Aufgaben zum Verifizierungsprinzip

A Gegeben sei die Stammfunktion $F(x) = \int f(x)dx$. Berechnen Sie die Funktion $f(x) = F'(x)$!

	gegeben: $F(x) = \int f(x)dx$	gesucht: $f(x) = F'(x)$
$A1$	$\frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + C$	
$A2$	$x \ln \lvert x \rvert - x + C$	
$A3$	$\frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C$	
$A4$	$\ln \lvert \cos x \rvert + C$	

(1)

Lösungen zum Verifizierungsprinzip

A Gegeben sei die Stammfunktion $F(x) = \int f(x)dx$. Berechnen Sie die Funktion $f(x) = F'(x)$!

	gegeben: $F(x) = \int f(x)dx$	gesucht: $f(x) = F'(x)$
$A1$	$\frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + C$	$\frac{1}{x^2 - a^2}$
$A2$	$x \ln \lvert x \rvert - x + C$	$\ln \lvert x \rvert$
$A3$	$\frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C$	$\cos^2 x$
$A4$	$\ln \lvert \cos x \rvert + C$	$-\tan x$

(2)

Anwendung von Grundintegralen

B Berechnen Sie das unbestimmte Integral zu folgenden Funktionen $f(x)$:

	geg.: $f(x)$	ges.: $\int f(x)dx$		geg.: $f(x)$	ges.: $\int f(x)dx$
$B1$	$\sqrt{x}$		$B2$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	
$B3$	$x\sqrt{x}$		$B4$	$\dfrac{x^5}{\sqrt{x}}$	
$B5$	$\dfrac{x^2-x+1}{x-2}$		$B6$	$\dfrac{x^2-x+1}{x\sqrt{x}}$	

(3)

Lösungen zur Anwendung von Grundintegralen

B Berechnen Sie das unbestimmte Integral zu folgenden Funktionen $f(x)$, überprüfen sie ihr Ergebnis, indem sie das Integral ableiten :

	geg.: $f(x)$	ges.: $\int f(x)dx$		geg.: $f(x)$	ges.: $\int f(x)dx$
$B1$	$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\frac{2}{3}x^{3/2} + C$	$B2$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$	$2x^{1/2} + C$
$B3$	$x\sqrt{x} = x^{3/2}$	$\frac{2}{5}x^{5/2} + C$	$B4$	$\dfrac{x^5}{\sqrt{x}} = x^{9/2}$	$\frac{2}{11}x^{11/2} + C$

(4)

	geg.: $f(x)$	ges.: $\int f(x)dx$
$B5$	$\dfrac{x^2 - x + 1}{x - 2} = x + 1 + \dfrac{3}{x - 2}$	$\frac{1}{2}x^2 + x + 3\ln\lvert x - 2\rvert + C$
$B6$	$\dfrac{x^2 - x + 1}{x\sqrt{x}} = x^{1/2} - x^{-1/2} + x^{-3/2}$	$\frac{2}{3}x^{3/2} - 2x^{1/2} - 2x^{-1/2} + C$

(5)

Anwendung der Substitutionsmethode bei Grundintegralen

C Berechnen Sie das unbestimmte Integral zu folgenden Funktionen $f(x)$:

	geg.: $f(x)$	ges.: $\int f(x)dx$		geg.: $f(x)$	ges.: $\int f(x)dx$
$C1$	$(5x-3)^2$		$C2$	$\sqrt{(3x-2)^3}$	
$C3$	e^{-ax}		$C4$	e^{cx+d}	
$C5$	$\dfrac{1}{ax-b}$		$C6$	$x^2\sqrt{2x^3+4}$	
$C7$	$\cos(\alpha x+\beta)$		$C8$	$x\ \ln\lvert x^2+4\rvert$	

(6)

	geg.: $f(x)$	Substitution	ges.: $\int f(x)dx$
$C1$	$(5x-3)^2$	$z = (5x-3);\ dz = 5dx$	$\frac{1}{15}(5x-3)^3 + C$
$C2$	$\sqrt{(3x-2)^3}$	$z = 3x-2;\ dz = 3dx$	$\frac{2}{15}(3x-2)^{5/2} + C$
$C3$	e^{-ax}	$z = -ax;\ dz = -adx$	$-\frac{1}{a}e^{-ax} + C$
$C4$	e^{cx+d}	$z = cx+d;\ dz = cdx$	$\frac{1}{c}e^{cx+d} + C$
$C5$	$\frac{1}{ax-b}$	$z = ax-b;\ dz = adx$	$\frac{1}{a}\ln\lvert ax-b\rvert + C$
$C6$	$x^2\sqrt{2x^3+4}$	$z = 2x^3+4;\ dz = 6x^2dx$	$\frac{1}{9}(2x^3+4)^{3/2} + C$
$C7$	$\cos(\alpha x+\beta)$	$z = \alpha x+\beta;\ dz = \alpha dx$	$\frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x+\beta) + C$
$C8$	$x\ln\lvert x^2+4\rvert$	$z = x^2+4;\ dz = 2xdx$	$\frac{1}{2}(z\ln\lvert z\rvert - z) + C,\ (z = x^2+4)$

(7)

Anwendung der Substitutionsmethode in Verbindung mit der quadratischen Ergänzung

D1 In Integraltafeln finden Sie folgendes Integral: $I_1 = \int \frac{1}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$

Berechnen Sie das unbestimmte Integral der Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 8}$ unter Verwendung des Integrals I_1 mit Hilfe der Substitutionsmethode, indem Sie eine geeignete quadratische Ergänzung einführen.

D2 In Integraltafeln finden Sie folgendes Integral: $I_2 = \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \frac{1}{a} \arcsin \frac{x}{a} + C.$

Berechnen Sie das unbestimmte Integral der Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + x + 2}}$ unter Verwendung des Integrals I_2 mit Hilfe der Substitutionsmethode, indem Sie eine geeignete quadratische Ergänzung einführen.

Anwendung der Substitutionsmethode in Verbindung mit der quadratischen Ergänzung – Lösung

D1: $$\int \frac{dx}{x^2+4x+8} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+4}, \quad \text{Substitution: } z = x+2, \ \frac{dz}{dx} = 1, \ dz = dx$$

$$= \int \frac{dz}{z^2+2^2} = \frac{1}{2}\arctan\frac{z}{2} + C = \frac{1}{2}\arctan\frac{x+2}{2} + C$$

D2: $$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+x+2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{9}{4}}}, \quad \text{Subst.: } z = x - \frac{1}{2}, \ \frac{dz}{dx} = 1, \ dz = dx$$

$$= \int \frac{dz}{\sqrt{z^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}} = \frac{2}{3}\arcsin\frac{2}{3}z + C = \frac{2}{3}\arcsin\frac{2x-1}{3} + C$$