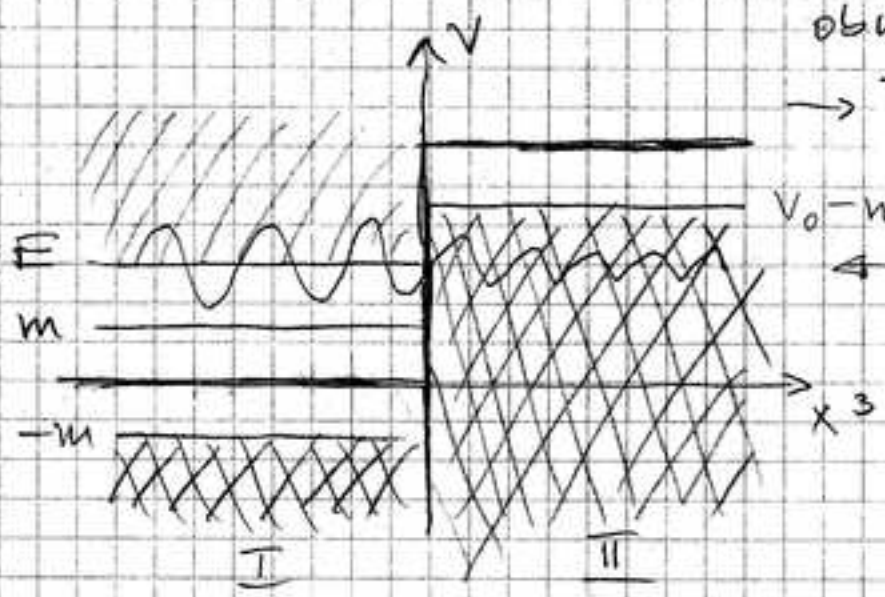
- Fall 1: $|E - V_0| < m \Rightarrow q$ imaginär

\Rightarrow exponentieller Zerfall innerhalb der Barriere, wie gewohnt



Fall 2: $|E - V_0| > m$ z.B. $V_0 - E > m$

$\Rightarrow q$ reell \Rightarrow oszillierende Lösungen in Region II, obwohl $V_0 > E$



\rightarrow Teilchen geht durch (Klein Paradox)

Erwartezustände stehen zur Verfügung

\rightarrow Teilchen kann passieren

- Man findet für die Ströme

$$\frac{j_{\text{trans}}}{j_{\text{in}}} = \frac{4r}{(1+r)^2}, \quad \frac{j_{\text{refl}}}{j_{\text{in}}} = \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2 = 1 - \frac{j_{\text{trans}}}{j_{\text{in}}}$$

Für $V_0 - E > m$, also $E - V_0 < -m$

($q > 0$) $\Rightarrow r = \frac{q}{k} \frac{E+m}{E-V_0+m} < 0$

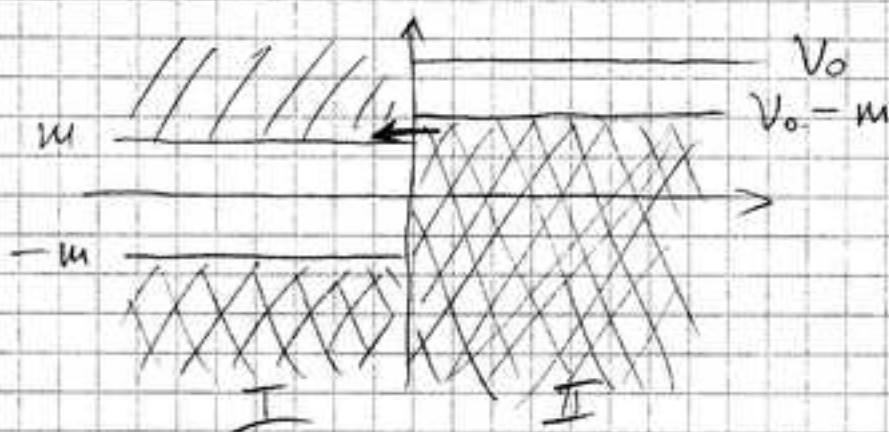
$\Rightarrow \frac{j_{\text{trans}}}{j_{\text{in}}} < 0$

$\Rightarrow \frac{j_{\text{refl}}}{j_{\text{in}}} > 1$!

→ Es wird mehr reflektiert als einfällt! ²²⁷

- All diese Probleme treten in einer
feldtheoretischen Beschreibung (2. Quantifi-
zierung) nicht mehr auf.

- Man beachte: sobald $V_0 > 2m$



können Elektronen, die die negativen
Energiezustände in Region II besetzen
in pos. Energiezustände in Region I
übergehen → Teilchenstrom nach links
(wie Jufe von oben)

- Nach 2. Quantifizierung:

An der Schwelle werden für $V_0 > 2m$
Elektronen-Positronen-Paare erzeugt

(→ Vakuum durch hohe Felder
instabil machen, QED)

VII Einführung in die Feldtheorie

- Planck 1900: Emission und Absorption von Strahlung diskontinuierlich \rightarrow Photonen
(Einstein 1905)
bewiesen durch photoel. Effekt und Compton-Streuung
- Dirac 1927: „zweite Quantisierung“
 - des elektromagnetischen Feldes
 - \rightarrow Photonen
 - \rightarrow Erzeugungs- u. Vernichtungsop. erfüllen Kommutatorrelationen
 - des Schrödinger-Feldes
 - \rightarrow Fermionen, Bosonen (vgl. Abschnitt V)
 - \rightarrow ψ, ψ^\dagger erfüllen (Anti)-Kommutatorrelationen
 - des Dirac-Feldes \rightarrow Elektronen, Positronen, relativistisch (s. Buch VI)
- Bsp: EM WW zwischen Elektronen und Positronen wird, nach Quantisierung des EM Feldes, vermittelt durch Photonen
- Teilchenzahl offen; El. - Pos. dürfen sich vernichten \rightarrow Protonen (vgl. Abschnitt V).

