

Universität
Rostock



Traditio et Innovatio

Institut für Mathematik

Vorkurs Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure

Ausführliches Inhaltsverzeichnis mit thematischen Links

Prof. Dr. Konrad Engel

Prof. Dr. Roger Labahn

`{konrad.engel,roger.labahn}@uni-rostock.de`

25.09. – 06.10.2017

Inhaltsverzeichnis

1	Arithmetik	3
1.1	Zahlenmengen	3
1.2	Rechenregeln: Vertauschungs- und Klammerregeln	3
1.3	Teilbarkeit	3
1.4	Eine irrationale Zahl	3
1.5	Bruchrechnung	3
1.6	Rechnen mit Ungleichungen und Beträgen	3
2	Potenzen, Wurzeln und Logarithmen	6
2.1	Potenzen	6
2.2	Die EULERSche Zahl	6
2.3	Wurzeln	6
2.4	Logarithmen	6
3	Polynome	8
3.1	Lineare und quadratische Funktionen	8
3.2	Polynome höheren Grades	8
4	Trigonometrie	10
4.1	Die Kreiszahl	10
4.2	Strahlensatz und Satz des PYTHAGORAS	10
4.3	Sinus und Cosinus	10
4.4	Tangens und Kotangens	10
4.5	Anwendungen in der Geometrie	10
5	Endliche Folgen & Reihen	12
5.1	Arithmetisch	12
5.2	Geometrisch	12
6	Differentialrechnung	13
6.1	Reelle Funktionen	13
6.2	Ableitung	13
6.3	Extremwertberechnung	13
7	Integralrechnung	14
7.1	Stammfunktion	14
7.2	Flächenberechnung	14
7.3	Volumenberechnung von Rotationskörpern	14
8	Gleichungssysteme	16
8.1	Einsetzungsverfahren	16
8.2	Additionsverfahren	16

1 Arithmetik

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Arithmetik>

1.1 Zahlenmengen

W https://de.wikipedia.org/wiki/Natürliche_Zahl

W https://de.wikipedia.org/wiki/Ganze_Zahl

W https://de.wikipedia.org/wiki/Rationale_Zahl

W https://de.wikipedia.org/wiki/Reelle_Zahl

1.2 Rechenregeln: Vertauschungs- und Klammerregeln

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Kommutativgesetz>

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Assoziativgesetz>

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Distributivgesetz>

W https://de.wikipedia.org/wiki/Binomische_Formeln

1.3 Teilbarkeit

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Teilbarkeit>

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Primzahl>

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Primfaktorzerlegung>

1.4 Eine irrationale Zahl

W https://de.wikipedia.org/wiki/Wurzel_2

1.5 Bruchrechnung

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Bruchrechnung>

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Dreisatz>

1.6 Rechnen mit Ungleichungen und Beträgen

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Ungleichung>

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Betragsfunktion>

Aufgaben

In der Vorlesung werden die Lösungen zu diesen Aufgaben ausführlicher kommentiert.

A 1.1 Vereinfachen Sie den Term

$$4(3a - 2b + 2(b + 3a + c - 2(c + 2a - 3b))).$$

A 1.2 Beweisen Sie die Summenformel für die natürlichen Zahlen

$$0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n}{2}(n + 1).$$

A 1.3 Beweisen Sie die Summenformel für die Quadratzahlen

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}.$$

A 1.4 Beweisen Sie die Identitäten

(a) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$

(b) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$

A 1.5 Beweisen Sie: Die Summe von 3 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer durch 3 teilbar.

A 1.6 Beweisen Sie für beliebige 3-stellige natürliche Zahlen abc :

(a) abc ist genau dann durch 9 teilbar, wenn die Quersumme $a + b + c$ durch 9 teilbar ist.

(b) abc ist genau dann durch 11 teilbar, wenn die alternierende Quersumme $a - b + c$ durch 11 teilbar ist.

A 1.7 Vereinfachen Sie den Bruch

$$\frac{uv - v^2}{u^2 - uv}.$$

A 1.8 In einem Supermarkt werden Äpfel in Säcken zu je 2,5 kg für 2 Euro pro Sack angeboten. Wie viel kostet hier 1 kg Äpfel?

A 1.9 5 Bauern benötigen insgesamt 12 Tage, um ein Apfelfeld komplett abzuernten. Wie viele Tage benötigen dafür 8 Bauern?

A 1.10 Bestimmen Sie alle reellen Zahlen x , für die die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$-5x + 2 < 7x - 10.$$

A 1.11 Beweisen Sie, dass für beliebige positive reelle Zahlen a, b und c die folgenden Ungleichungen gelten:

(a) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2,$

(b) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$,

(c) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$.

