- Für Bosonen findet man die entsprechenden Gleichungen mit Kommutatoren.

Transformationsverhalten

- Basiszustände $|k_1 \ldots k_N^-\rangle$ waren nicht näher spezifiziert
- Wähle z.B. Orts- / Spin-Zustände
  $|\vec{r}_1 m_1, \vec{r}_2 m_2 \ldots^-\rangle$

$$\Rightarrow \quad \hat{\psi}^+_m(\vec{r}) = |\vec{r}\,m\rangle\langle 0| + \sum_{m_1}\int d^3r_1\, |\vec{r}\,m, \vec{r}_1 m_1^-\rangle\langle \vec{r}_1 m_1| + \ldots \qquad \text{(V13)}$$

$$\hat{\psi}_m(\vec{r}) = \left(\hat{\psi}^+_m(\vec{r})\right)^+ = |0\rangle\langle \vec{r}\,m| + \ldots$$

sind Erzeugungs- u. Vernichtungsop. für ein Fermion-Teilchen am Ort $\vec{r}$ mit Spin-komponente $m\hbar$

$$- \quad \left[\hat{\psi}_m(\vec{r}), \hat{\psi}^+_{m'}(\vec{r}\,')\right]_+ = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,\delta_{mm'}\,\hat{1} \qquad \text{(V14)}$$

$$\left[\hat{\psi}_m(\vec{r}), \hat{\psi}_{m'}(\vec{r}\,')\right]_+ = 0$$

$$\left[\hat{\psi}^+_m(\vec{r}), \hat{\psi}^+_{m'}(\vec{r}\,')\right]_+ = 0$$

- Wie kommt man nun von einer Darstellung zur anderen?

$$|\vec{r}m\rangle = \sum_k |k\rangle\langle k|\vec{r}m\rangle \qquad \text{(V15)}$$

$$|\vec{r}m, \vec{r}_1 m_1\rangle = \sum_{kk_1} |kk_1\rangle\langle kk_1|\vec{r}m, \vec{r}_1 m_1\rangle$$

$$= \sum_{kk_1} |kk_1\rangle \langle k|\vec{r}m\rangle\langle k_1|\vec{r}_1 m_1\rangle$$

von links mit $\hat{A}^-$

$$\Rightarrow \quad |\vec{r}m, \vec{r}_1 m_1^-\rangle = \sum_{kk_1} |kk_1^-\rangle\langle k|\vec{r}m\rangle\langle k_1|\vec{r}_1 m_1\rangle \qquad \text{(V16)}$$

- Das können wir in (V13) einsetzen
Man findet (→ Übung)

$$\hat{\psi}_m(\vec{r}) = \sum_k \hat{a}_k \langle \vec{r}m|k\rangle \qquad \text{(V17)}$$

und natürlich auch umgekehrt

$$\hat{a}_k = \sum_m \int d^3r\, \hat{\psi}_m(\vec{r})\, \langle k|\vec{r}m\rangle. \qquad \text{(V18)}$$

<u>Entwicklung eines Operators in Erzeugern u. Vernichtern</u>

- Gegeben sei ein symmetrischer N-Teilchen-Operator $\hat{L}$, beliebige Permutation

$$[\hat{L}, \hat{P}] = 0 \Rightarrow [\hat{L}, \hat{A}^-] = 0.$$

$$\hat{L} = \sum_{k_1 \cdots k_N} \sum_{k_1' \cdots k_N'} |k_1 \cdots k_N\rangle\langle k_1 \cdots k_N|\hat{L}|k_1' \cdots k_N'\rangle \times \langle k_1' \cdots k_N'|$$

- Im Falle von Fermionen ist nur der antisymm. Teilraum von $\mathcal{U}_N$ relevant

$$\hat{A}^-\hat{L}\hat{A}^- = \frac{1}{N!}\sum_{k_1\cdots k_N}\sum_{k_1'\cdots k_N'} |k_1\cdots k_N^-\rangle\langle k_1\cdots k_N|$$

$$\times \hat{L}\,|k_1'\cdots k_N'\rangle\langle k_1'\cdots k_N'^-|$$

$$= \hat{L} \quad \text{im} \quad \mathcal{H}_N^- \qquad \text{(V19)}$$

- Man beachte: Matrix $\langle k_1\cdots k_N|\hat{L}|k_1'\cdots k_N'\rangle$ in Produktzuständen zu bilden (nicht antisymmetrisiert).

