Prof. Dr. Sill

Aufgaben zur Entwicklung des logischen Denkens

Scherzhafte Aufgaben zur Anwendung indirekter Schlussweisen

1. Die drei Weisen
   Drei Weise schlafen unter einem Baum. Da kommt ein Spaßvogel des Weges und macht allen drein die Stirn schwarz. Nach dem Aufwachen fangen alle an, über die schwarze Stirn der anderen zu lachen. Nach einiger Zeit verstummen sie gleichzeitig, da sie sie sich überlegt haben, dass die eigene Stirn auch schwarz sein muss. Durch welche Überlegung sind sie darauf gekommen?
2. Für ein Ratespiel stehen 5 Hüte zur Verfügung, 3 weiße und 2 schwarze. Arne, Bert und Christine setzen sich hintereinander, so dass jeder nur die vor ihm Sitzenden sieht, d.h. Arne sieht Bert und Christine, Bert sieht nur Christine und Christine sieht keinen der beiden. Dann werden ihnen die Augen verbunden und jedem wird einer der fünf Hüte aufgesetzt. Nachdem ihnen die Augenbinden wieder abgenommen wurden, sollen sie die Farbe ihres Hutes, den sie nicht sehen können, erraten.
   Arne sagt: „Ich weiß es nicht.“ Daraufhin sagt Bert: „Ich weiß es auch nicht.“
   Christine sagt als letzte: „Aber ich weiß nun, welche Farbe mein Hut hat.“
   Welche Farbe hat der Hut von Christine und durch welche Überlegung ist sie darauf gekommen?
3. Auf einem Tischen stehen ein Glas Apfelsaft und ein Glas Kirschsaft. In beiden Gläsern ist die gleiche Menge Saft. Nun wird ein Löffel voll Apfelsaft in das Glas mit Kirschsaft gegeben. Nachdem das Gemisch gründlich umgerührt wurde, wird mit dem Löffel die gleiche Menge von dem Gemisch aus Kirschsaft und Apfelsaft in das Glas Apfelsaft zurück gefüllt.
   Befindet sich danach mehr Apfelsaft im Kirschsaft oder mehr Kirschsaft im Apfelsaft?
4. Ein Dominostein, der zwei der Zahlen (auch zwei gleiche) von 0 bis 6 enthält, soll erraten werden. Der Spielleiter nennt dem Mitspieler A das Produkt der beiden Zahlen auf dem Dominostein und dem Mitspieler B die Summe der beiden Zahlen, aber so, dass keiner die Zahl des anderen kennt. Nun ergibt sich folgender Dialog:
   A: „Ich weiß es nicht.“ B: „Ich weiß es auch nicht.“
   A: „Ich weiß es immer noch nicht.“ B: „Ich weiß es auch immer noch nicht.“
   A: „Jetzt weiß ich es!“
   Welcher Dominostein sollte erraten werden und wie ist A darauf gekommen?
5. Ein Schiffbrüchiger strandet auf einer Insel. Er weiß, dass er sich entweder auf der Lügeninsel befindet, deren Einwohner ständig lügen, oder auf der Wahrheitsinsel, deren Einwohner stets die Wahrheit sagen. Die Bewohner der beiden Inseln besuchen sich oft gegenseitig. Als der Schiffbrüchige einen Menschen trifft, von dem er nicht weiß, ob er ein Bewohner dieser Insel oder ein Gast von der anderen Insel ist, stellt er diesem eine Frage. Der Befragte antwortet mit Ja oder Nein. Danach weiß der Schiffbrüchige, auf welcher Insel er sich befindet.
   Welche Frage hat er gestellt und wo befindet er sich?
6. Bereits aus dem Altertum ist bekannt, dass sich bei der Bildung von Mengen auch logische Widersprüche ergeben können. Berühmt wurde die Geschichte von Epimenides, einem Bewohner der Insel Kreta. Er behauptete: "Alle Kreter sind Lügner". Da er selbst ein Kreter ist, lügt er auch, d. h., sein Satz ist falsch und es sind nicht alle Kreter Lügner. Welche der folgenden Aussagen ist ebenfalls in sich widersprüchlich?
   a) Jede Regel hat eine Ausnahme.
   b) Der Matrose Hein erhält vom Kapitän seines Schiffes den Befehl, alle Matrosen zu rasieren, die sich nicht selbst rasieren.
      Was bedeutet der Befehl für den Matrosen Hein?
   c) Es sei M die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten.
      Gehört die Menge M selbst zu dieser Menge M dazu?