A 1.12 Beweisen Sie, dass für beliebige reelle Zahlen a die folgenden Ungleichungen gelten:

(a) $a \leq |a|$,

(b) $-a \leq |a|$,

(c) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung).

A 1.13 Bestimmen Sie alle reellen Zahlen x so, dass gilt

(a) $|x - 3| = 4$,

(b) $|x - 3| \leq 4$.

A 1.14 Bestimmen Sie alle reellen Zahlen x so, dass gilt

(a) $|2x + 3| + |3x - 4| = 5$,

(b) $|2x + 3| + |3x - 4| \geq 5$.

2 Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

2.1 Potenzen

W [https://de.wikipedia.org/wiki/Potenz_\(Mathematik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Potenz_(Mathematik))

2.2 Die Eulersche Zahl

W https://de.wikipedia.org/wiki/Eulersche_Zahl

2.3 Wurzeln

W [https://de.wikipedia.org/wiki/Wurzel_\(Mathematik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Wurzel_(Mathematik))

2.4 Logarithmen

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Logarithmus>

Aufgaben

In der Vorlesung werden die Lösungen zu diesen Aufgaben ausführlicher kommentiert.

A 2.1 Vereinfachen Sie den Term

$$\frac{2 \cdot 2^n \cdot 6^{n+1}}{12^{n+1}}.$$

A 2.2 Ein Mann ging nach Stötteritz. Da begegneten ihm 9 alte Weiber, jedes trug 9 Säcke, in jedem Sack waren 9 Katzen und jede Katze hatte 9 Junge. Wie viele gingen nach Stötteritz?

A 2.3 Beweisen Sie, dass gilt:

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

A 2.4 Vereinfachen Sie den folgenden Term, wobei vorausgesetzt wird, dass er definiert ist:

$$\frac{5a^{x+y}b^{3u+v}}{7c^2} : \frac{5c^4}{28a^{y-x}b^{v-2u}}.$$

A 2.5 Bestimmen Sie alle reellen Zahlen x , für die gilt:

$$7 + 3\sqrt{2x+4} = 16.$$

A 2.6 Beweisen Sie, dass für beliebige natürliche Zahlen n die folgende Ungleichung gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \geq 2\sqrt{n}.$$

A 2.7 Vereinfachen Sie die folgende Summe:

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}.$$

A 2.8 Ein Kapital wird zu einem jährlichen Zinssatz von $p\%$ angelegt. Wie groß muss p sein, damit sich der Wert nach 10 Jahren mindestens verdoppelt hat?

A 2.9 Lösen Sie die Gleichung

$$\lg(2x + 3) = \lg(x - 1) + 1.$$

A 2.10 Lösen Sie die Gleichung

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1.$$

A 2.11 Lösen Sie die folgende Gleichung für beliebige positive reellen Zahlen $a \neq 1$:

$$2\log_a(x + 4) - \log_{\sqrt{a}}\left(x + \frac{15}{4}\right) = 0.$$

A 2.12 Ein Kapital wird zu einem jährlichen Zinssatz von 1% angelegt. Wie viele Jahre müssen vergehen, damit sich der Wert mindestens verdoppelt hat?

3 Polynome

3.1 Lineare und quadratische Funktionen

W https://de.wikipedia.org/wiki/Lineare_Funktion

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Steigung>

W https://de.wikipedia.org/wiki/Quadratische_Funktion

W https://de.wikipedia.org/wiki/Satzgruppe_von_Vieta

3.2 Polynome höheren Grades

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Polynom>

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Polynomdivision>

Aufgaben

In der Vorlesung werden die Lösungen zu diesen Aufgaben ausführlicher kommentiert.

A 3.1 Seien (x_1, y_1) und (x_2, y_2) zwei Punkte in der x - y -Ebene mit $x_1 \neq x_2$. Wie lautet die Gleichung der Geraden, die durch (x_1, y_1) und (x_2, y_2) verläuft?

A 3.2 Sei (x_1, y_1) ein Punkt in der x - y -Ebene, der auf der Geraden g mit der Gleichung $y = mx + n$, $m \neq 0$, liegt. Wie lautet die Gleichung der Geraden, die durch (x_1, y_1) verläuft und orthogonal zu g ist?

A 3.3 Bestimmen Sie alle linearen Funktionen, für die für alle reellen Zahlen x die Gleichung

$$f(x-1) = f(x+1) - 4$$

gilt.

A 3.4 Lösen Sie die Gleichungen

(a) $x^2 - x - 2 = 0$,

(b) $4x^2 - 4x + 1 = 0$.

