



**Observable
Harmonischer Oszillator
Teilchen im Kasten**

Schrödingergleichung

Thema Wellenfunktion

Observable

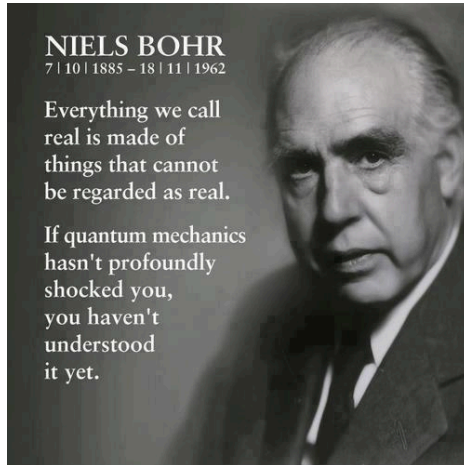


Sprüche, die Mut machen sollen



Richard Feynman
1918-1988
Nobelpreis 1965

I think it is safe to say that no one understands quantum mechanics
Richard Feynman



NIELS BOHR
7 | 10 | 1885 - 18 | 11 | 1962

Everything we call
real is made of
things that cannot
be regarded as real.

If quantum mechanics
hasn't profoundly
shocked you,
you haven't
understood
it yet.

**Anyone who can contemplate quantum mechanics
without getting dizzy hasn't properly understood it**
Niels Bohr

Niels Bohr
1885-1962
Nobelpreis Physik 1922

**While the theory agrees incredibly well with experiment and while
it is profound mathematical beauty it makes absolutely no sense**
Roger Penrose



Roger Penrose
1931-

We cannot make the mystery go away. We will just tell you how it works.

Richard Feynman

Nichtrelativistische Quantenphysik

Postulate

0 Ort und Zeit werden wie in Newtonscher Mechanik behandelt

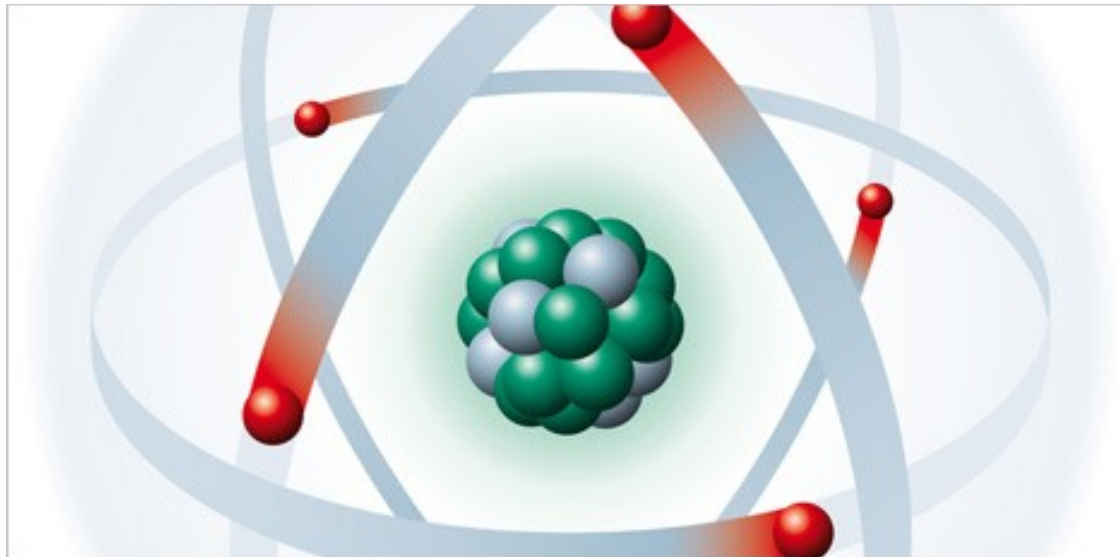
1 Zustand eines Teilchens wird VOLLSTÄNDIG beschrieben durch sogenannte Wellenfunktion
Wahrscheinlichkeit Teilchen zur einem bestimmten Zeitpunkt in einem bestimmtem Raumgebiet zu finden, kann berechnet werden

2 zu jeder Beobachtungsgröße in klassischer Physik existiert ein linearer Operator in der QM

3 die Berechnung von Observablen erfolgt über Eigenwerte einer Eigenwertgleichung

4 der sogenannte Erwartungswert der Wellenfunktion kann berechnet werden

5 die zeitabhängige Schrödingergleichung beschreibt die Zeitentwicklung der Wellenfunktion



Wie beschreibt man quantenmechanisch ein Teilchen?

Wellenfunktion

Symptome

- Lichtdetektoren messen **NICHT** das elektrische Feld einer elektromagnetischen Welle, sondern das **QUADRAT** der Amplitude A einer Welle, also die Intensität $I=A^2$
- statt *klassischem Teilchen* spricht man vom quantenmechanischen Zustand eines Objekts, das beschrieben wird durch eine komplexe Wellenfunktion

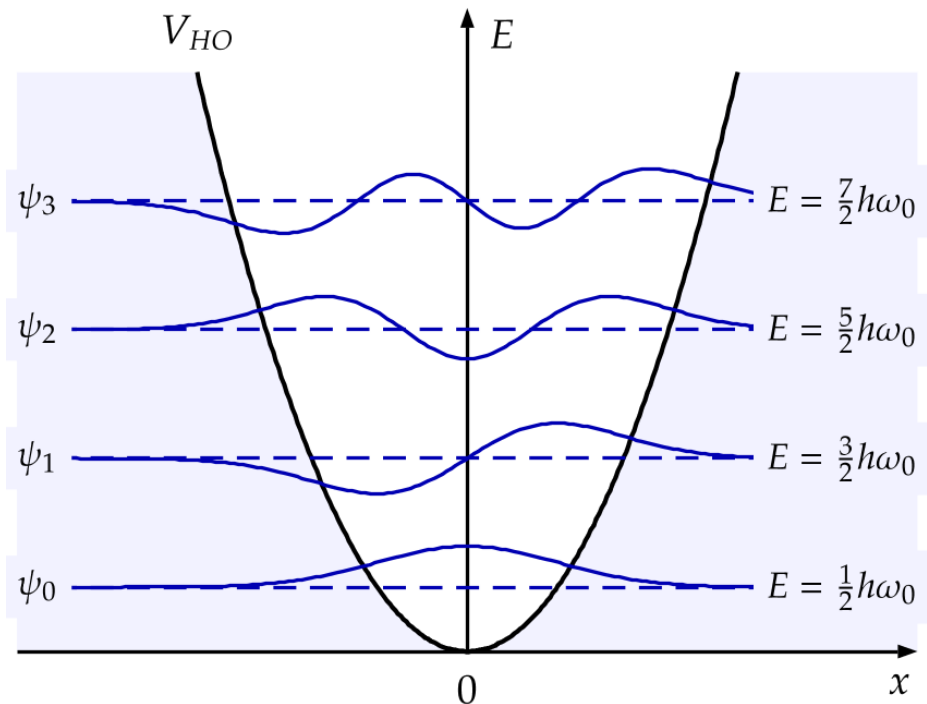
quantenmechanische Wellenfunktion

$$\Psi_{particle}$$

beschreibt Verhalten eines Teilchens



Wellenfunktionen für quantenmechanisches Modellsystem HARMONISCHER OSZILLATOR



Diagnose

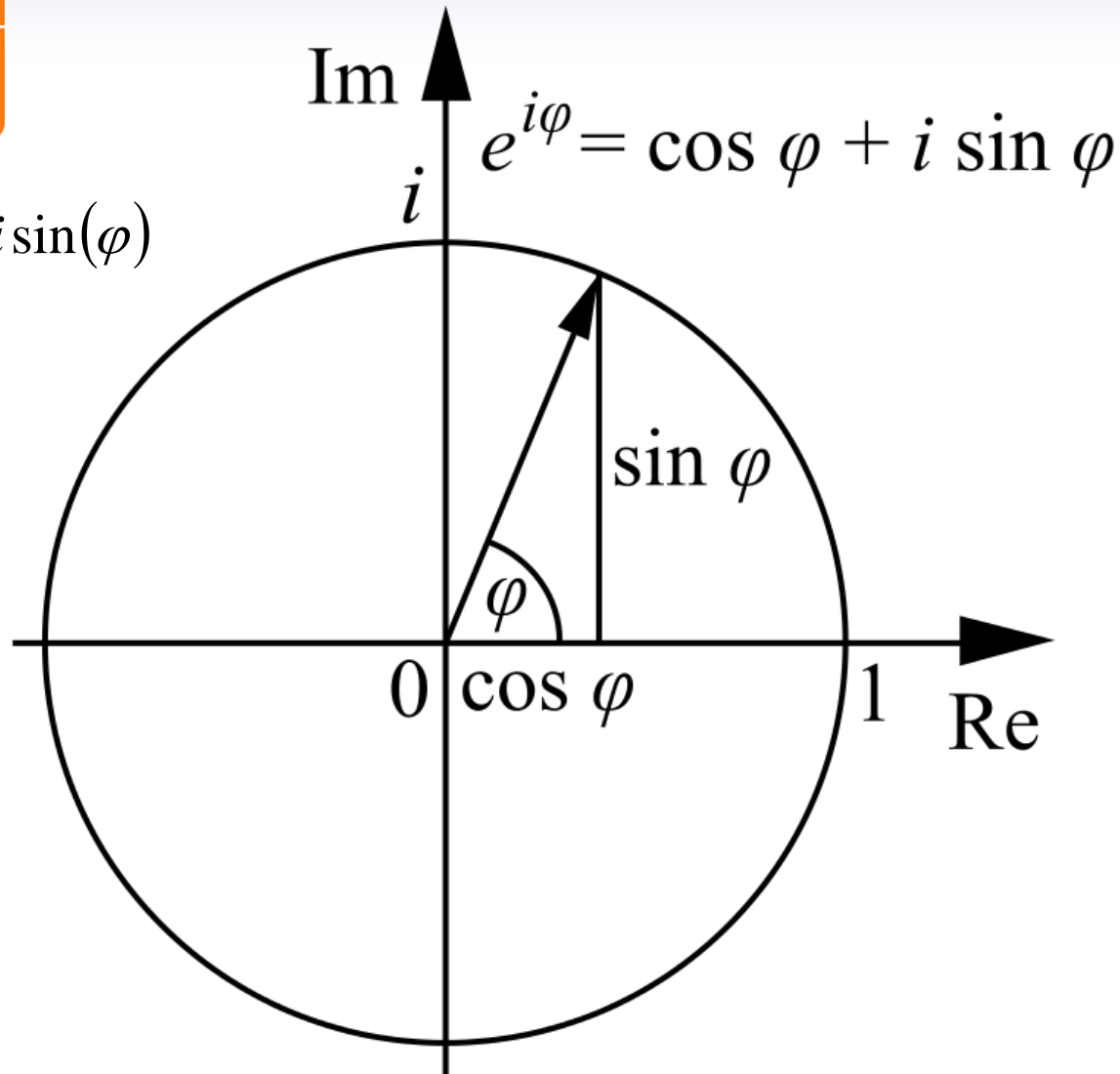
Experimentell kann die Wellenfunktion eines Teilchens **NICHT** beobachtet werden

komplexe Ebene Eulersche Formel

Wissenschaftsjahr 2008

Mathematik
Alles, was zählt

Eulersche Formel
 $\exp(i\varphi) = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$
 $\varphi = x + iy$





