

Zusammenstellung von Zielen zum sicheren Wissen und Können für den Mittleren Schulabschluss

Es werden die Ziele aus den bisher erstellten Broschüren zum Sicherem Wissen und Können (SWK) zusammengestellt, die seit 2003 in Projekten des Landesinstitutes Mecklenburg-Vorpommern zusammen mit Lehrerinnen und Lehren in Auswertung von landesweiten Vergleichsarbeiten der Jahre 1998 bis 2002 entstanden sind. Die Broschüren enthalten weiterhin didaktische Analysen der Ziele sowie Aufgaben.

1 Sicheres Wissen und Können im Rechnen mit Zahlen und Größen¹

1.1 Rechnen mit natürlichen Zahlen

Die Schüler und Schülerinnen

- können mithilfe der Rundungsregeln natürliche Zahlen auf 10er, 100er und 1000er runden, wobei maximal eine weitere Stelle mit gerundet wird,
- können zwei natürliche Zahlen mit maximal 6 Stellen vergleichen,
- kennen die Grundaufgabengleichungen der Addition und Multiplikation und können damit sowie mit Verfahren des des mündlichen Rechens folgende Aufgaben im Kopf lösen:
 - alle Grundrecharten mit 0 und 1 und einer dreistelligen Zahl
 - addieren zweier zweistelliger Zahlen
 - subtrahieren einer einstelligen von einer zweistelligen Zahl
 - multiplizieren einer einstelligen mit einer zweistelligen Zahl
 - dividieren ohne Rest einer zweistelligen durch eine einstelligen Zahl
 - multiplizieren und dividieren mit 10, 100 und 1000,
- können schriftliche Rechenverfahren zur Lösung folgender Aufgaben anwenden:
 - addieren von drei dreistelligen Zahlen
 - subtrahieren einer dreistelligen von einer dreistelligen Zahl
 - multiplizieren einer zweistelligen mit einer dreistelligen Zahl,
- können große Zahlen bis zum Stellenwert Milliarde lesen und in eine Stellentafel eintragen sowie eine solche verbal gegebene Zahl mit Ziffern schreiben,
- können römische Zahlen bis 20 lesen und schreiben,
- kennen die Vorrangregeln können sie in Termen mit maximal 4 Rechenoperationen identifizieren und anwenden,
- können in Anwendung der Rechengesetze (Kommutativgesetz, Assoziativgesetz, Distributivgesetz) Rechenvorteile erkennen,

¹ Auszug aus: Sill, H.-D.; Hoffmann, S.; Kleinschmidt, E.; Kowaleczko, E.; Kurtzmann, G.; Leye, D.; Lindstädt, M.; Roscher M.: Sicheres Wissen und Können im Rechnen mit Zahlen und Größen : Sekundarstufe I. - Schwerin : Landesinstitut für Schule und Ausbildung Mecklenburg-Vorpommern, 2009

- können folgende mathematische Begriffe identifizieren: addieren, Summe, Summand, subtrahieren, Differenz, multiplizieren, Produkt, Faktor, dividieren, Quotient und können einen Rechenausdruck angeben, der mit diesen Begriffen beschrieben wird und der bis zu zwei Rechenoperationen und Klammern enthält,
- können einen Rechenausdruck zu einer Beschreibung eines außermathematischen Sachverhalts angeben, in dem folgende Wörter bzw. Sachsituationen vorkommen:
 - o Addition: zusammen; mehr; vermehren; dazugeben; verlängern; einnehmen;
 - o Subtraktion: wegnehmen; vermindern; verlieren; verringern; abziehen; verkleinern; abtrennen; ausgeben;
 - o Multiplikation: vervielfachen; verdoppeln; das Dreifache (Vierfache, usw.); das 1,5-fache (2,6-faches, usw.); ... zu je ...; ... von ...;
Situationen: Zusammenfassen gleichartiger Mengen; Vervielfachen einer Größe; Abzählen rechteckiger Schemata; Bilden von Paaren aus den Elementen zweier Mengen (Bezug zur Produktregel der Kombinatorik)
 - o Division: aufteilen, verteilen, halbieren, pro; von; durchschnittlich;
Situationen: Aufteilen einer Menge in gleichgroße Teilmengen; gleichmäßiges Verteilen der Elemente einer Menge; Berechnen des Durchschnitts; Normierung auf eine Einheit (pro),
- können die Begriffe Zehnerpotenz, Quadratzahl, Basis (positive rationale Zahl), Exponent (natürliche und ab Kl. 9 ganze Zahl), Potenz, Wurzel bzw. Quadratwurzel (ab Kl. 7) identifizieren und realisieren und kennen die Quadratzahlen bis 15 auswendig.

1.2 Rechnen mit gebrochenen Zahlen

Die Schülerinnen und Schüler

- kennen die Begriffe Zähler, Nenner, echter und unechter Bruch,
- können gemischte Zahlen als Summe aus einer natürlichen Zahl und einem Bruch schreiben,
- können Teile eines Ganzen, die in zeichnerischer Form gegeben sind, durch einen Bruch darstellen und zu einem Bruch entsprechende Teile markieren,
- können Teile einer Anzahl, die in zeichnerischer oder verbaler Form gegeben sind, durch einen Bruch darstellen und Teile einer Anzahl bestimmen,
- können Bruchteile von Größen bestimmen, wenn die Größenangabe durch den Nenner teilbar ist und zu gegeben Bruchteilen das Ganze bestimmen,
- können eine Divisionsaufgabe als Bruch schreiben und umgekehrt,
- können Brüche kürzen, erweitern, addieren, subtrahieren und multiplizieren, wenn die Rechnungen im Kopf ausgeführt werden können,
- können das Doppelte und die Hälfte eines Bruches angeben,
- kennen die Begriffe Dezimalbruch und Dezimalstelle
- kennen folgende Zuordnungen von Dezimalbrüchen und gemeinen Brüchen
 $\frac{1}{2} = 0,5$ $\frac{1}{4} = 0,25$ $\frac{3}{4} = 0,75$ $\frac{1}{5} = 0,2$ $\frac{1}{10} = 0,1$ sowie die Vielfachen von $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{10}$,
- können Dezimalbrüche mit Zehnerpotenzen (bis 1000) multiplizieren und durch diese Zehnerpotenzen dividieren,
- können Dezimalbrüche mit maximal 3 Dezimalstellen als Zehnerbrüche schreiben und umgekehrt,
- können 2 Dezimalbrüche mit maximal 2 Dezimalstellen und unterschiedlicher Stellenzahl addieren und subtrahieren, wenn diese Rechnungen im Kopf ausgeführt werden können,