A 3.5 Lösen Sie die biquadratische Gleichung

$$x^4 + 3x^2 - 4 = 0.$$

A 3.6 Bestimmen Sie alle reellen Zahlen x , für die die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$3 + 2e^{-2x} - 5e^{-x} = 0.$$

A 3.7 Bestimmen Sie alle reellen Zahlen x , für die die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$x^2 + 2x - 3 \leq 0.$$

A 3.8 Führen Sie die folgenden Polynomdivisionen durch:

(a) $(x^3 - 3x + 5) : (x - 2),$

(b) $(3x^2 + 4x + 9) : (x^2 + 5),$

(c) $(3x^4 + 2x^2 + x - 4) : (x^2 + x + 1).$

4 Trigonometrie

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Trigonometrie>

4.1 Die Kreiszahl

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Kreiszahl>

4.2 Strahlensatz und Satz des Pythagoras

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Strahlensatz>

W https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_des_Pythagoras

4.3 Sinus und Cosinus

W https://de.wikipedia.org/wiki/Sinus_und_Kosinus

4.4 Tangens und Kotangens

W https://de.wikipedia.org/wiki/Tangens_und_Kotangens

4.5 Anwendungen in der Geometrie

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Dreiecksfläche>

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Sinussatz>

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Kosinussatz>

Aufgaben

In der Vorlesung werden die Lösungen zu diesen Aufgaben ausführlicher kommentiert.

A 4.1 Um den Äquator von etwa 40.000 km Länge wird ein Band straff gelegt. Jetzt wird das Band um 1 m verlängert und das Band so gelegt, dass es überall den gleichen Abstand zur Erdoberfläche hat. Kann eine normale Katze darunter durchkriechen?

A 4.2 Begründen Sie geometrisch die folgende Wertetabelle:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\cot x$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

A 4.3 Beweisen Sie die Identitäten

(a) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$,

(b) $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$.

A 4.4 Vereinfachen Sie die Terme

(a) $\cos^4 x - \sin^4 x$,

(b) $\frac{1}{1+\sin x} + \frac{1}{1-\sin x}$.

A 4.5 Bestimmen Sie alle reellen Zahlen x , für die die folgende Gleichung gilt:

$$2 \sin^2 x - 2 \cos x = 2.$$

5 Endliche Folgen & Reihen

5.1 Arithmetisch

W https://de.wikipedia.org/wiki/Arithmetische_Folge

W https://de.wikipedia.org/wiki/Arithmetische_Reihe

5.2 Geometrisch

W https://de.wikipedia.org/wiki/Geometrische_Folge

W https://de.wikipedia.org/wiki/Geometrische_Reihe

Anwendungen für Aufgaben

W https://de.wikipedia.org/wiki/Monotone_Abbildung

Aufgaben

In der Vorlesung werden die Lösungen zu diesen Aufgaben ausführlicher kommentiert.

- A 5.1** Setzen Sie die angegebene Zahlenfolge (a_n) um drei weitere Folgenglieder fort und geben Sie eine Bildungsvorschrift für diese Zahlenfolge an:

$$(a_n) = (4, 7, 12, 19, 28, \dots)$$

(Abitur Thüringen 2007)

- A 5.2** Von einer geometrischen Zahlenfolge sind die Glieder $a_2 = 24$ und $a_5 = 81$ gegeben.

Geben Sie eine explizite Bildungsvorschrift an!

Ab welchem n ($n \in \mathbb{N}$) sind die Glieder größer als 1000?

(Abitur Thüringen 2008)

6 Differentialrechnung

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Differentialrechnung>

6.1 Reelle Funktionen

W https://de.wikipedia.org/wiki/Reellwertige_Funktion

6.2 Ableitung

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Differenzierbarkeit>

6.3 Extremwertberechnung

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Extremwert>

Aufgaben

In der Vorlesung werden die Lösungen zu diesen Aufgaben ausführlicher kommentiert.

A 6.1 Beweisen Sie:

- (a) Sind die Funktionen f und g beide gerade oder beide ungerade, so ist das Produkt fg gerade.
- (b) Ist die Funktion f gerade und die Funktion g ungerade (oder umgekehrt), so ist das Produkt fg gerade.

A 6.2 Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

- (a) $f(x) = x \sin x + 3 \ln x$,
- (b) $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$,
- (c) $f(x) = e^{2x+1}$,
- (d) $f(x) = e^{x^2/2}$.

A 6.3 Beweisen Sie:

- (a) Ist die Funktion f gerade, so gilt $f'(x) + f'(-x) = 0$ für alle x .
- (b) Ist die Funktion f ungerade, so gilt $f'(x) - f'(-x) = 0$ für alle x .