Wo findet man ein Teilchen? Observable

one
DIMENSIONAL

Wellenfunktionen sind in der Regel komplexe Funktionen

$$\Psi_{particle}(x, t) = A_{\lambda} \exp(i(k_{\lambda}x - \omega_{\lambda}t))$$

$$|\Psi_{particle}(x, t)|^2 = \Psi^*(x, t)\Psi_{particle}(x, t)$$

Quadrat der Wellenfunktion ist messbare physikalische Größe

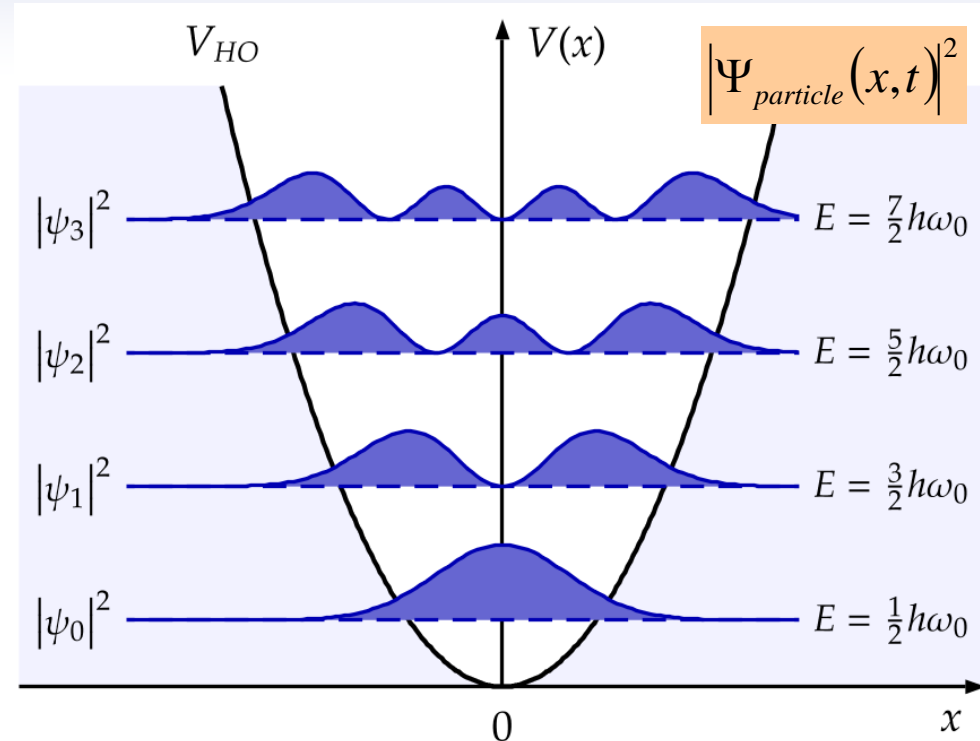
Wahrscheinlichkeitsdichte

vollständige Information über den Ausgang einer Meßreihe

Wahrscheinlichkeit ein Teilchen
in einem bestimmten Raumgebiet aufzufinden

$$P_{particle} d\vec{r} = |\Psi_{particle}|^2 d\vec{r}$$

real experimentell beobachtbare physikalische Größe



Normalisierung hier eindimensional

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} |\Psi_{particle}(x, t)|^2 dx = 1$$

Teilchen muß irgendwo im Universum sein

Diagnose

Quadrat der Wellenfunktion ist Maß für den Aufenthaltsort eines Teilchens

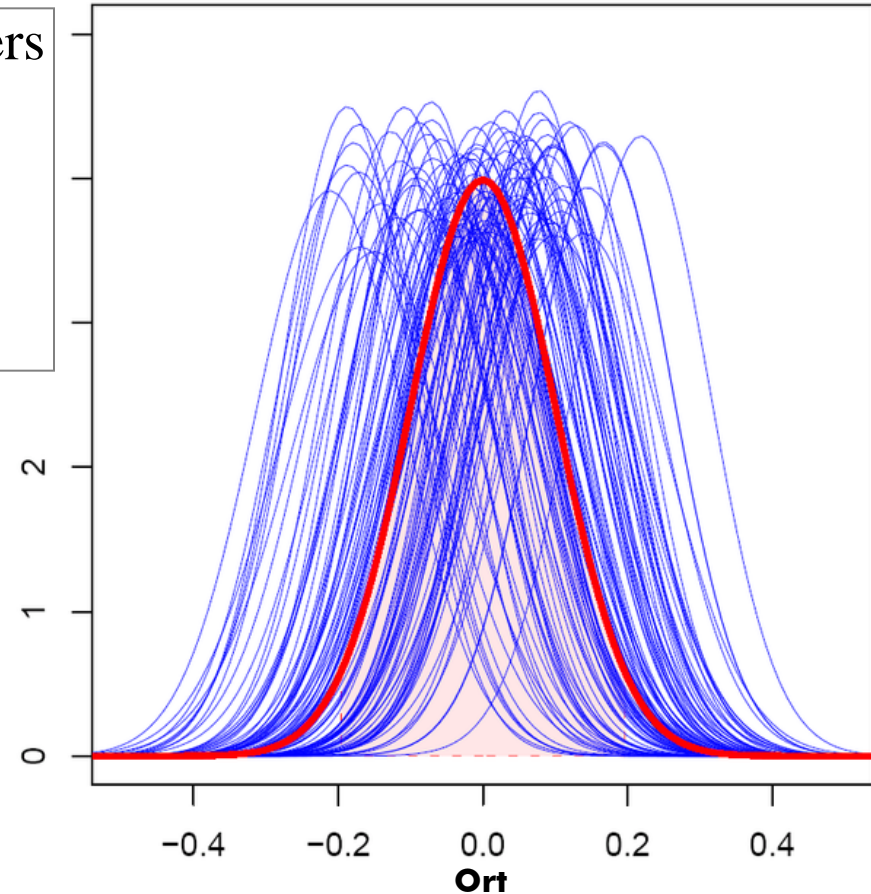
Wo findet man ein Teilchen? Erwartungswert

Erwartungswert eines messbaren Parameters

weniger reicht manchmal auch
quantenphysikalischer Erwartungswert einer physikalischen Messgröße

$$\langle Q_{phys} \rangle = \int_{x=-\infty}^{\infty} \Psi_{particle}^*(x,t) Q_{phys} \Psi_{particle}(x,t) dx$$

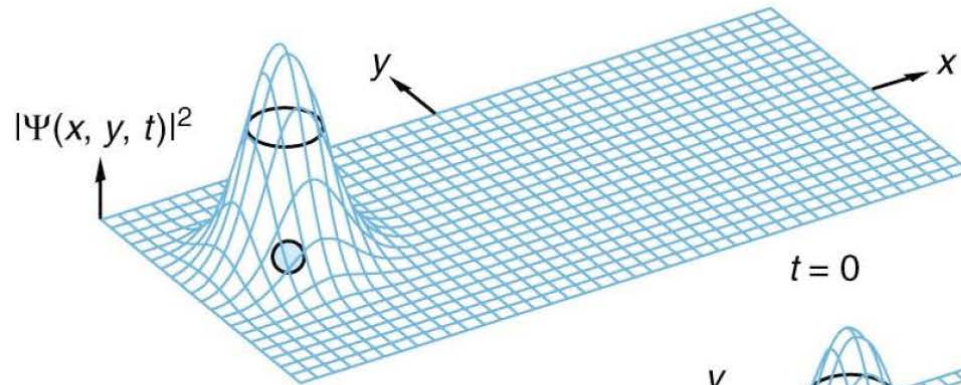
wahrscheinlichster Messwert für Ort, Impuls, Energie oder Drehimpuls



Diagnose

- Erwartungswert gibt an, was physikalisch mit Quantensystem wahrscheinlich passiert
- Interpretation 1: Mittelwert großer Anzahl experimenteller Messungen an EINEM Teilchen
- Interpretation 2: Messergebnis bei VIELEN Teilchen, beschrieben mit derselben Wellenfunktion

Wahrscheinlich ist es hier oder hier

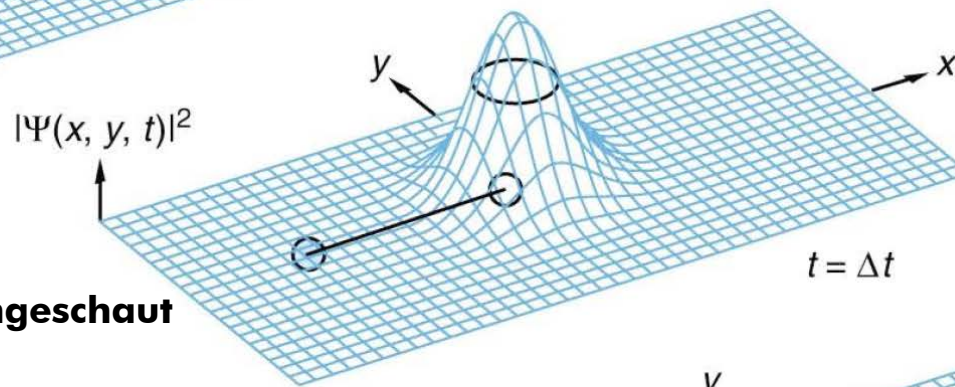


Wavepacket for moving electron



Bälle auf Tisch

später hingeschaut

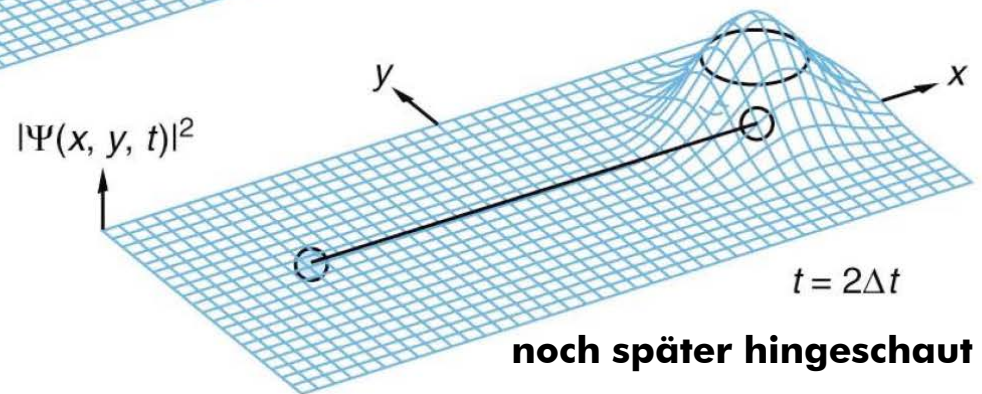


$t = \Delta t$

Ausbreitung Elektron - Wellenpaket

$$|\Psi_{electron}|^2 d\vec{r}$$

Wahrscheinlichkeitsdichte



$t = 2\Delta t$

noch später hingeschaut

Diagnose

- genauer Ort des Elektrons wird mit der Zeit immer unbestimmter
- man nennt dieses Phänomen das Zerfließen des Wellenpakets



