$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\omega & -\sinh\omega & 0 & 0 \\ -\sinh\omega & \cosh\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \qquad (\text{VI } 44)$$

bzw

$$\begin{aligned} x^{0'} &= (\cosh\omega)(x^0 - \tanh\omega\, x^1) \\ x^{1'} &= (\cosh\omega)(x^1 - \tanh\omega\, x^0) \\ x^{2'} &= x^2 \\ x^{3'} &= x^3 \end{aligned}$$

- Vergleich mit Lorentz-Trafo

$$\Lambda^\nu{}_\mu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{hier} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

$$\Rightarrow \quad \cosh\omega = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \tanh\omega = \beta$$

- Diese Betrachtungen lassen sich verallgemeinern auf Bewegungen in $y, z$ - Richtung und Raumdrehungen

- 6 $I^\nu{}_\mu$ beschreiben die drei „üblichen" Raumdrehungen + 3 „Drehungen" der Art (VI 44) $\rightarrow$ verallgemeinerte Drehungen in der 4D Raumzeit

- Nun können wir auch $S$ hinschreiben.
Man findet allgemein

$$\psi'(x') = S\,\psi(x) = \lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{i}{4}\frac{\omega}{N}\sigma_{\mu\nu}I_n^{\mu\nu}\right)^N\psi(x)$$

$$= e^{-\frac{i}{4}\omega\sigma_{\mu\nu}I_n^{\mu\nu}}\,\psi(x). \qquad (\text{VI } 45)$$

- Im Spezialfall oben (Bewegung von B entlang $x$-Richtung von A) haben wir

$$I^{\mu\nu} = g^{\nu\alpha} I^{\mu}{}_{\alpha} \underset{\uparrow}{=} \;?$$

$\mu = 0$ und $\alpha = 1$
oder $\alpha = 0$ und $\mu = 1$

$$\Rightarrow \quad I^{0\nu} = g^{\nu 1} I^{0}{}_{1} \qquad \text{nur } \nu = 1 \text{ trägt bei}$$

$$g^{11} = -1$$

$$\Rightarrow \quad I^{01} = -I^{0}{}_{1} = 1$$

analog $\quad I^{1\nu} = g^{\nu 0} I^{1}{}_{0} \;\Rightarrow\; I^{10} = I^{1}{}_{0} = -1$

Also unwesentlich in diesem Fall in (VI 45) nur

$$\sigma_{10} I^{10} + \sigma_{01} I^{01} = -\sigma_{10} + \sigma_{01} = 2\sigma_{01}$$

mit $\sigma_{01} = \frac{i}{2}[\gamma_0, \gamma_1]$

und somit

$$\psi'(x') = e^{-\frac{i}{2}\omega\sigma_{01}}\,\psi(x) \qquad (\text{VI } 46)$$

- Für eine Drehung um $\varphi$ um die $z$-Achse findet man auf die gleiche Weise

$$\psi'(x') = e^{\frac{i}{2}\varphi\sigma^{12}}\,\psi(x) \qquad (\text{VI } 47)$$

wobei in der speziellen Darstellung der $\gamma$-Matrizen mittels Pauli-Matrizen

$$\sigma^{12} = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

(mit Pauli $2\times 2$-Matrix $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ )

→ Analogie zur Drehung eines zweikomponentigen Pauli-Spinors

$$\varphi'(x') = e^{\frac{i}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{\sigma}}\,\varphi(x)$$

$\vec{\omega}$: 3D-Drehung (Achse + Winkel)
$\vec{\sigma}$: 3er-Vektor von Pauli-Matrizen.

- Erst nach Drehung um $4\pi$ wieder ursprüngliche Wert
  → alle Observablen müssen bilinear in $\psi$ sein

- Auf Seite 199 unten hatten wir die Frage aufgeworfen, ob

$$c\,\overset{\psi^\dagger\psi}{\rho}(x) \quad \text{und} \quad j_k = c\,\psi^\dagger \alpha_k \psi$$

einen <u>Vierervektor</u> bilden. Das können wir nun überprüfen.

Mit den $\gamma$-Matrizen können wir schreiben

$$j^\mu(x) = c\,\psi^\dagger(x)\,\gamma^0\gamma^\mu\,\psi(x), \qquad \text{(VI 48)}$$

denn $\gamma^0\gamma^0 = 1$ und $\gamma^0\gamma^k = \alpha_k$, $k=1,2,3$.