Aufgaben zur Negation

7. Negieren Sie folgende Aussagen bzw. Aussageformen. Geben Sie zwei Formulierungen an.
   a) Ronny ist größer als Stefan.
   b) Der Punkt P liegt außerhalb des Kreises.
   c) Das Quadrat von 3 ist gleich 6.
   d) Die reelle Zahl x ist kleiner als 3.
   e) Das Dreieck ABC ist gleichseitig.
   f) Es gibt eine natürliche Zahl, die größer als ihr Kehrwert ist.
   g) Für alle gebrochenen Zahlen gilt, dass ihr Kehrwert stets kleiner als die Zahl ist.
   h) Es gibt Primzahlen, deren Quadrat wieder eine Primzahl ist.
   i) Primzahlen sind stets größer als 2.
   j) Alle Schwäne sind weiß.
   k) Es gibt einen Schüler, der die Note 6 hat.

Aufgaben zu „höchstens“

8. Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Formulieren Sie die nicht sinnvollen Aussagen um.
   a) Von den Zahlen 4, 5 und 6 sind höchstens drei ungerade.
   b) In einem PKW finden höchstens 100 Menschen Platz.
   c) Ein Dreieck hat höchstens drei rechte Winkel.

Sprachliche Varianten von Konjunktionen, Adjunktionen und Alternativen

9. Formulieren Sie nach Möglichkeit folgende Aussagen als Konjunktion in der sprachlichen Form „A und B“ bzw. als Adjunktion in der sprachlichen Form „A oder B“.
   a) Rechtecke und Rhomben sind Parallelogramme.
   b) $\sqrt{2}$ liegt zwischen 1 und 2.
   c) 7 ist eine ungerade Primzahl.
   d) Für $3\cdot 0{,}2$ kann man sowohl 0,6 als auch 6/10 schreiben.
   e) α und β sind Scheitelwinkel.
   f) Das gesuchte Dreieck ist rechtwinklig bzw. gleichschenklig.
   g) Die Lösungen der Ungleichung sind teils größer als 5, teils kleiner als -1.
   h) Obwohl das Bild der Funktion $y = 2x + 1$ eine Gerade ist, ist y nicht proportional zu x.
   i) Das Dreieck ABC_1, aber auch das Dreieck ABC_2 erfüllen die Bedingungen der Aufgabe.
   j) 2 ist gerade, aber trotzdem eine Primzahl.
   k) Zu den Trapezen gehören die Parallelogramme, ebenso auch die Rechtecke.
   l) Zwar scheint die Sonne, dennoch ist es kalt.

10. In der Umgangssprache und z. T. auch in der Mathematik wird die Aussagenverbindung „A oder B“ verwendet, obwohl „entweder A oder B“ gemeint ist. Überprüfe Sie die folgenden Formulierungen.
    a) Die Tante kommt am Sonnabend oder Sonntag zu Besuch.
    b) Zahlen, die auf 0 oder 5 enden, sind durch 5 teilbar.
    c) Wenn für zwei reelle Zahl a, b gilt $a\cdot b = 0$, so ist $a = 0$ oder $b = 0$.

Sprachliche Varianten von Implikationen und Äquivalenzen

11. Finden Sie möglichst viele verschiedene Formulierungen der folgenden Sätze.
    a) Wenn eine Zahl auf 4 endet, dann ist sie durch 2 teilbar.
    b) Wenn α und β Scheitelwinkel sind, dann sind sie gleich groß.
    c) Wenn zwei Dreiecke kongruent zueinander sind, sind entsprechende Winkel gleich groß.
    d) Wenn eine Zahl kleiner ist als -5, dann ist sie auch kleiner als -3.