Erinnerung an Vorlesung Theoretische Mechanik

Hamilton-Formalismus

Herbert Goldstein

Klassische
Mechanik

10., korrigierte Auflage

AULA-Verlag Wiesbaden

Symptome

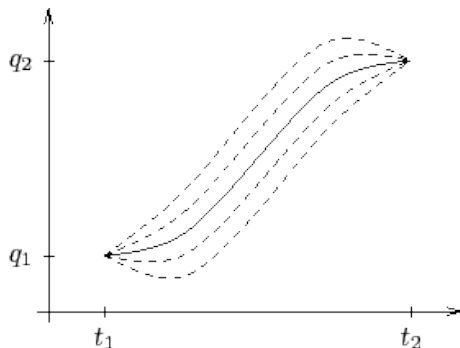
- Hamiltonoperator beschreibt Bewegung von Teilchen im Orts-Impuls Phasenraum
- Welche Werte können Ort und Impuls in einem dynamischen System annehmen?
- Hamilton-Funktion beschreibt über hamiltonsche Bewegungsgleichungen, wie sich Ort und Impuls der Teilchen (ohne Reibung) zeitlich entwickeln

Hamiltonische Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} q_k = \frac{\partial}{\partial p_k} H$$

$$\frac{d}{dt} p_k = \frac{\partial}{\partial q_k} H$$

für alle Teilchen $k=1,2,\dots,n$



example

Hamiltonfunktion freies relativistisches Teilchen

$$H(\vec{q}, \vec{p}) = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2}$$

Hamiltonische Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} q_k = \frac{\partial}{\partial p_k} H = \frac{p_k c^2}{\sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2}}$$

Positionen der Teilchen ändern sich mit der Zeit (Dynamik)
Impulse der Teilchen ändern sich NICHT mit der Zeit (Energieerhaltung)

$$\frac{d}{dt} p_k = \frac{\partial}{\partial q_k} H = 0$$

für alle Teilchen $k=1,2,\dots,n$

Wissenschaftsjahr 2021

Mathematik
Alles, was zählt!

Kettenregel

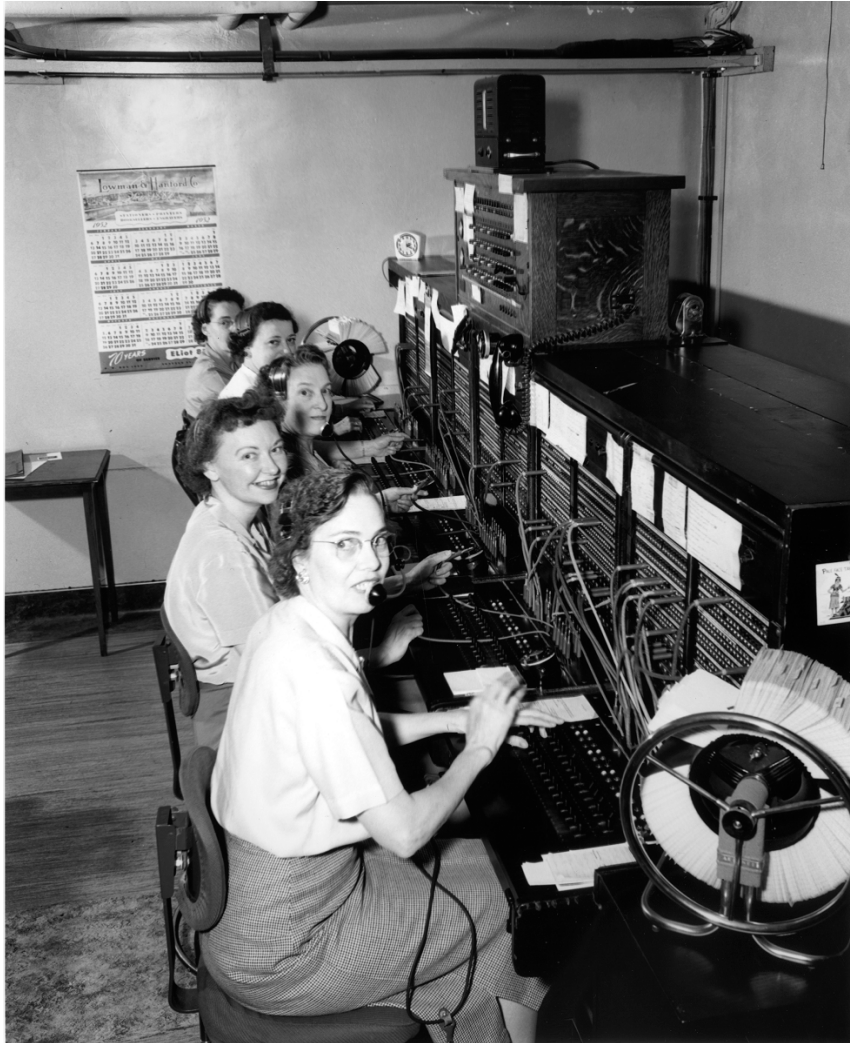
$$f(x) = \sqrt{\alpha \cdot x}$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{\alpha}{2\sqrt{x}}$$

Diagnose

- wenn Hamiltonfunktion nicht explizit von der Zeit abhängt, bleibt Anfangsenergie ERHALTEN
- Hamiltonoperator beschreibt Zeitentwicklung auch in der Quantenmechanik

quantenmechanisch betrachtet Hamilton-Operator



Quantenmechanik Hamiltonoperatoren

$$p_{op} := -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$U_{op} := U_{pot}(x, t)$$

$$E_{op} := i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

$$i^2 = -1$$

example

Operator p_{op} wirkt auf $f(x) = \exp(ix)$ Funktion

$$p_{op} \exp(ix) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \exp(ix)$$

$$p_{op} \exp(ix) = -i^2 \hbar \exp(ix)$$

$$p_{op} \exp(ix) = \hbar \exp(ix)$$

Schrödingergleichung



Energieerhaltung

$$E_{gesamt}(x,t) = E_{kin}(x,t) + E_{pot}(x,t)$$

$$E_{gesamt}(x,t) = \frac{p^2}{2m} + U_{pot}(x,t)$$



$$\frac{p_{op}^2}{2m} \Psi_{QM}(x,t) + U_{pot} \Psi_{QM}(x,t) = E_{op} \Psi_{QM}(x,t)$$

Wende Operatorkonzept auf Energiegleichung an

$$\frac{1}{2m} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi_{QM}(x,t) + U_{pot} \Psi_{QM}(x,t) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_{QM}(x,t)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi_{QM}(x,t) + U_{pot} \Psi_{QM}(x,t) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_{QM}(x,t)$$

Wird sich die Position des Teilchens im Raum ändern?

Verändert sich das Teilchen?

zeitabhängige Schrödingergleichung

Diagnose

Schrödingergleichung ist Herzstück der Quantenphysik unter nicht-relativistische Bedingungen



quantenmechanisch betrachtet

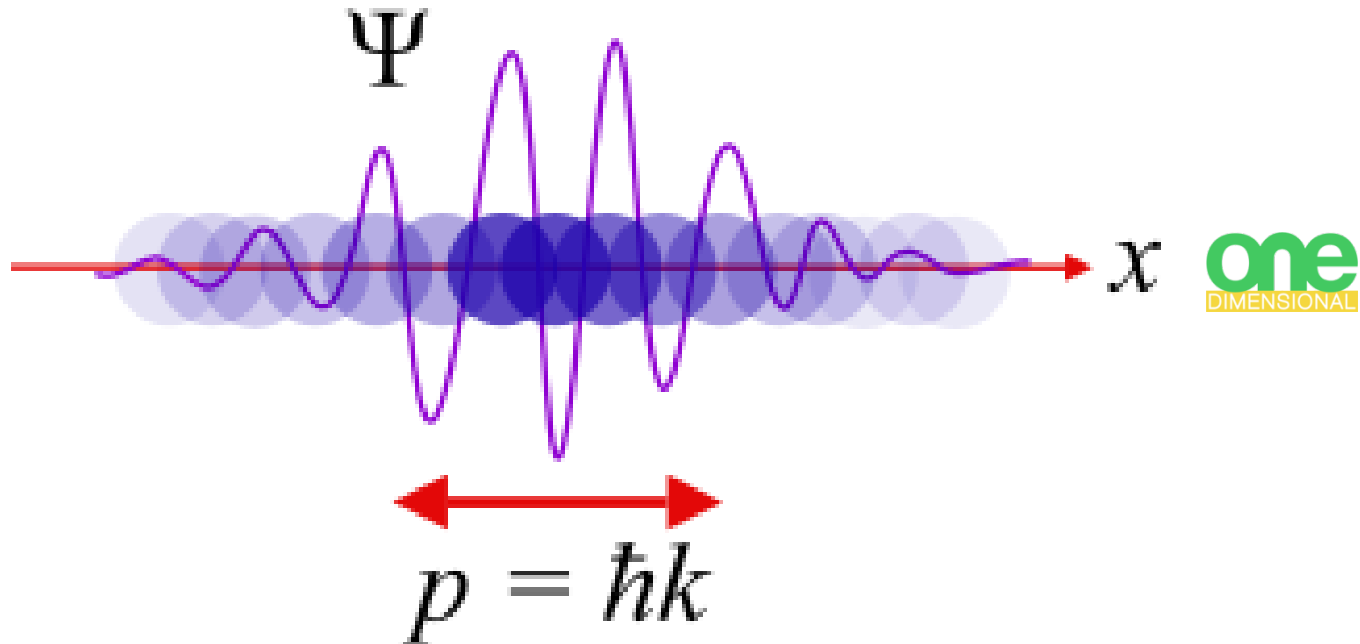
Freies Teilchen

freies Teilchen fühlt kein Potenzial und kann sich damit frei im Raum bewegen

$$U_{pot} = NULL$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi_{QM}(x,t) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_{QM}(x,t)$$