- Klass. Mechanik: Lagrange-Funktion
 → Bewegungsgleichungen

- Feldtheorie: Lagrange-Dichte (für kontinuierliche Systeme)
 → Feldgleichungen

- Betrachte Satz Felder $\phi_r(x)$, $r = 1, \dots, N$

- Lagrange-Dichte hängt von

$$\phi_r(x) \text{ und } \phi_{r,\alpha}(x) := \frac{\partial \phi_r}{\partial x^\alpha} = \partial_\alpha \phi_r$$

ab (analog zu $L(q, \dot{q})$): $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_r, \phi_{r,\alpha})$.

- Wirkungsintegral

$$S(\Omega) = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi_r, \phi_{r,\alpha})$$

\uparrow Raumzeit in 4D Raumzeit \uparrow $dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$

- Feldgleichungen folgen aus Variationsprinzip (Postulat!)

- Variation des Feldes $\phi_r(x) \rightarrow \phi_r(x) + \delta \phi_r(x)$
 so, dass $\delta \phi_r(x) = 0$ auf $\Gamma(\Omega)$
 \uparrow
 Rand von Ω

(falls ϕ_r komplex, ϕ und ϕ^* unabhängig variieren)

$$\delta S(\Omega) \stackrel{!}{=} 0. \quad (\text{VII } 1) \quad 230$$

$$\delta S(\Omega) = \int_{\Omega} d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} \delta \phi_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}} \delta \phi_{r,\alpha} \right\}$$

Summation über
doppelt auftretende
Indizes r und α

$$= \int_{\Omega} d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} \delta \phi_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \delta \phi_r \right\}$$

$$\stackrel{\curvearrowright}{=} \int_{\Omega} d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} \delta \phi_r - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}} \right) \delta \phi_r \right\}$$

partielle
Integration

$$+ \int_{\Omega} d^4x \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}} \delta \phi_r \right)$$

$$\int_{\Gamma(\Omega)} d n^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}} \delta \phi_r \quad (\text{Gauß in 4D})$$

0 auf „Oberfläche“
 $\Gamma(\Omega)$

$$= \int_{\Omega} d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}} \right) \right\} \delta \phi_r = 0$$

$\Rightarrow = 0$

\Rightarrow Euler-Lagrange (Bewegungsgleichungen)
des Feldes

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}} \right) = 0, \quad r=1, \dots, N.$$

(VII 2)

- Def.: konjugiertes Feld

$$\pi_r(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_r} \quad (\text{VII } 3)$$

- Def.: Hamilton-Dichte

$$\mathcal{H}(x) = \pi_r(x) \dot{\phi}_r(x) - \mathcal{L}(\phi, \phi_{r,\alpha}) \quad (\text{VII } 4)$$

(alles analog zur Klasse Mechanik, wo

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \quad H = p\dot{q} - L)$$

- Beispiel:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\phi_{, \alpha} \phi_{, \alpha} - \underbrace{\mu^2}_{\text{Konstante}} \phi^2) \quad (\text{VII } 5)$$

$r=1$
(nur eine
Feldkomponente)

Wie sieht die zugehörige
Feldgleichung aus?

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\mu^2 \phi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{, \alpha}} = \frac{\partial}{\partial \phi_{, \alpha}} \left(\frac{1}{2} \phi_{, \beta} \phi_{, \beta} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \phi_{, \alpha}} \left(\frac{1}{2} g^{\beta\eta} \phi_{, \beta} \phi_{, \eta} \right)$$

$$= \frac{1}{2} g^{\beta\eta} \left(\phi_{, \eta} \delta_{\beta}^{\alpha} + \phi_{, \beta} \delta_{\eta}^{\alpha} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\phi_{, \eta} \delta^{\eta\alpha} + \phi_{, \beta} \delta^{\beta\alpha} \right)$$

$$= \phi_{, \alpha}^{\alpha}$$

(VII 2)
=>

$$-\mu^2 \phi - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \phi,^\alpha$$
$$= -\mu^2 \phi - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}}_{\square} \phi$$

\square d'Alembert

$$\Rightarrow (\square + \mu^2) \phi = 0 \quad (\text{Klein-Gordon-Gl., vgl. (VI 2)})$$

Konjugiertes Feld ist hier

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} \left(\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \nabla^2 \phi \right] \right)$$
$$= \frac{1}{2c^2} \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} (\dot{\phi})^2 = \frac{1}{c^2} \dot{\phi}$$

Wir werden sehen, dass die Klein-Gordon-Gl. spinlose, neutrale Bosonen beschreibt;

vgl. mit (VI 2): $\mu^2 = \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \Rightarrow m = \frac{\hbar \mu}{c}$

\rightarrow Compton-Wellenlänge $\hbar/mc = \mu^{-1}$

Quantisierung

Kanonische Quantisierung, d.h.

Poisson-Klammern \rightarrow Kommutator
(bezieht zunächst nur Bosonen)

$$[\phi_r(\vec{r}, t), \pi_s(\vec{r}', t)] = i\hbar \delta_{rs} \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

$$[\phi_r(\vec{r}, t), \phi_s(\vec{r}', t)] = [\pi_r(\vec{r}, t), \pi_s(\vec{r}', t)] = 0$$

(VII 6)