12. Formulieren Sie folgende Aussagen als Implikationen.
    a) Alle geraden Zahlen sind durch 2 teilbar.
    b) Jedes gleichwinklige Dreieck ist auch gleichseitig.
    c) Jedes Rechteck ist ein Parallelogramm.
    d) Winkel, deren Schenkel paarweise senkrecht aufeinander stehen, sind kongruent.
    e) Dreiecke, die in drei Seiten übereinstimmen, sind kongruent.
    f) Kongruente Dreiecke sind ähnlich.
13. Kreuzen Sie an, ob die Bedingung notwendig oder hinreichend ist.

	notwendig	hinreichend	
1. Dass das Dreieck ABC drei kongruente Seiten hat, ist			dafür, dass es gleichschenklig ist.
2. Die Teilbarkeit einer natürlichen Zahl durch 17 ist			für die Teilbarkeit dieser Zahl durch 34.
3. Die Teilbarkeit einer natürlichen Zahl durch 26 ist			für die Teilbarkeit dieser Zahl durch 13.
4. Die Bedingung, dass das Viereck ABCD vier kongruente Seiten hat, ist			dafür, dass es ein Quadrat ist.
5. Die Bedingung, dass das Viereck ein Rechteck ist, ist			dafür, dass es ein Parallelogramm ist.
6. Die Bedingung $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$ ist			dafür, dass $x^2 + px + q = 0$ eine Doppellösung hat.

14. Entscheiden Sie, ob die Aussagen 1. bis 6. logisch gleichwertig sind zum Satz:
    Wenn eine Zahl durch 4 teilbar ist, so ist sie auch durch 2 teilbar.
    1. Eine Zahl, die durch 4 teilbar ist, ist auch durch 2 teilbar.
    2. Für alle Zahlen gilt, ist eine Zahl durch 4 teilbar, so ist sie auch durch 2 teilbar.
    3. Die Teilbarkeit durch 4 ist eine hinreichende Bedingung für die Teilbarkeit durch 2.
    4. Die Teilbarkeit durch 2 ist eine notwendige Bedingung für die Teilbarkeit durch 4.
    5. Jede natürliche Zahl ist durch 2 teilbar, wenn sie durch 4 teilbar ist.
    6. Eine Zahl ist nur dann durch 4 teilbar, wenn sie durch 2 teilbar ist.
15. In der Umgangssprache wird manchmal die Aussagenverbindung „wenn A, dann B“ im Sinne „A genau dann, wenn B“ verwendet. Bei welchen Formulierungen könnte dies der Fall sein?
    a) Wenn morgen die Sonne scheint, gehe ich baden.
    b) Wenn Peter 16 Jahre alt geworden ist, kann er einen Personalausweis beantragen.
    c) Wenn Claudia das Abitur geschafft hat, dann möchte sie studieren.
16. Geben Sie eine andere Formulierung der Aussagen an, bei der die Worte „und“, „oder“, „wenn, dann“, „ es gibt“ „für alle“ verwendet werden.
    a) Die Zahl 24 ist durch 6 und durch 8 aber nicht durch 7 teilbar.
    b) Obwohl 2 eine ganze Zahl ist, ist sie auch eine gebrochene Zahl.
    c) Die Lösungen der Ungleichung $x^2 > 9$ sind teils größer als 3 teils kleiner als -3.
    d) Jedes Quadrat ist auch ein Rechteck.
    e) Die Gegenwinkel in einem Parallelogramm sind gleich groß.

Umkehrungen von Sätzen

17. Überlegen Sie, ob bei den folgenden Sätzen der zweite (bzw. die weiteren) die Umkehrung des ersten Satzes ist. Ist das nicht der Fall, formulieren Sie eine korrekte Umkehrung.
    a) 1) Wenn Peter die Meisterprüfung bestanden hat, bekommt er mehr Lohn.
       2) Peter bekommt mehr Lohn, wenn er die Meisterprüfung bestanden hat.
    b) 1) Alle Handballspieler der Schule, die ein schlechtes Zeugnis bekommen, müssen aus der Mannschaft ausscheiden.

