

Universität
Rostock



Traditio et Innovatio

Institut für Mathematik

Vorkurs Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure

Ausführliches Inhaltsverzeichnis mit thematischen Links

Prof. Dr. Konrad Engel

Prof. Dr. Roger Labahn

Dr. Wolfgang Peters

`{konrad.engel,roger.labahn,wolfgang.peters}@uni-rostock.de`

23.09. – 04.10.2019

Inhaltsverzeichnis

1	Arithmetik	3
1.1	Zahlenmengen	3
1.2	Rechenregeln: Vertauschungs- und Klammerregeln	3
1.3	Teilbarkeit	3
1.4	Eine irrationale Zahl	3
1.5	Bruchrechnung	3
1.6	Rechnen mit Ungleichungen und Beträgen	3
2	Potenzen, Wurzeln und Logarithmen	6
2.1	Potenzen	6
2.2	Wurzeln	6
2.3	Die EULERSche Zahl	6
2.4	Logarithmen	6
3	Polynome	8
3.1	Lineare und quadratische Funktionen	8
3.2	Polynome höheren Grades	8
4	Trigonometrie	10
4.1	Die Kreiszahl	10
4.2	Strahlensatz und Satz des PYTHAGORAS	10
4.3	Sinus und Cosinus	10
4.4	Tangens und Kotangens	10
4.5	Anwendungen in der Geometrie	10
5	Differentialrechnung	12
5.1	Reelle Funktionen	12
5.2	Ableitung	12
5.3	Extremwertberechnung	12
6	Integralrechnung	13
6.1	Unbestimmtes Integral	13
6.2	Bestimmtes Integral	13
6.3	Volumenberechnung von Rotationskörpern	13
7	Endliche Folgen & Reihen	14
7.1	Arithmetisch	14
7.2	Geometrisch	14
8	Gleichungssysteme	15
8.1	Einsetzungsverfahren	15
8.2	Additionsverfahren	15

1 Arithmetik

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Arithmetik>

1.1 Zahlenmengen

W https://de.wikipedia.org/wiki/Natürliche_Zahl

W https://de.wikipedia.org/wiki/Ganze_Zahl

W https://de.wikipedia.org/wiki/Rationale_Zahl

W https://de.wikipedia.org/wiki/Reelle_Zahl

1.2 Rechenregeln: Vertauschungs- und Klammerregeln

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Kommutativgesetz>

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Assoziativgesetz>

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Distributivgesetz>

W https://de.wikipedia.org/wiki/Binomische_Formeln

1.3 Teilbarkeit

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Teilbarkeit>

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Primzahl>

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Primfaktorzerlegung>

1.4 Eine irrationale Zahl

W https://de.wikipedia.org/wiki/Wurzel_2

1.5 Bruchrechnung

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Bruchrechnung>

1.6 Rechnen mit Ungleichungen und Beträgen

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Ungleichung>

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Betragsfunktion>

Aufgaben

In der Vorlesung werden die Lösungen zu diesen Aufgaben ausführlicher kommentiert.

A 1.1 Vereinfachen Sie den Term

$$4(3a - 2b + 2(b + 3a + c - 2(c + 2a - 3b))).$$

A 1.2 Beweisen Sie die Summenformel für die natürlichen Zahlen

$$0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n}{2}(n + 1).$$

A 1.3 Beweisen Sie die Summenformel für die Quadratzahlen

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

A 1.4 (a) Stellen Sie $4x^2 + 12xy + 9y^2$ als Quadrat dar.

(b) Stellen Sie $(4u + v)^2 - (4u - v)^2$ als Produkt dar.

(c) Berechnen Sie $97 \cdot 103$ im Kopf.

A 1.5 Beweisen Sie die Identitäten

(a) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$

(b) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$

A 1.6 Beweisen Sie: Die Summe von 3 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer durch 3 teilbar.

A 1.7 Beweisen Sie für beliebige 3-stellige natürliche Zahlen abc :

(a) abc ist genau dann durch 9 teilbar, wenn die Quersumme $a + b + c$ durch 9 teilbar ist.

(b) abc ist genau dann durch 11 teilbar, wenn die alternierende Quersumme $a - b + c$ durch 11 teilbar ist.

A 1.8 Vereinfachen Sie den Bruch

$$\frac{uv - v^2}{u^2 - uv}.$$

A 1.9 Bestimmen Sie alle reellen Zahlen x , für die die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$-5x + 2 < 7x - 10.$$

A 1.10 Beweisen Sie, dass für beliebige positive reelle Zahlen a, b und c die folgenden Ungleichungen gelten:

(a) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2,$

(b) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$

(c) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc.$

A 1.11 Aus einem Draht der Länge a soll ein oben offenes Rechteck gebogen werden. Bestimmen Sie die maximale Fläche dieses Rechtecks in Abhängigkeit von a .