Spezialfall 1: Summe von Einteilchenop.

$$\hat{L} = \sum_{\nu=1}^{N}\hat{f}_\nu$$

$\hat{f}_\nu$ Einteilchenop., die alle gleich sind, nur auf Teilchen ν wirken (z.B. $-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}_i^2$)

$$\langle k_1\cdots k_N|\sum_{\nu=1}^{N}\hat{f}_\nu|k_1'\cdots k_N'\rangle = \langle k_1|\hat{f}_1|k_1'\rangle\,\delta_{k_2k_2'}$$
$$\times\,\delta_{k_3k_3'}\cdots\delta_{k_Nk_N'}$$
$$+\cdots$$
$$+\,\delta_{k_1k_1'}\cdots\langle k_N|\hat{f}_N|k_N'\rangle$$

- In (V19) $\Rightarrow$

$$\sum_{\nu=1}^{N}\hat{f}_\nu = \frac{1}{N!}\sum_{k_1\cdots k_N}\sum_{k_1'}|k_1\cdots k_N^-\rangle\langle k_1|\hat{f}_1|k_1'\rangle\langle k_1'k_2\cdots k_N^-|$$

$$+\frac{1}{N!}\sum_{k_1\cdots k_N}\sum_{k_2'}|\;\;''\;\;\rangle\langle k_2|\hat{f}_2|k_2'\rangle\langle k_1k_2'\cdots^-|$$

$$+\cdots$$

- Vertauschung der Summationsindizes im 2. Term

$$k_1 \to k_2 , \quad k_2 \to k_1 , \quad k_2' \to k_1'$$

$\Rightarrow$ da $\langle k_1 | \hat{f}_1 | k_1' \rangle = \langle k_2 | \hat{f}_2 | k_2' \rangle = \cdots$

$$= f(k_1, k_1')$$

und $|k_2 k_1 \ldots k_N^- \rangle = - |k_1 k_2 \ldots k_N^- \rangle$

und $\langle k_2 k_1' \ldots k_N^- | = - \langle k_1' k_2 \ldots k_N^- |$

$\Rightarrow$ N mal der erste Term

$$\sum_{\nu=1}^{N} \hat{f}_\nu = \frac{1}{(N-1)!} \sum_{k_1 \ldots k_N} \sum_{k_1'} |k_1 \ldots k_N^- \rangle f(k_1, k_1') \times \langle k_1' \ldots k_N^- |$$

$$= \frac{1}{(N-1)!} \sum_{k_1 \ldots k_N} \sum_{k_1'} \hat{a}^+_{k_1} |k_2 \ldots k_N^- \rangle f(k_1, k_1') \times \langle k_2 \ldots k_N^- | \hat{a}_{k_1'}$$

- Nun ist aber

$$\frac{1}{(N-1)!} \sum_{k_2 \ldots k_N} |k_2 \ldots k_N^- \rangle \langle k_2 \ldots k_N^- | = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{im } \mathcal{H}_{N-1}^-}}{\hat{1}}$$

$$= \sum_{k_2 < k_3 < \ldots < k_N} |k_2 \ldots k_N^- \rangle \langle k_2 \ldots k_N^- |$$

$\Rightarrow$ mit $k_1 \to k$, $k_1' \to k'$

$$\sum_\nu \hat{f}_\nu = \sum_{k k'} \hat{a}^+_k f(k, k') \hat{a}_{k'} \qquad (V20)$$

- Interpretation: Fermion im Zustand k' vernichtet und im Zustand k erzeugt mit Gewicht, gegeben durch $f(k, k')$.