2) Alle Schüler der Schule, die ein gutes Zeugnis bekommen, müssen in die Mannschaft eintreten.

c) 1) Sind zwei Winkel Stufenwinkel und sind die geschnittenen Geraden zueinander parallel, so sind die beiden Winkel kongruent.
   2) Sind zwei Winkel Stufenwinkel und sind die beiden Winkel kongruent, so sind die geschnittenen Geraden zueinander parallel.

d) 1) Alle Zahlen, deren Quersumme durch 9 teilbar ist, sind durch 9 teilbar.
   2) Durch 9 teilbar sind alle Zahlen, deren Quersumme durch 9 teilbar ist.
   3) Wenn alle Zahlen durch 9 teilbar sind, so ist deren Quersumme auch durch 9 teilbar.
   4) Alle Zahlen, deren Quersumme nicht durch 9 teilbar ist, sind nicht durch 9 teilbar.

e) 1) Wenn eine Gerade g durch den Mittelpunkt eines Kreises geht, so schneidet sie diesen Kreis in zwei Punkten.
   2) Wenn eine Gerade einen Kreis nicht in zwei Punkten schneidet, so geht sie nicht durch den Mittelpunkt des Kreises.

Erkennen der logischen Äquivalenz von Ausdrücken

18. Formulieren Sie folgende Äquivalenzen. Verwenden Sie:
   - bei 1) bis 4) A: Die Zahl ist durch 3 teilbar. B: Die Zahl ist durch 5 teilbar.
   - bei 5) und 6) A: Eine Zahl ist durch 4 teilbar. B: Eine Zahl ist durch 2 teilbar.
   - bei 7) x: Primzahl H(x): x ist ungerade.
   - bei 8) x: reelle Zahl H(x): x ist durch 0 teilbar.
   - bei der Lösung die Formulierung: Die folgenden Aussagen sind logisch äquivalent zueinander.

   1) $\neg(A \land B) \equiv \neg A \lor \neg B$
   2) $\neg(A \lor B) \equiv \neg A \land \neg B$
   3) $\neg(A \land B) \equiv A \rightarrow \neg B$
   4) $A \lor B \equiv \neg A \rightarrow B$
   5) $A \rightarrow B \equiv \neg A \lor B$
   6) $A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$
   7) $\neg \forall x \mid H(x) \equiv \exists x \mid \neg H(x)$
   8) $\neg \exists x \mid H(x) \equiv \forall x \mid \neg H(x)$

19. Welche der Aussagen B bis K sind logisch äquivalent zu A und welche sind wahr?
   A: Peripheriewinkel über demselben Bogen eines Kreises sind gleich groß.
   B: Wenn α und β Winkel über demselben Bogen eines Kreises sind und ihre Scheitel auf dem Kreis liegen, dann sind sie gleich groß.
   C: Gleichgroße Peripheriewinkel eines Kreises liegen über demselben Bogen eines Kreises.
   D: Wenn α und β Winkel über demselben Bogen eines Kreises sind, dann sind sie gleich groß.
   E: Winkel sind dann gleich groß, wenn sie Peripheriewinkel über demselben Bogen eines Kreises sind.
   F: Wenn α und β Peripheriewinkel über gleichlangen Bögen eines Kreises sind, dann sind es gleichgroße Winkel.
   G: Wenn zwei Winkel eines Kreises gleich groß sind, so sind es Peripheriewinkel über gleichlangen Bögen.
   H: Wenn zwei Winkel eines Kreises nicht gleich groß sind, dann sind es nicht Peripheriewinkel über demselben Bogen eines Kreises.
   I: Wenn α und β gleich groß sind und über demselben Bogen liegen, dann sind es Peripheriewinkel eines Kreises, dem dieser Bogen angehört.
   J: Wenn zwei Winkel nicht über demselben Bogen eines Kreises liegen und nicht Peripheriewinkel dieses Kreises sind, dann sind diese Winkel nicht gleich groß.
   K: Wenn zwei Winkel verschieden groß sind, dann sind es nicht Peripheriewinkel oder sie liegen nicht über demselben Bogen eines Kreises.

20. Welche der Aussagen B bis F sind äquivalent zu A?

A: Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.

B: Wenn Geraden Mittelsenkrechten eines Dreiecks sind, dann schneiden sie einander in einem Punkt.

C: Wenn Geraden nicht Mittelsenkrechten eines Dreiecks sind, dann schneiden sie einander nicht in einem Punkt.

D: Wenn Geraden einander nicht in einem Punkt schneiden, dann sind es keine Mittelsenkrechten eines Dreiecks.

E: Wenn Geraden einander in einem Punkt schneiden, dann sind sie Mittelsenkrechten eines Dreiecks.

F: Wenn die Mittelsenkrechten eines n-Ecks sich in einem Punkt schneiden, dann ist das n-Eck ein Dreieck.