Außerdem gilt $S^{-1} = \gamma_0 S^\dagger \gamma_0$, $\gamma_0 = \gamma^0$

Also transformieren wir:

$$j^{\mu\prime}(x') = c\,\psi'^{+}(x')\,\gamma^0\gamma^\mu\,\psi'(x')$$

$$= c\left(S\psi(x)\right)^{+}\gamma^0\gamma^\mu\, S\psi(x)$$

$$= c\,\psi^{+}(x)\,\underbrace{S^{+}\gamma_0}_{\gamma_0 S^{-1}}\gamma^\mu\, S\,\psi(x)$$

$$= c\,\psi^{+}(x)\,\gamma_0\,\underbrace{S^{-1}\gamma^\mu S}_{\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu}\,\psi(x) \qquad (\text{s. VI 35})$$

$$= \Lambda^\mu{}_\nu\,\underbrace{c\,\psi^{+}(x)\,\gamma^0\gamma^\nu\,\psi(x)}_{j^\nu(x)}$$

$$= \Lambda^\mu{}_\nu\, j^\nu(x)$$

$\Rightarrow$ $j^\mu$ transformiert sich in der Tat wie 4er-Vektor

$\Rightarrow$ Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial j^\mu(x)}{\partial x^\mu} = 0 \qquad (\text{VI } 49)$$

invariant $\Rightarrow$ Wahrscheinlichkeit in allen Bezugssystemen erhalten

- Wahrscheinlichkeitsinterpretation auf relativistisch korrekte Weise möglich

- Wir beschränken uns hier auf eigentliche Lorentz-Trafos (Raumspiegelung, Zeitumkehr s. z.B. Bjorken & Drell)

## Lösung für geradlinig, gleichförmige Bewegung

- Wir hatten auf Seite 200 bereits die Lösungen der Dirac-Gl. für ein ruhendes Elektron betrachtet

$$\psi^r(x) = w^r(0)\, e^{-i\varepsilon_r mc^2/\hbar \cdot t} \qquad r = 1,2,3,4$$

$$\varepsilon_r = \begin{cases} +1 & \text{für } r = 1,2 \\ -1 & \text{für } r = 3,4 \end{cases}$$

$$w^1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w^2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w^3(0) = \ldots \qquad (\text{VI } 50)$$

$r = 1,2$: positive Energie, $r = 3,4$: neg. Energie

- Um Lösungen für beliebige Geschw. $\vec{v}$ zu bekommen, transformieren wir auf System B, welches sich mit $-\vec{v}$ bzgl. A bewegt. Wenn Teilchen in A ruht, bewegt es sich in B mit $+\vec{v}$.

- Den Exponenten in $e^{-i\varepsilon_r mc^2/\hbar \cdot t}$ schreiben wir in invarianter Form:

Mit $p^\mu = (E/c, \vec{p})$, $x^\mu = (ct, \vec{r})$

folgt für $p^{\mu(0)} = (mc, \vec{p} = 0) = (mc, 0)$ (Ruhesystem)

$$p^{\mu(0)} x_\mu = mc^2 t$$

Da $p^\mu x_\mu$ in allen Systemen gleich

$$\Rightarrow \quad p^{\mu(0)} x_\mu = p^\mu x'_\mu \left(= p_\mu x^{\mu\prime}\right) \qquad (\text{VI } 51)$$

$$\Rightarrow \quad e^{-i\varepsilon_r mc^2/\hbar \cdot t} = e^{-i\varepsilon_r p_\mu x^{\mu\prime}/\hbar} \qquad (\overline{\text{VI}}\,52)$$

- Da $p^\mu p_\mu = m^2c^2 > 0$ (zeitartig) $\Rightarrow p_\mu$ innerhalb Lichtkegel

$\Rightarrow$ Trafo mischt nicht positive Lösungen $\varepsilon_r = +1$ mit negativen $\varepsilon_r = -1$.