(Abitur MV 2019 – eindimensionaler Fall)

A 1.12 Beweisen Sie, dass für beliebige reelle Zahlen a die folgenden Ungleichungen gelten:

(a) $a \leq |a|,$

(b) $-a \leq |a|,$

(c) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung).

A 1.13 Bestimmen Sie alle reellen Zahlen x so, dass gilt

(a) $|x - 3| = 4,$

(b) $|x - 3| \leq 4.$

A 1.14 Bestimmen Sie alle reellen Zahlen x so, dass gilt

(a) $|2x + 3| + |2x - 5| = 7,$

(b) $|2x + 3| + |2x - 5| \geq 7.$

2 Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

2.1 Potenzen

W [https://de.wikipedia.org/wiki/Potenz_\(Mathematik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Potenz_(Mathematik))

2.2 Wurzeln

W [https://de.wikipedia.org/wiki/Wurzel_\(Mathematik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Wurzel_(Mathematik))

2.3 Die Eulersche Zahl

W https://de.wikipedia.org/wiki/Eulersche_Zahl

2.4 Logarithmen

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Logarithmus>

Aufgaben

In der Vorlesung werden die Lösungen zu diesen Aufgaben ausführlicher kommentiert.

A 2.1 Vereinfachen Sie den Term

$$\frac{2 \cdot 2^n \cdot 6^{n+1}}{12^{n+1}}.$$

A 2.2 Vereinfachen Sie den folgenden Term, wobei vorausgesetzt wird, dass er definiert ist:

$$\frac{5a^{x+y}b^{3u+v}}{7c^2} : \frac{5c^4}{28a^{y-x}b^{v-2u}}.$$

A 2.3 Bestimmen Sie alle reellen Zahlen x , für die gilt:

$$7 + 3\sqrt{2x+4} = 16.$$

A 2.4 Beweisen Sie, dass für beliebige natürliche Zahlen n die folgende Ungleichung gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \geq 2\sqrt{n}.$$

A 2.5 Vereinfachen Sie die folgende Summe:

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}.$$

A 2.6 Ein Kapital wird zu einem jährlichen Zinssatz von $p\%$ angelegt. Wie groß muss p sein, damit sich der Wert nach 10 Jahren mindestens verdoppelt hat?

A 2.7 Stellen Sie den folgenden Term als Summe/Differenz von Logarithmen dar:

$$\log \frac{2\sqrt{a+b} a^3 b^2}{\sqrt[3]{c}(a+c)^2}.$$

A 2.8 Lösen Sie die Gleichung

$$\lg(2x+3) = \lg(x-1) + 1.$$

A 2.9 Lösen Sie die folgende Gleichung für beliebige positive reellen Zahlen $a \neq 1$:

$$2\log_a(2x+4) - \log_{\sqrt{a}}\left(x + \frac{15}{4}\right) = 0.$$

A 2.10 Ein Kapital wird zu einem jährlichen Zinssatz von 1% angelegt. Wie viele Jahre müssen vergehen, damit sich der Wert mindestens verdoppelt hat?

3 Polynome

3.1 Lineare und quadratische Funktionen

W https://de.wikipedia.org/wiki/Lineare_Funktion

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Steigung>

W https://de.wikipedia.org/wiki/Quadratische_Funktion

3.2 Polynome höheren Grades

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Polynom>

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Polynomdivision>

Aufgaben

In der Vorlesung werden die Lösungen zu diesen Aufgaben ausführlicher kommentiert.

A 3.1 Seien (x_1, y_1) und (x_2, y_2) zwei Punkte in der x - y -Ebene mit $x_1 \neq x_2$. Wie lautet die Gleichung der Geraden, die durch (x_1, y_1) und (x_2, y_2) verläuft?

A 3.2 Sei (x_1, y_1) ein Punkt in der x - y -Ebene, der auf der Geraden g mit der Gleichung $y = mx + n$, $m \neq 0$, liegt. Wie lautet die Gleichung der Geraden, die durch (x_1, y_1) verläuft und orthogonal zu g ist?

A 3.3 (a) Die Ebene $E : 3x + 2y + 2z = 6$ enthält einen Punkt, dessen drei Koordinaten übereinstimmen. Bestimmen Sie diese Koordinaten.