A 6.4 Bestimmen Sie die Fläche des Dreiecks, das durch die Koordinatenachsen und die Tangente an den Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ durch die folgenden Punkten P dieser Kurve gebildet wird:

- (a) $P = (2, \frac{1}{2})$,
- (b) $P = (t, \frac{1}{t})$, t beliebig reell.

A 6.5 Untersuchen Sie das Verhalten der Kurve, die durch

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 25$$

gegeben ist.

7 Integralrechnung

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Integralrechnung>

7.1 Stammfunktion

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Stammfunktion>

7.2 Flächenberechnung

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Flächeninhalt>

7.3 Volumenberechnung von Rotationskörpern

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Rotationskörper>

Aufgaben

In der Vorlesung werden die Lösungen zu diesen Aufgaben ausführlicher kommentiert.

A 7.1 Berechnen Sie die unbestimmten Integrale folgender Funktionen:

(a) $f(x) = x^3 - 2x + 5$,

(b) $f(x) = \frac{1}{5x+3}$,

(c) $f(x) = e^{3x} - \sin(3 - 5x)$.

Beweisen Sie, dass bei vorausgesetzter Differenzierbarkeit gilt:

A 7.2 (a) Die Funktion $\ln |f(x)|$ ist eine Stammfunktion von $\frac{f'(x)}{f(x)}$, d.h.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c.$$

(b) Die Funktion $\frac{1}{n+1}(f(x))^{n+1}$ ist eine Stammfunktion von $f'(x)(f(x))^n$, d.h.

$$\int f'(x)(f(x))^n dx = \frac{1}{n+1}(f(x))^{n+1} + c.$$

A 7.3 Berechnen Sie die unbestimmten Integrale folgender Funktionen:

(a) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2}$,

(b) $f(x) = \sin^4 x \cos x$.

A 7.4 Berechnen Sie die Fläche desjenigen Gebietes, das die Punkte (x, y) der x - y -Ebene enthält, für die $0 \leq x \leq \pi$ und $0 \leq y \leq \sin x$ gilt.

A 7.5 Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn die Fläche begrenzt vom Graphen der Funktion $f(x) = x^2 + 1$ und der x -Achse zwischen $x = 1$ und $x = 2$ um die x -Achse rotiert.

A 7.6 Leiten Sie die Volumenformeln für die folgenden Körper her: (a) Kegel, (b) Kugel.

A 7.7 Für jeden Wert t ($t \in \mathbb{R}, t > 0$) ist die Funktion f_t mit $f_t(x) = \frac{1}{3}x^3 - tx^2$ ($x \in \mathbb{R}$) gegeben.

- (a) Alle lokalen Minimumpunkte der Graphen der Funktionen f_t liegen auf dem Graphen einer Funktion h . Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion h .
- (b) Berechnen Sie den Wert t , für den $\int_0^1 f_t(x) \, dx = \frac{1}{24}$ gilt.

(Abitur Sachsen 2013)

A 7.8 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^x(2x + x^2)$.

- (a) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f .
- (b) Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F(x) = x^2e^x$ ($x \in \mathbb{R}$) eine Stammfunktion von f ist. Geben Sie eine Gleichung einer weiteren Stammfunktion G von f an, für die $G(1) = 2e$ gilt.

(Abitur Sachsen 2014)

8 Gleichungssysteme

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Gleichungssystem>

8.1 Einsetzungsverfahren

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Einsetzungsverfahren>

8.2 Additionsverfahren

W [https://de.wikipedia.org/wiki/Additionsverfahren_\(Mathematik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Additionsverfahren_(Mathematik))

Aufgaben

In der Vorlesung werden die Lösungen zu diesen Aufgaben ausführlicher kommentiert.

A 8.1 Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrcrcl} 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 7 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 14 \\ x_1 & - & 5x_2 & - & 4x_3 & = & -21 \end{array}$$

(Abitur Baden-Württemberg 2007)

A 8.2 Im Intervall $[-2, 2]$ soll die Funktion $f(x) = \frac{4}{2 + \cos(\frac{\pi}{2}x)}$ durch eine ganzrationale Funktion g vom Grad 2 angenähert werden, die mit f an den Stellen $-2, 0$ und 2 übereinstimmt. Bestimmen Sie einen geeigneten Funktionsterm für g .

(Abitur Baden-Württemberg 2007)

A 8.3 In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Eckpunkte eines Dreiecks ABC gegeben:
 $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Ermitteln Sie eine Gleichung seines Umkreises k .

(Abitur Sachsen-Anhalt 2013)