zeitabhängige Schrödingergleichung für freies Teilchen



one
DIMENSIONAL

Lösungsansatz für freies Teilchen

$$\Psi_{particle}(x,t) = A_{\lambda} \exp(i(k_{\lambda}x - \omega_{\lambda}t))$$



quantenmechanisch betrachtet

Freies Teilchen

one
DIMENSIONAL

Lösungsansatz für freies Teilchen

$$\Psi_{particle}(x,t) = A_{\lambda} \exp(i(k_{\lambda}x - \omega_{\lambda}t))$$

Wissenschaftsjahr 2008

Mathematik
Alles, was zählt

$f(x) = \exp(\alpha x)$ ist Lösung für partielle DGl 2. Ordnung

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \exp(\alpha x) = \alpha^2 \exp(\alpha x)$$

einsetzen in Schrödingergleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (A_{\lambda} \exp[i(k_{\lambda}x - \omega_{\lambda}t)]) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (A_{\lambda} \exp[i(k_{\lambda}x - \omega_{\lambda}t)])$$

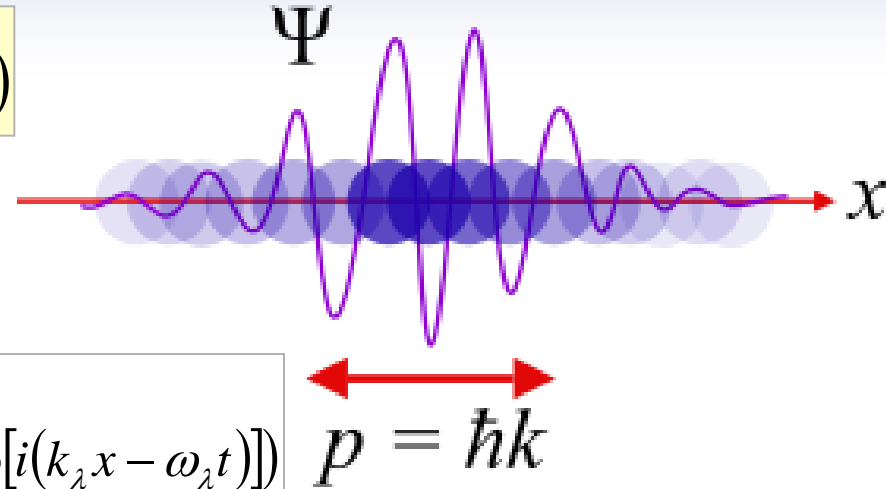
$$-\frac{\hbar^2}{2m} (-k^2 A_{\lambda} \exp[i(k_{\lambda}x - \omega_{\lambda}t)]) = \hbar \omega A_{\lambda} \exp[i(k_{\lambda}x - \omega_{\lambda}t)]$$

$$\frac{\hbar^2 k_{\lambda}^2}{2m} \Psi_{particle}(x,t) = \hbar \omega_{\lambda} \Psi_{particle}(x,t)$$

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k_{\lambda}^2}{2m} = \hbar \omega_{\lambda} = E_{\lambda}$$

Koeffizientenvergleich

linke Seite rechte Seite Planck



Diagnose

- Teilchen kann jede beliebige Energie einnehmen
- es gibt ein Kontinuum von möglichen Energiezuständen

Wenn ZEITUNABHÄNGIG, dann muss gelten Energieerhaltung

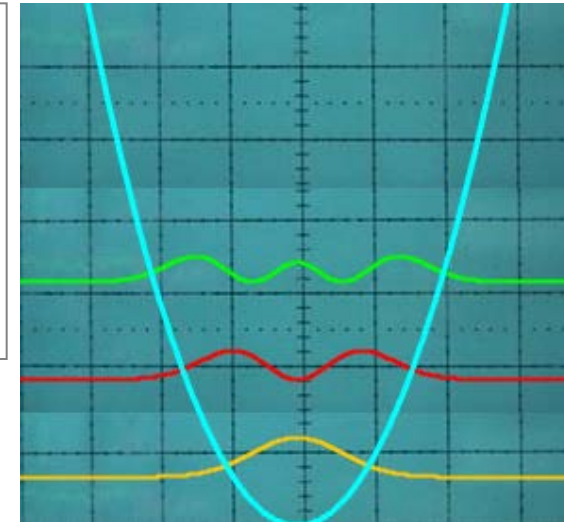
wähle Produktansatz für Wellenfunktion

$$\Psi_{particle}(x, t) = \psi_{particle}(x) \cdot f_{particle}(t)$$

Ansatz einsetzen in zeitabhängige Schrödingergleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) + \cancel{U_{pot} \Psi(x, t)} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} f_{particle}(t) \frac{d^2}{dx^2} \psi_{particle}(x) = i\hbar \psi_{particle}(x) \frac{d}{dt} f_{particle}(t)$$



sortieren nach Orts - und Zeitabhängigkeit

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi_{particle}(x)} \frac{d^2}{dx^2} \psi_{particle}(x) = \frac{i\hbar}{f_{particle}(t)} \frac{d}{dt} f_{particle}(t)$$

linke Seite hängt nur vom Ort ab rechte Seite hängt nur von der Zeit ab

Diagnose

- beide Seiten der Gleichung ergeben ein und denselben Wert
- die so gefundene physikalische Größe MUSS deshalb eine Konstante sein
- interessant ist, das diese physikalische Größe weder vom Ort, noch von der Zeit abhängt
- es MUSS sich bei dieser Größe um eine physikalische Erhaltungsgröße handeln

Schrödingergleichung Zeitabhängigkeit

$$-i = 1/i$$

betrachte zeitabhängige Gleichung

$$\frac{i\hbar}{f_{particle}(t)} \frac{d}{dt} f_{particle}(t) = \varepsilon_t^{const} \stackrel{\text{sortieren}}{\Leftrightarrow} \frac{d}{dt} f_{particle}(t) = -\frac{i\varepsilon_t^{const}}{\hbar} f_{particle}(t)$$

$$f_{particle}(t) = \exp\left(-\frac{i\varepsilon_t^{const} t}{\hbar}\right)$$

geratene Lösungsfunktion für diese Gleichung

aus diesen Gründen sieht der Lösungsansatz so aus

$$f_{particle}(t) = \exp\left(-\frac{iE_{particle} t}{\hbar}\right)$$

Term im Exponenten hat Einheit 1/s
Dimension Frequenz



$$\frac{\varepsilon_t^{const}}{\hbar} = \omega \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_t^{const} = \hbar\omega = E_{particle}$$

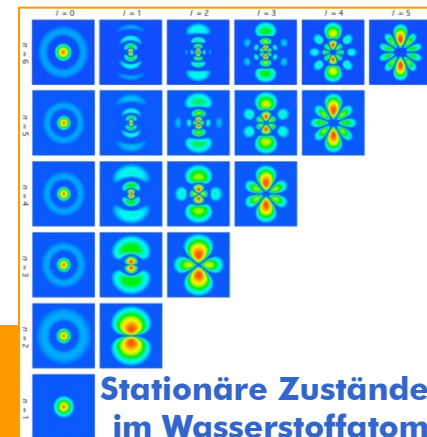
Einheit von ε_t^{const} hat Dimension Energie

zeitunabhängige Schrödingergleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi_{particle}(x)} \frac{d^2}{dx^2} \psi_{particle}(x) = E_{particle} \psi_{particle}(x)$$

Diagnose

- Argument in Exponentialfunktion ε/\hbar muss Einheit Frequenz haben
- Konstante in Exponentialfunktion hat damit die Einheit Energie
- Auswertung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung ergibt stationäre Zustände



Far beyond: Quantenfeldtheorie

Klein-Gordon Gleichung

relativistische Energie-Impuls Beziehung

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

Energieoperator

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

Impulsoperator

$$p \rightarrow i\hbar \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Klein-Gordon Gleichung

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \Psi(x, t) = 0$$

Diagnose

- Gleichung beschreibt relativistischen Zusammenhang zwischen Energie und Impuls
- nur Teilchen mit Spin 0 wie das Pion oder das Higgs-Teilchen werden richtig beschrieben

Thema Wellenfunktion

Potenzialtopf





Quantenmechanisch betrachtet Harmonischer Oszillator

Symptome

- in klassischer Physik ist minimal möglicher Energiezustand **NULL**
- berechne E_{\min} in QM durch Auswertung der Ableitung dE/dx