Beispiel: Gesamtimpulsoperator

$$\sum_\nu \hat{\vec{p}}_\nu = \sum_{kk'} \hat{a}_k^+ \, \vec{p}(k,k') \, \hat{a}_{k'}$$

$$\vec{p}(k,k') = \langle k | \vec{p} \, k' \rangle$$

z.B. in Orts- Spin- Eigenvektoren

$$\vec{p}(\vec{r}m, \vec{r}'m') = \delta_{mm'} \langle \vec{r} | \hat{\vec{p}} \, \vec{r}' \rangle$$

$$= \delta_{mm'} \int d^3p \, \vec{p} \, \langle \vec{r} | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \vec{r}' \rangle$$

$$= \delta_{mm'} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \, \vec{p} \, e^{i \vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')/\hbar}$$

$$\Rightarrow \sum_\nu \hat{\vec{p}}_\nu = \sum_{mm'} \int d^3r \int d^3r' \, \hat{\psi}_m^+(\vec{r}) \, \frac{\delta_{mm'}}{(2\pi)^3} \times \int d^3p \, e^{i \vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')/\hbar} \, \vec{p} \, \hat{\psi}_{m'}(\vec{r}')$$

$$= \sum_m \int d^3r \int d^3r' \, \hat{\psi}_m^+(\vec{r}) \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}_r \underbrace{\int d^3p \, e^{i \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{\hbar}}}_{(2\pi)^3 \delta(\vec{r} - \vec{r}')} \times \hat{\psi}_m(\vec{r}')$$

$$= \frac{\hbar}{i} \sum_m \int d^3r \, \hat{\psi}_m^+(\vec{r}) \, \vec{\nabla} \, \hat{\psi}_m(\vec{r}) \qquad (V21)$$

Weiteres Beispiel: Summe von Einteilchen-Hamilton-Operatoren

$$\sum_\nu \hat{h}_\nu = \sum_\nu \left(\frac{\hat{\vec{p}}_\nu^{\,2}}{2m} + \hat{V}(\vec{r}_\nu) \right)$$

$$\Rightarrow \sum_\nu \hat{h}_\nu = \sum_{kk'} \hat{a}_k^+ \, \varepsilon(k,k') \, \hat{a}_{k'}$$

wobei $\varepsilon(k,k') = \langle k | \frac{\hat{\vec{p}}^{\,2}}{2m} + \hat{V}(\vec{r}) | k' \rangle$

Falls $|k\rangle$ Eigenvektoren von $\hat{h}$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon(k,k') = \delta_{kk'}\, \varepsilon_k$$

$$\Rightarrow \quad \sum_\nu \hat{h}^\nu = \sum_k \varepsilon_k\, \hat{a}_k^+ \hat{a}_k \qquad (V22)$$

In Orts-Spin-Darstellung

$$\sum_\nu \hat{h}^\nu = \sum_m \int d^3r\, \hat{\Psi}_m^+(\vec{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V(\vec{r})\right) \hat{\Psi}_m(\vec{r}) \qquad (V23)$$

<u>Besetzungszahloperatoren</u>

(V22) zeigt, daß wenn die Einteilchenop. diagonal sind nur

$$\hat{n}_k = \hat{a}_k^+ \hat{a}_k \qquad (V24)$$

in der Summe übrig bleibt.

Auf Seite 154 hatten wir bereits berechnet (mit V10), wie $\hat{a}_k^+ \hat{a}_k$ auf $|k_1 k_2 \ldots k_N^-\rangle$ wirkt. Daher

$$\begin{aligned}
\hat{a}_k^+ \hat{a}_k |k_1 \ldots k_N^-\rangle = \hat{a}_k^+ \Big(& \delta_{kk_1} |k_2 \ldots k_N^-\rangle \\
& - \delta_{kk_2} |k_1 k_3 \ldots k_N^-\rangle \\
& + \delta_{kk_3} |k_1 k_2 k_4 \ldots k_N^-\rangle \\
& - \cdots + \cdots \Big) \\[1em]
= \; & \delta_{kk_1} |k k_2 \ldots k_N^-\rangle \\
& - \delta_{kk_2} |k k_1 k_3 \ldots k_N^-\rangle \\
& + \delta_{kk_3} |k k_1 k_2 k_4 \ldots k_N^-\rangle \\
& - \cdots + \cdots
\end{aligned}$$