(b) Begründen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist: Es gibt unendlich viele Ebenen, die keinen Punkt enthalten, dessen drei Koordinaten übereinstimmen.

(Abitur MV 2019)

A 3.4 Lösen Sie die Gleichungen

(a) $x^2 - x - 2 = 0$,

(b) $4x^2 - 4x + 1 = 0$.

A 3.5 Gegeben ist eine Schar von auf $\mathbb{R}$ definierten Funktionen

$$f_k(x) = kx^2 - 4x - 3, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

deren Graphen Parabeln sind.

(a) Bestimmen Sie den Wert von k so, dass der Punkt $(2, -3)$ auf der zugehörigen Parabel liegt.

(b) Ermitteln Sie diejenigen Werte von k , für die die jeweils zugehörige Funktion f_k keine Nullstelle besitzt.

(Abitur Bayern 2019)

A 3.6 Lösen Sie die biquadratische Gleichung

$$x^4 + 3x^2 - 4 = 0.$$

A 3.7 Bestimmen Sie alle reellen Zahlen x , für die die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$3 + 2e^{-2x} - 5e^{-x} = 0.$$

A 3.8 Bestimmen Sie alle reellen Zahlen x , für die die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$x^2 + 2x - 3 \leq 0.$$

A 3.9 Aus einem quadratischen Stück Pappe mit der Seitenlänge a soll eine oben offene Schachtel mit quadratischer Grundfläche gefaltet werden. Dazu werden an den Ecken jeweils quadratische Flächenstücke mit der Seitenlänge x abgeschnitten. Berechnen Sie den Wert x in Abhängigkeit von a so, dass das Volumen der Schachtel maximal wird. Geben Sie das maximale Volumen der Schachtel in Abhängigkeit von a an.

(Abitur MV 2019)

A 3.10 Führen Sie die folgenden Polynomdivisionen durch:

(a) $(x^3 - 3x + 5) : (x - 2),$

(b) $(3x^2 + 4x + 9) : (x^2 + 5),$

(c) $(3x^4 + 2x^2 + x - 4) : (x^2 + x + 1).$

4 Trigonometrie

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Trigonometrie>

4.1 Die Kreiszahl

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Kreiszahl>

4.2 Strahlensatz und Satz des Pythagoras

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Strahlensatz>

W https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_des_Pythagoras

4.3 Sinus und Cosinus

W https://de.wikipedia.org/wiki/Sinus_und_Kosinus

4.4 Tangens und Kotangens

W https://de.wikipedia.org/wiki/Tangens_und_Kotangens

4.5 Anwendungen in der Geometrie

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Dreiecksfläche>

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Sinussatz>

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Kosinussatz>

Aufgaben

In der Vorlesung werden die Lösungen zu diesen Aufgaben ausführlicher kommentiert.

A 4.1 Um den Äquator von etwa 40.000 km Länge wird ein Band straff gelegt. Jetzt wird das Band um 1 m verlängert und das Band so gelegt, dass es überall den gleichen Abstand zur Erdoberfläche hat. Kann eine normale Katze darunter durchkriechen?

A 4.2 Zeigen Sie am Einheitskreis die folgenden Identitäten:

- (a) $\sin(x) = \sin(\pi - x) = -\sin(\pi + x) = -\sin(-x)$,
- (b) $\cos(x) = -\cos(\pi - x) = -\cos(\pi + x) = \cos(-x)$,
- (c) $\tan(x) = -\tan(\pi - x) = \tan(\pi + x) = -\tan(-x)$,
- (d) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$,
- (e) $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$.

A 4.3 Begründen Sie geometrisch die folgende Wertetabelle:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\cot x$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

A 4.4 Beweisen Sie die Identitäten

(a) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$

(b) $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1.$

A 4.5 Vereinfachen Sie die Terme

(a) $\cos^4 x - \sin^4 x,$

(b) $\frac{1}{1+\sin x} + \frac{1}{1-\sin x}.$

A 4.6 Bestimmen Sie alle reellen Zahlen x , für die die folgende Gleichung gilt:

$$2 \sin^2 x - 2 \cos x = 2.$$

5 Differentialrechnung

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Differentialrechnung>

5.1 Reelle Funktionen

W https://de.wikipedia.org/wiki/Reellwertige_Funktion

5.2 Ableitung

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Differenzierbarkeit>

5.3 Extremwertberechnung

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Extremwert>

Aufgaben

In der Vorlesung werden die Lösungen zu diesen Aufgaben ausführlicher kommentiert.