Potenzial harmonischer Oszillator

$$U_{SHM} = \frac{1}{2} k_H x^2$$

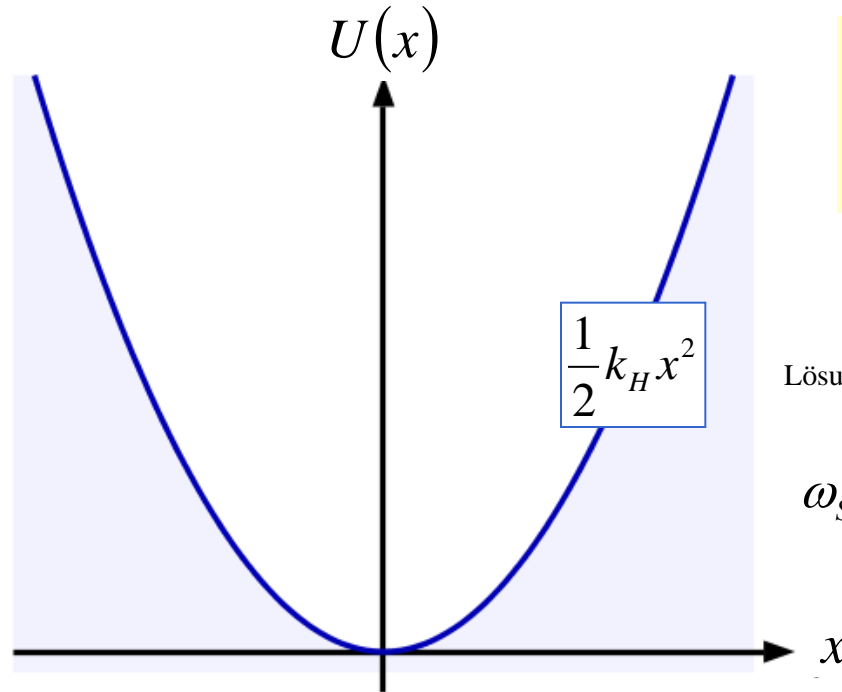
Änderung des Potenzials
bewirkt eine Kraft

$$F(x) = -\frac{d}{dx} U(x)$$

eindimensional

Hooksches Gesetz

$$F_H = -k_H x$$



Newtonsche Bewegungsgleichung

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) = -k_H x(t)$$

Lösung für Bewegungsgleichung für Feder
Hooksches Gesetz

$$\omega_{SHM} = 2\pi f_{SHM} = \sqrt{\frac{k_H}{m}}$$

simple harmonic motion

Bewegung in harmonischem Potenzial

$$E_{ges} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k_H x^2$$

Energieerhaltung

Achterbahn
Feder





Quantenmechanisch betrachtet Harmonischer Oszillator

Symptome

Berechne Impuls aus Unschärferelation

Heisenbergsche Unschärferelation

$$\Delta p_x \Delta x \geq \hbar / 2$$

Impuls

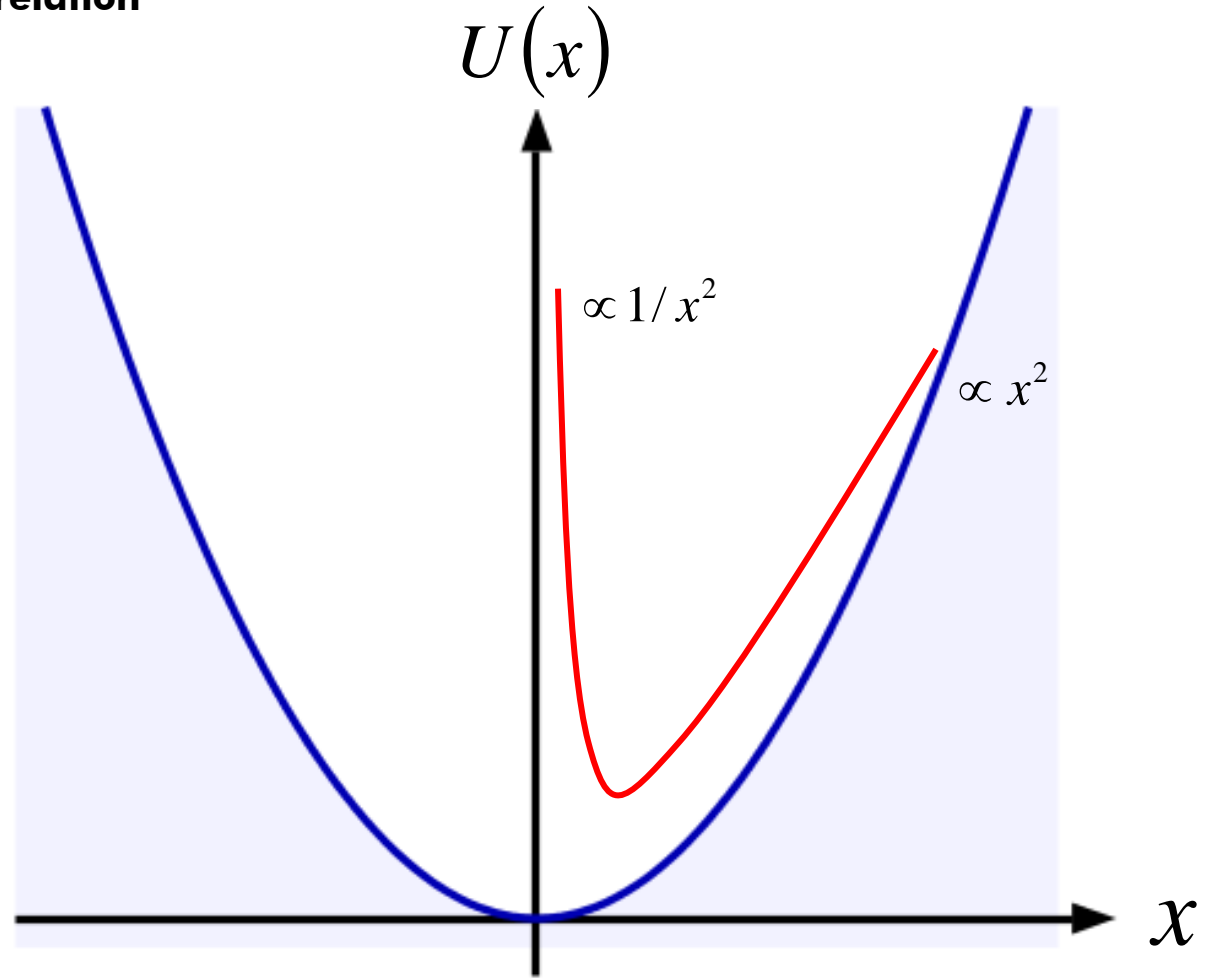
$$p \approx \frac{\hbar}{2x}$$

Abschätzung für tatsächlichen Wert

Energie im harmonischem Potenzial

$$E(x) = \frac{\hbar^2}{8m} \frac{1}{x^2} + \frac{k_H}{2} x^2$$

quantenphysikalisch



Diagnose

Unschärferelation verhindert, dass Teilchen im Gegensatz zu Newton in der Mulde liegen bleibt

Harmonischer Oszillator

Nullpunktenergie

Energie im harmonischem Potenzial

$$E(x) = \frac{\hbar^2}{8m} \frac{1}{x^2} + \frac{k_H}{2} x^2$$

Quantenphysik

Ableitung Energie nach Ort

$$\frac{d}{dx} E(x) = -2 \frac{\hbar^2}{8m} \frac{1}{x^3} + k_H x = 0$$

Energieminimum

$$x_{\min}^4 = \frac{\hbar^2}{4mk_H} \Leftrightarrow x_{\min}^2 = \frac{\hbar}{2\sqrt{mk_H}}$$

Energieminimum ausrechnen

$$E_{\min}(x) = \frac{\hbar^2}{8m} \frac{2\sqrt{mk_H}}{\hbar} + \frac{k_H}{2} \frac{\hbar}{2\sqrt{mk_H}}$$

Quantenphysik

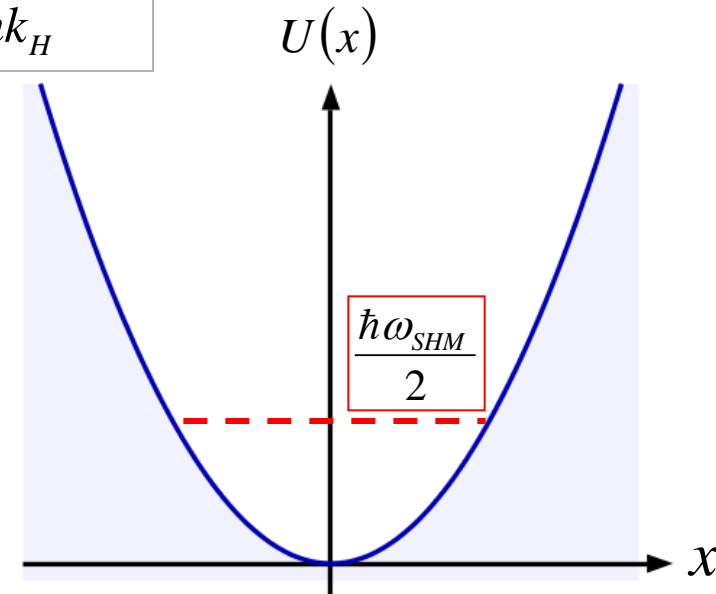
$$E_{\min}(x) = \frac{\hbar}{4} \sqrt{\frac{k_H}{m}} + \frac{\hbar}{4} \sqrt{\frac{k_H}{m}} = \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{k_H}{m}}$$

$$E_{\min}(x) = \frac{\hbar\omega_{SHM}}{2}$$

Newton

$$\omega_{SHM} = \sqrt{\frac{k_H}{m}}$$

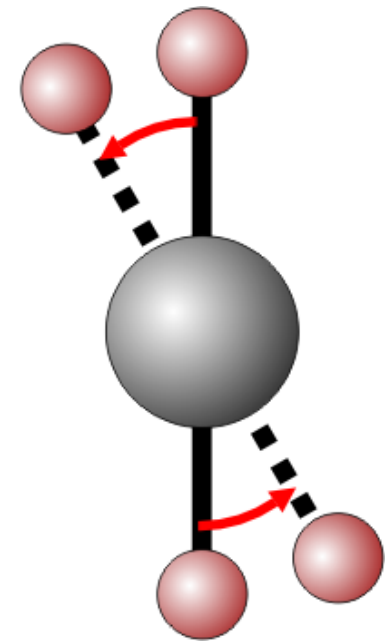
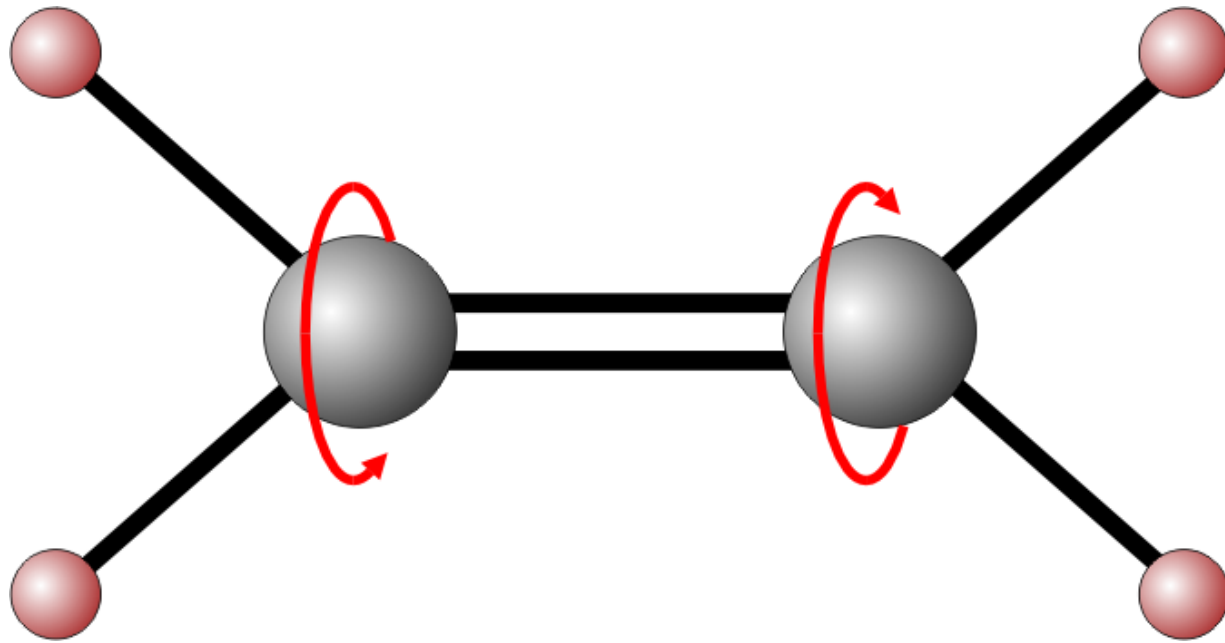
simple harmonic motion