- $(\overline{\text{VI}}\,46) \Rightarrow \quad S = e^{-\frac{i}{2}\omega\sigma_{01}}$

Da wir nun auf ein System transformieren, das sich mit $-\vec{v}$ bewegt, ist

$$\tanh\omega = -\frac{v}{c}, \quad \omega = \operatorname{arctanh}\left(-\frac{v}{c}\right) = -\operatorname{arctanh}\frac{v}{c}$$

- Die Spinoren $w^r$ lauten dann im System B, in dem sich das Teilchen mit $\vec{v}$ bewegt (und Impuls $\vec{p}$ hat)

$$w^r(\vec{p}) = e^{-i\omega/2\cdot\sigma_{01}}\, w^r(0) = \Big(\cosh\frac{\omega}{2} - \underbrace{\alpha_1}_{\text{Dirac-Matrix}}\sinh\frac{\omega}{2}\Big) w^r(0)$$

$$= \cosh\frac{\omega}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\tanh\frac{\omega}{2} \\ 0 & 1 & -\tanh\frac{\omega}{2} & 0 \\ 0 & -\tanh\frac{\omega}{2} & 1 & 0 \\ -\tanh\frac{\omega}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} w^r(0) \qquad (\overline{\text{VI}}\,53)$$

- Da $\quad -\tanh\frac{\omega}{2} = \dfrac{-\tanh\omega}{1+\sqrt{1-\tanh^2\omega}} = \dfrac{v/c}{1+\sqrt{1-v^2/c^2}}$

und $\underbrace{\gamma mc^2}_{E} = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$

$$\Rightarrow \quad -\tanh\frac{\omega}{2} = \frac{pc}{E+mc^2}$$

$$\cosh\frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}} \qquad (\text{VI } 54)$$

– Für $\vec{v}$ in beliebiger Richtung lautet $I^\mu{}_\nu$ allgemein

$$I^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & -\cos\alpha & -\cos\beta & -\cos\gamma \\ -\cos\alpha & 0 & 0 & 0 \\ -\cos\beta & 0 & 0 & 0 \\ -\cos\gamma & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma$ die Winkel bzgl. der Achsen sind,

$$\sigma_{\mu\nu} I_n^{\mu\nu} = 2\left(\sigma_{01}\cos\alpha + \sigma_{02}\cos\beta + \sigma_{03}\cos\gamma\right)$$
$$= -2i\,\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}.$$

Damit erhält man

$$S = e^{-\frac{i\omega}{2}\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}} = \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{2mc^2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{p_z c}{\mathcal{E}} & \frac{p_- c}{\mathcal{E}} \\ 0 & 1 & \frac{p_+ c}{\mathcal{E}} & -\frac{p_z c}{\mathcal{E}} \\ \frac{p_z c}{\mathcal{E}} & \frac{p_- c}{\mathcal{E}} & 1 & 0 \\ \frac{p_+ c}{\mathcal{E}} & -\frac{p_z c}{\mathcal{E}} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

mit $\mathcal{E} = E + mc^2$ (VI 55)

und $p_\pm = p_x \pm i p_y$

Hier kann man $w^r(\vec{p})$ direkt als $r$-te Spalte ablesen, und die allgemeine freie Lösung ist

$$\psi^r(x) = w^r(\vec{p})\, e^{-i\varepsilon_r p_\mu x^\mu/\hbar} \qquad (\text{VI } 56)$$

→ Lösung der Dirac-Gleichung (ebene Wellen) × Spinor z.B. ist

$$w^1(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z c}{E+mc^2} \\ \frac{p_+ c}{E+mc^2} \end{pmatrix} \qquad (\text{VI } 57)$$

- Die $w^r(\vec{p})$ sorgen für die relativistisch korrekte Normierung.

Betrachte z.B. Wahrscheinlichkeitsdichte $\psi^+\psi$ für $r = 1$ (wir wissen bereits, daß $\psi^+\psi$ sich wie die 0-Komponente der 4er-Stromdichte transformiert)

$$(\psi^r)^+ \psi = (w^1(\vec{p}))^+ \, w^1(\vec{p})$$

$$= \frac{E+mc^2}{2mc^2}\left(1 + \frac{p_z^2 c^2}{(E+mc^2)^2} + \frac{p_+^* p_+ c^2}{(E+mc^2)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2mc^2}\left(E + mc^2 + \frac{(p_z^2 + p_x^2 + p_y^2)c^2}{E + mc^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2mc^2}\left(E + mc^2 + \frac{E^2 - m^2c^4}{E + mc^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2mc^2}\left(E + mc^2 + E - mc^2\right)$$

$$= \frac{E}{mc^2} = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

=> Wahrsch.dichte erhöht sich mit $v$ um $\gamma$, da sich Volumenelement wegen Längenkontraktion verkleinert