A 5.1 Beweisen Sie:

- (a) Sind die Funktionen f und g beide gerade oder beide ungerade, so ist das Produkt fg gerade.
- (b) Ist die Funktion f gerade und die Funktion g ungerade (oder umgekehrt), so ist das Produkt fg ungerade.

A 5.2 Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

- (a) $f(x) = x \sin x + 3 \ln x$,
- (b) $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$,
- (c) $f(x) = e^{2x+1}$,
- (d) $f(x) = e^{x^2/2}$.

A 5.3 Untersuchen Sie das Verhalten der Kurve, die durch

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 25$$

gegeben ist.

6 Integralrechnung

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Integralrechnung>

6.1 Unbestimmtes Integral

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Stammfunktion>

6.2 Bestimmtes Integral

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Flächeninhalt>

6.3 Volumenberechnung von Rotationskörpern

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Rotationskörper>

Aufgaben

In der Vorlesung werden die Lösungen zu diesen Aufgaben ausführlicher kommentiert.

A 6.1 Berechnen Sie die unbestimmten Integrale folgender Funktionen:

(a) $f(x) = x^3 - 2x + 5$,

(b) $f(x) = \frac{1}{5x+3}$,

(c) $f(x) = e^{3x} - \sin(3 - 5x)$.

Beweisen Sie, dass bei vorausgesetzter Differenzierbarkeit gilt:

A 6.2 (a) Die Funktion $\ln |f(x)|$ ist eine Stammfunktion von $\frac{f'(x)}{f(x)}$, d.h.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c.$$

(b) Die Funktion $\frac{1}{n+1}(f(x))^{n+1}$ ist eine Stammfunktion von $f'(x)(f(x))^n$, d.h.

$$\int f'(x)(f(x))^n dx = \frac{1}{n+1}(f(x))^{n+1} + c.$$

A 6.3 Berechnen Sie die unbestimmten Integrale folgender Funktionen:

(a) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2}$,

(b) $f(x) = \sin^4 x \cos x$.

A 6.4 Berechnen Sie die Fläche desjenigen Gebietes, das die Punkte (x, y) der x - y -Ebene enthält, für die $0 \leq x \leq \pi$ und $0 \leq y \leq \sin x$ gilt.

A 6.5 Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn die Fläche begrenzt vom Graphen der Funktion $f(x) = x^2 + 1$ und der x -Achse zwischen $x = 1$ und $x = 2$ um die x -Achse rotiert.

7 Endliche Folgen & Reihen

7.1 Arithmetisch

W https://de.wikipedia.org/wiki/Arithmetische_Folge

W https://de.wikipedia.org/wiki/Arithmetische_Reihe

7.2 Geometrisch

W https://de.wikipedia.org/wiki/Geometrische_Folge

W https://de.wikipedia.org/wiki/Geometrische_Reihe

Aufgaben

In der Vorlesung werden die Lösungen zu diesen Aufgaben ausführlicher kommentiert.

A 7.1 Setzen Sie die angegebene Zahlenfolge (a_n) um drei weitere Folgenglieder fort und geben Sie eine Bildungsvorschrift für diese Zahlenfolge an:

$$(a_n) = (4, 7, 12, 19, 28, \dots)$$

(Abitur Thüringen 2007)

A 7.2 Für natürliche Zahlen $m \leq n$ und reelles $q \neq 0, 1$ berechne man die Summe $\sum_{k=m}^n q^k$.

8 Gleichungssysteme

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Gleichungssystem>

8.1 Einsetzungsverfahren

W <https://de.wikipedia.org/wiki/Einsetzungsverfahren>

8.2 Additionsverfahren

W [https://de.wikipedia.org/wiki/Additionsverfahren_\(Mathematik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Additionsverfahren_(Mathematik))

Aufgaben

In der Vorlesung werden die Lösungen zu diesen Aufgaben ausführlicher kommentiert.

A 8.1 Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrcrcl} 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 7 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 14 \\ x_1 & - & 5x_2 & - & 4x_3 & = & -21 \end{array}$$

(Abitur Baden-Württemberg 2007)

A 8.2 Im Intervall $[-2, 2]$ soll die Funktion $f(x) = \frac{4}{2 + \cos(\frac{\pi}{2}x)}$ durch eine ganzrationale Funktion g vom Grad 2 angenähert werden, die mit f an den Stellen $-2, 0$ und 2 übereinstimmt. Bestimmen Sie einen geeigneten Funktionsterm für g .

(Abitur Baden-Württemberg 2007)