Diagnose

- **Energieminimum im Potenzial eines harmonischen Oszillators**
- **wichtige Größe in vielen Bereichen der Physik: Moleküle, Kerne, Plasmen, ...**
- **sogenannte NULLPUNKTENERGIE verhindert, dass GESAMTE Energie aus System abfließt**
- **Nullpunktenergie und dritter Hauptsatz: Der absolute Nullpunkt NICHT erreichbar**

Harmonischer Oszillator Molekülphysik



Diagnose

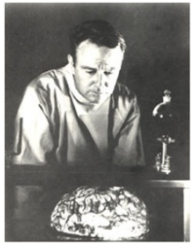
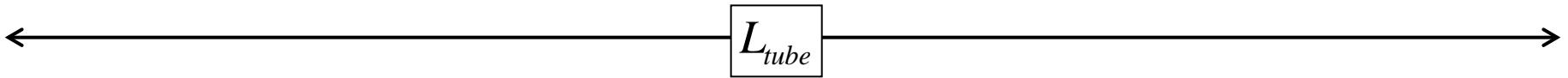
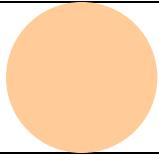
Torsionsschwingung Ethen wird quantenmechanisch mit harmonischem Oszillator beschrieben

Klassische Mechanik

particle in a box

Symptome

Ball bewegt sich reibungsfrei in Zylinder der Länge L_{tube}



Luftkissenbahn

Diagnostik

- Ball prallt von Wänden elastisch ab
- keine Impuls- und Energieverluste
- Geschwindigkeit des Balls bleibt deshalb unverändert
- damit ergeben sich **KLASSISCHE Zustände des Systems**
- jeder Zustand kann durch Impuls und Energie charakterisiert werden
- Teilchen kann jeden beliebigen Impuls und jede beliebige kinetische Energie annehmen
- Impuls und Energie des Balls können in beliebig kleinen Schritten verändert werden

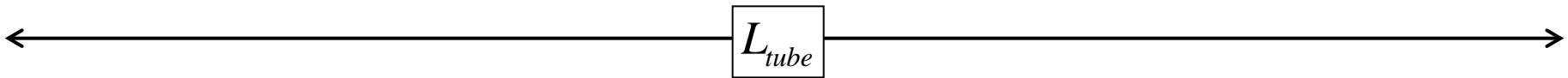
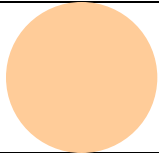


Quantenmechanik *particle in a box*



Symptome

In der Quantenmechanik wird Ball durch eine Materiewelle repräsentiert



deBroglie Wellenlänge im Grundzustand

$$\lambda_{ball} = 2L_{tube}$$



Impuls im Grundzustand

$$p_{ball} = \frac{h}{\lambda_{ball}} = \frac{h}{2L_{tube}}$$

Energie des Grundzustandes

$$E_{ball} = \frac{p_{ball}^2}{2m_{ball}} = \frac{h^2}{2m_{ball}\lambda_{ball}^2}$$

Diagnostik

- KEINE Auslöschung bei Reflektion, wenn stehende Welle
- links- und rechtslaufende Welle überlagern sich durch Superposition
- größte Wellenlänge (niedrigste Energie), die in Container passt, hat Wellenlänge ($2 \times L_{tube}$)
- man nennt diesen Zustand den GRUNDZUSTAND des Systems

quantum particle in a box

Stehende Welle

Symptome

Stehende Wellen können sich in Container auch bei höheren Harmonischen ausbilden

Bedingung für stehende Welle in Container

$$n_{\text{node}} \frac{\lambda_{\text{ball}}}{2} = L_{\text{tube}}$$

$$\lambda_{\text{ball}} = \frac{2L_{\text{tube}}}{n_{\text{node}}}$$

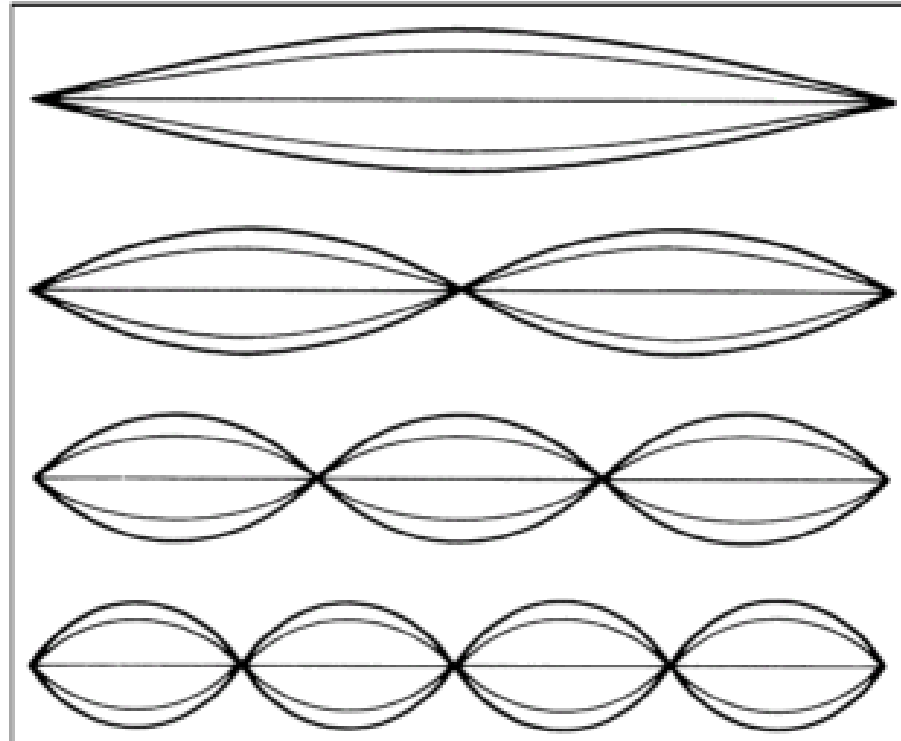
Grundzustand
niedrigste Energie des quantenmechanischen Systems

$$E_{\text{ball}} = \frac{h^2}{2m_{\text{ball}}\lambda_{\text{ball}}^2}$$

$$E_{\text{ball}} = n_{\text{node}}^2 \frac{p_{\text{ball}}^2}{2m_{\text{ball}}}$$

$$E_n = n_{\text{node}}^2 E_{\text{ball}}$$

angeregte Zustände



$$\lambda_{\text{node}}^{n=1} = \frac{2}{1} L_{\text{tube}}$$

$$\lambda_{\text{node}}^{n=2} = \frac{2}{2} L_{\text{tube}}$$

$$\lambda_{\text{node}}^{n=3} = \frac{2}{3} L_{\text{tube}}$$

$$\lambda_{\text{node}}^{n=4} = \frac{2}{4} L_{\text{tube}}$$

stehende Wellen DAS EXPERIMENT



Diagnose

Energiezustände in quantenmechanischem System sind DISKRET aufgrund Welleneigenschaften

Vorstoß in verbotene Bereiche

Einsekunden - Pendel

Periode $T_{1s} = 1 \text{ s}$

Frequenz $\nu_{1s} = 1 \text{ Hz}$



Einsekunden - Pendel
Energiequant $E_{QM} = h = 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ J}$



Einsekunden - Pendel

Masse 1 kg mit Amplitude 0.1 m

Potenzielle Energie $E_{pot} = m_{pendel} gh = 1.0 \text{ J}$

$$n_{Avo} E_{QM} \ll E_{pot}$$

selbst auf 1 Mol hochgerechnet bleibt Quantenbetrag nicht messbar



Einsekunden-Pendel
Hemmpendel

Diagnose

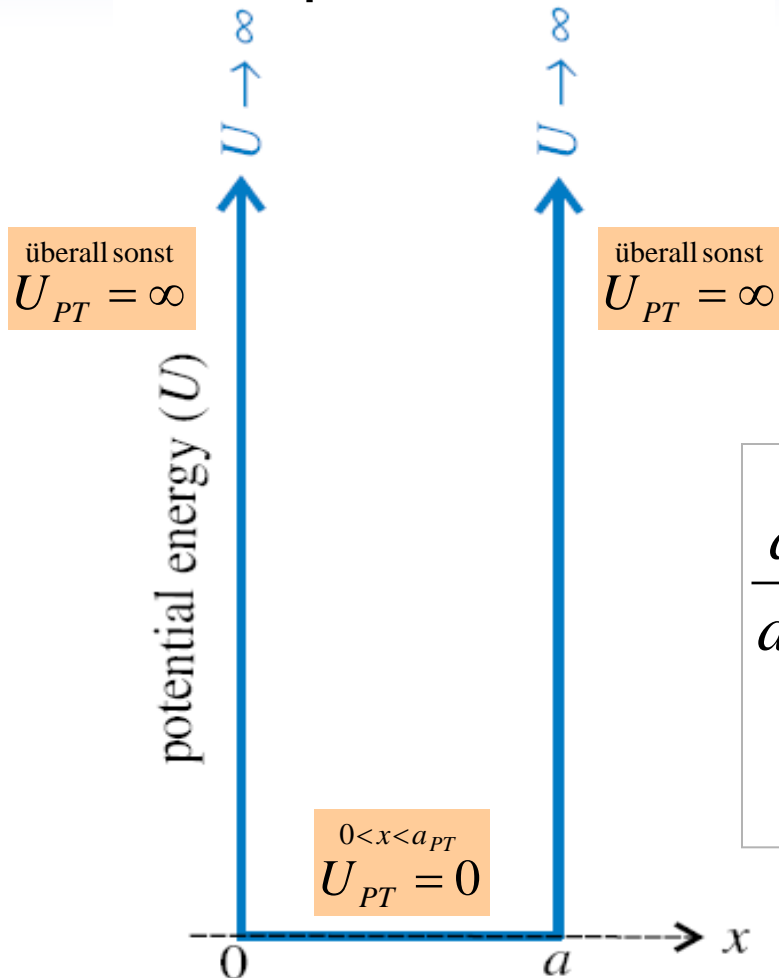
- klassisch schwingt Pendel NIE mit höherer Amplitude als durch Energieerhaltung vorgegeben
- Analyse zeigt, dass Quanteneffekte im Alltag vernachlässigbar sind

quantenmechanische Spezialfälle

Potenzialtopf

Symptome

Teilchen ist in Topf mit unendlich hohen Wänden gefangen und kann nicht heraus gelangen



Energie vs Impuls

$$E_{\lambda} = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k_{\lambda}^2}{2m}$$

zeitunabhängige Schrödingergleichung

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi_{particle}(x) + \frac{2mE_{particle}}{\hbar^2} \psi_{particle}(x) = 0$$
$$\frac{d^2}{dx^2} \psi_{particle}(x) + k_{\lambda}^2 \psi_{particle}(x) = 0$$

Diagnose

Teilchen befindet sich IM Topf und Wert der Wellenfunktion ist NULL außerhalb Potenzialtopf

quantenmechanische Spezialfälle

Potenzialtopf

$$E_\lambda = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k_\lambda^2}{2m}$$

an den Wänden des Potenzialtopfes müssen sich Knoten der Wellenfunktion befinden (stehende Sinuswelle)

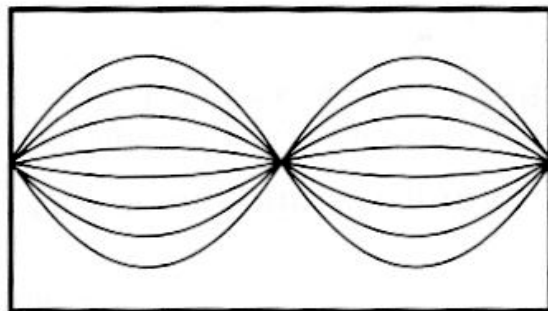
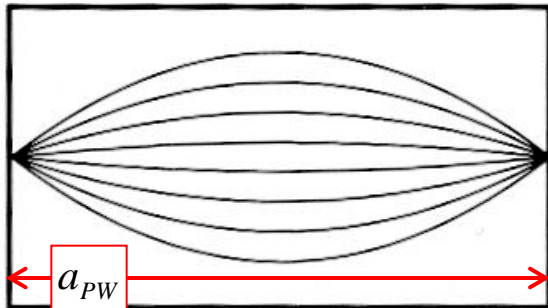
$$\psi_{particle}(x) = A_{QM} \sin k_\lambda x$$

$$\psi_{particle}(x) = A_{QM} \sin \frac{\pi x}{a_{PW}} n_{node} \quad \text{mit} \quad n_{node} = 1, 2, 3, \dots$$

Wellenfunktion am Rand ist NULL
Vielfache von π sind Lösungen

$$\sin(k_\lambda x) = 0 \Rightarrow \frac{\pi n_{node}}{a_{PW}} x = 0$$

$$k_\lambda = \frac{\pi}{a_{PW}} n_{node}$$



Ergebnis ohne Rechnung

mögliche Energiewerte für Teilchen im unendlich hohen Potenzialtopf

$$E_n = \frac{p_{particle}^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k_\lambda^2}{2m}$$

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m a_{PT}^2} n_{node}^2 \quad \text{mit} \quad n_{node} = 1, 2, 3, \dots$$

stehende Welle
höhere Harmonische



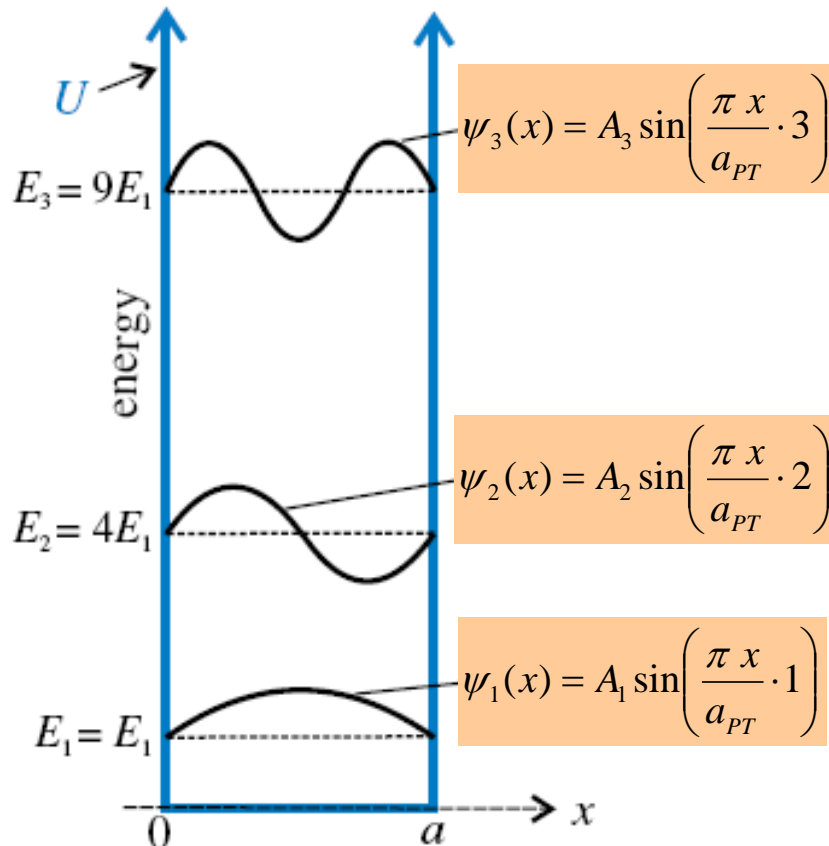
Diagnose

- Lösungen sind stehende Wellen
- Lösung $n=0$ ist nicht enthalten, da Wellenfunktion NULL (Bedeutung KEIN Teilchen vorhanden)

quantenmechanische Spezialfälle

Potenzialtopf

Wellenfunktionen im unendlich hohen Potenzialtopf



mögliche Energiewerte

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n_{node}^2$$

$$E_n = \frac{h^2}{8ma^2} n_{node}^2$$

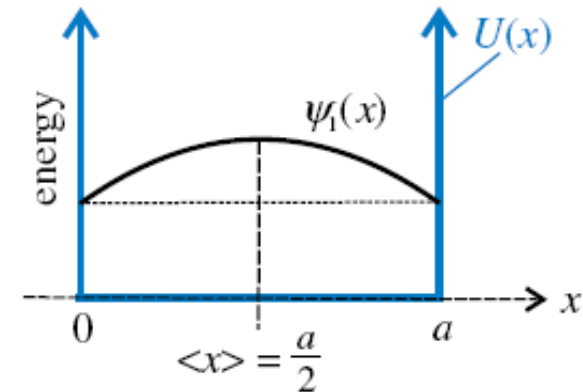
mit $n_{node} = 1, 2, 3, \dots$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

Grundzustand des Systems

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

Zustand geringster Energie



Grundzustandsenergie

Diagnose

- Randbedingung (Knoten der Wellenfunktion) führt zu Quantisierung der Energieniveaus
- im Gegensatz zur klassischen Physik sind nicht mehr alle Energiezustände möglich
- niedrigster Zustand hat Energiewert ungleich NULL (Unschärferelation: Δp ist ungleich NULL)
- Abstand der Energiezustände wächst mit n^2

Potenzialtopf

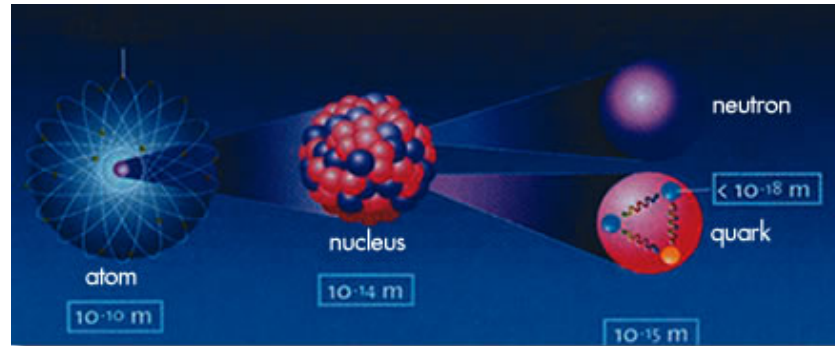
Elektron vs Nukleon

Symptome

Elektronen und Nukleonen haben aufgrund unterschiedlicher Masse unterschiedliche Energiezustände in einem Potenzialtopf

Energiezustände von Elektronen in einem Potenzialtopf

$$E_n^{electron} = 3.77 \cdot 10^{-19} \left(\frac{n^2}{a_{PW}^2} \right) [\text{eV}]$$



Energiezustände von Nucleonen in einem Potenzialtopf

$$E_n^{nucleon} = 2.06 \cdot 10^{-22} \left(\frac{n^2}{a_{PW}^2} \right) [\text{eV}]$$

Diagnose

- Voraussetzung ist, dass eindimensionaler Potenzialtopf die Situation annähernd beschreibt
- dann kann das System durch einen unendlich hohen Potenzialtopf beschrieben werden



Nukleonen im Potenzialtopf

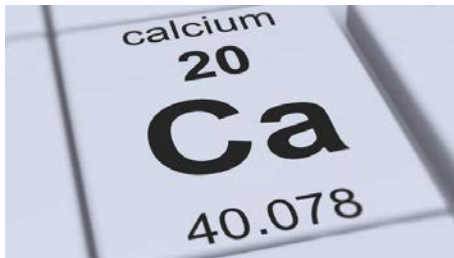
Symptome

Nutze Kenntnisse über Größe des Kerns, um Energiezustände in Ca-40 zu bestimmen

$$R_{\text{Kern}} = \frac{r_0}{1.2 \cdot 10^{15} \text{ m}} A^{1/3}$$

Kernradius Ordnungszahl

$$R_{\text{Ca-40}} = 1.2 \cdot 10^{15} \text{ m} \cdot 40^{1/3} = 4.1 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$



Energiezustände in ^{40}Ca

$$E_n^{\text{Ca-40}} = 2.06 \cdot 10^{-22} \left(\frac{n^2}{(8.2 \cdot 10^{15})^2} \right) [\text{eV}]$$

$$E_1^{\text{Ca-40}} = 3.06 \cdot 10^6 \text{ eV} = 3.06 \text{ MeV}$$

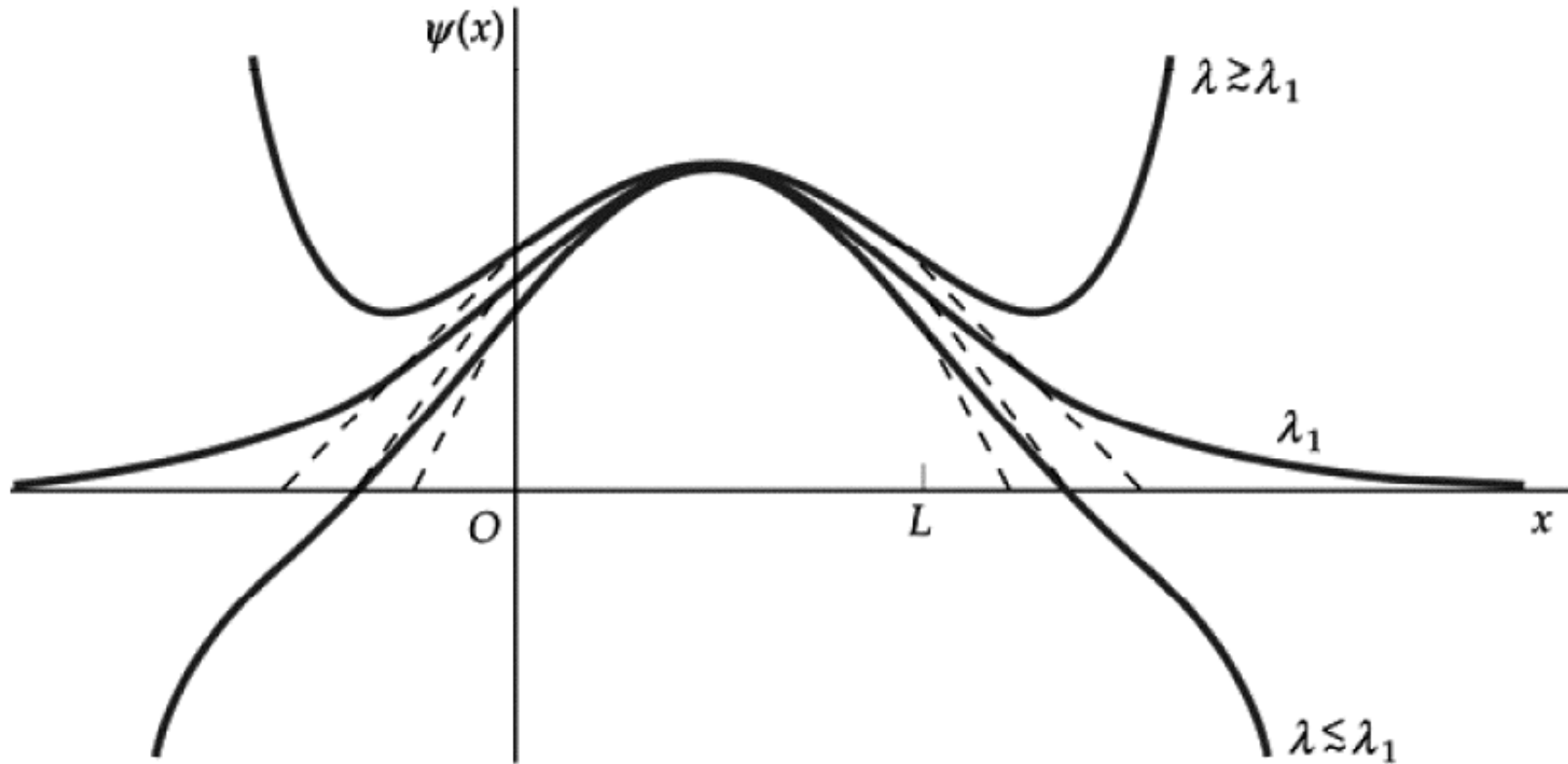
$$E_2^{\text{Ca-40}} = 12.24 \text{ MeV}$$

$$E_3^{\text{Ca-40}} = 27.54 \text{ MeV}$$

Diagnose

- Abstand der Energiezustände im Kern in sind in der Größenordnung von 10 MeV
- grober Potenzialansatz gibt tatsächliche Energieverhältnisse im Kern erstaunlich gut wieder

Potenzialtopf



Diagnose

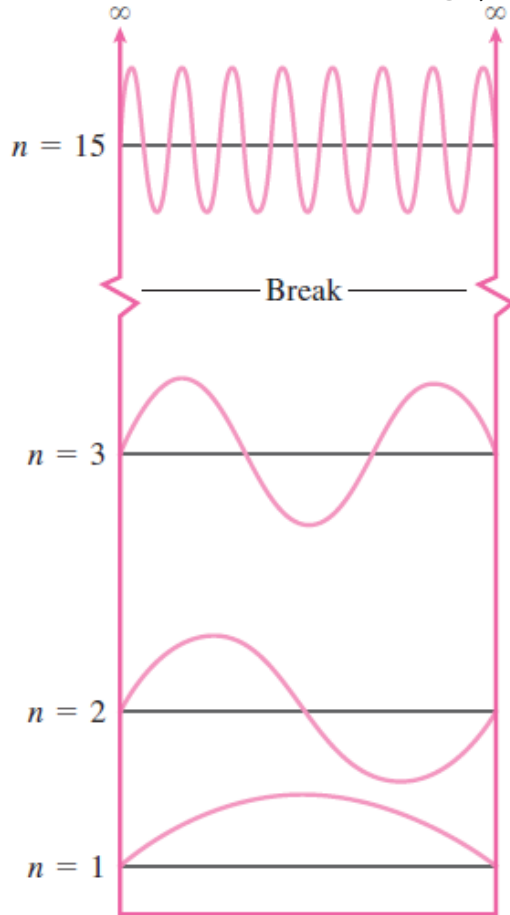
Divergierende Lösungen der Schrödingergleichung mit Wellenlänge nahe tatsächlicher Lösung

unendlich hohe Wände

Quantenamplitude

Symptome

- Konstante in Lösung noch nicht bekannt
- nutze Normalisierung (irgendwo muss es sein)



Wellenfunktion im Potenzialwall

$$\psi_{particle}(x) = A_{QM} \sin k_{\lambda} x$$

Wellenfunktion außerhalb Potenzialwall

$$\psi_{particle}(x) = 0$$

Wellenfunktion für Potenzialwall

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a_{PT}}} \sin\left(\frac{\pi n_{node}}{a_{PT}} x\right)$$

Normalisierung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{particle}^2 dx = 1$$

$$\int_0^{a_{PT}} A_{QM}^2 \sin^2\left(\frac{\pi n_{node}}{a_{PT}} x\right) dx = 1$$

$$\int_0^{a_{PT}} \sin^2\left(\frac{\pi n_{node}}{a_{PT}} x\right) dx = \frac{1}{2} a_{PT}$$

$$\frac{A_{QM}^2 a_{PT}}{2} = 1 \Leftrightarrow A_{AW} = \sqrt{\frac{2}{a_{PT}}}$$

Wissenschaftsjahr 2008
Mathematik
Alles, was zählt

Camera Obscura



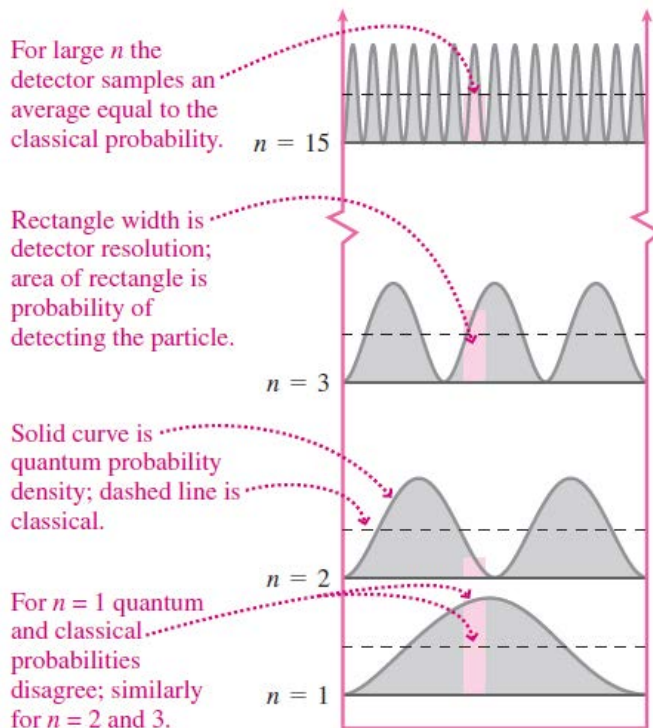
Diagnose

Stehende Wellen in einem unendlich hohen Potenzialtopf

quantenmechanisch betrachtet Ortsposition

Symptome

- **KLASSISCH** bewegt sich Teilchen mit konstanter **Geschwindigkeit** hin und her
- **instantane Beschleunigung**, d.h. keine erhöhte **Aufenthaltswahrscheinlichkeit an Barriere**
- **GLEICHE Wahrscheinlichkeit** im Potenzialwall Partikel an einem beliebigem Ort zu finden



GERINGERE Abweichung Quantenresultat vom klassischen Ergebnis

Bewegung Stimmgabel mit Stoboskop



GROBE Abweichung Quantenresultat vom klassischem Ergebnis

Diagnose

- für $n=1$ ist quantenmechanische **Wahrscheinlichkeit** am höchsten, Teilchen in **Mitte** zu finden
- für $n=2$ findet man Teilchen **NIE** bei $a/2$ (quantenmechanisches Interferenzphänomen)
- bei hohen **Quantenzahlen** nähert sich **Wahrscheinlichkeit** dem klassischen Resultat
- **Messverfahren: Detektor** hat nur begrenzte **Ortsauflösung** und integriert über **Raumgebiet**