- können bis zu 3 Dezimalbrüche mit maximal 3 Dezimalstellen und gleiche Anzahl von Dezimalstellen schriftlich addieren,
- können 2 Dezimalbrüchen mit maximal einer Dezimalstelle multiplizieren, wenn dies im Kopf ausgeführt werden kann,
- können 2 Dezimalbrüchen mit maximal 2 Dezimalstelle schriftlich multiplizieren

1.3 Rechnen mit rationalen Zahlen

Die Schülerinnen und Schüler

- kennen die Bezeichnung rationale Zahlen als Oberbegriff für die gebrochenen Zahlen und die zu ihnen entgegengesetzten negativen Zahlen,
- können negative Zahlen- und Größenangaben in Sachzusammenhängen interpretieren und entsprechende Sachverhalte sinnvoll mit negativen Zahlen- und Größenangaben beschreiben, z. B. Temperaturangaben auf der Celsiusskala, Höhenangaben in Bezug auf NN, Etagennummern, Schulden,
- können rationalen Zahlen Punkten einer Zahlengeraden zuordnen und umgekehrt zu Punkten auf einer Zahlengeraden die zugeordnete rationale Zahl angeben, wobei eine Beschränkung auf ganze Zahlen bzw. Zahlen mit einer Kommastelle ($\dots,5$) erfolgt,
- können ganze Zahlen durch Orientierung an ihrer Lage auf der Zahlengeraden ordnen,
- können den Abstand (den Unterschied) zweier ganzer Zahlen berechnen,
- können Additions- und Subtraktionsaufgaben mit ganzen Zahlen zu Sachverhalten aus dem Alltag (Temperaturen, Plus- und Minuspunkte, Kontobewegungen) lösen,
- können verbale Beschreibungen von Rechenausdrücken mit ganzen Zahlen und maximal zwei Rechenoperationen als Term angeben und einen entsprechenden Term verbal beschreiben,
- können zweistelligen ganze Zahlen bzw. rationale Dezimalzahlen mit zwei wesentlichen Ziffern ohne Hilfsmittel addieren und subtrahieren,
- können einstellige ganze Zahlen ohne Hilfsmittel multiplizieren und die zugeordneten Divisionsaufgaben lösen,
- können Werte aus grafischen Darstellungen mit einer negativen y-Achse ablesen.

1.4 Prozentrechnung

Die Schülerinnen und Schüler

- kennen die Bedeutung von 1% als „ein Hundertstel“ und als "einer von hundert",
- wissen, dass die Angabe von Prozenten nur in Verbindung mit einer Bezugsgröße (Grundwert) sinnvoll ist, also keinen absoluten Charakter hat,
- wissen, dass hinter einer Prozentangabe stets ein Verhältnis von zwei Größenangaben oder zweier Anzahlen steht und das Verhältnis mit dem Wort "von" ausgedrückt wird (3 % sind z. B. 3 m von 100 m oder 12 Schüler von 400 Schülern),
- können Prozente als Anteile von Figuren darstellen, interpretieren und vergleichen,
- kennen bequeme Prozentsätze (1%, 5%, 10%, 20%, 25%, $33\frac{1}{3}\%$, 50%, $66\frac{2}{3}\%$, 75%, 150%, 200%) und können mit diesen unter Anwendung ihres Könnens in der Bruchrechnung und ohne Taschenrechner Prozentwerte, Prozentsätze und Grundwerte berechnen bzw. überschlagen,

- können einfache Grundaufgaben der Prozentrechnung mit einem Taschenrechner ohne Verwendung von Gleichungen, Formeln oder Fachbegriffen lösen,
- können einfache Aufgaben zu Veränderungen lösen (Steigerung und Senkung um bzw. auf),
- können den Zinssatz als Prozentsatz im täglichen Leben verwenden (Zinsen, Guthaben, Zinssatz und Rabatt).

1.5 Arbeiten mit Hilfsmitteln

Die Schülerinnen und Schüler

- kennen ihren Taschenrechner mit den spezifischen Tasten u.a. für die Rechenoperationen, Vorzeicheneingabe, Zweitbelegung,
- können sicher mit dem Taschenrechner Aufgaben mit mehreren Rechenoperationen ausrechnen,
- wissen, dass der Taschenrechner mit der Vorrangautomatik arbeitet,
- können Aufgaben mit unterschiedlichen Rechenoperationen und den gemeinen Brüchen unter Zuhilfenahme der Bruchtaste mit dem Taschenrechner ausrechnen,
- können Bruchterme mit Summen und Differenzen im Nenner mit dem Taschenrechner ausrechnen.

1.6 Näherungswerte und sinnvolle Genauigkeit

Die Schülerinnen und Schüler

- können Dezimalbrüche auf Einer, Zehntel oder Tausendstel runden,
- können sinnvolle Überschläge vornehmen,
- wissen, dass Größenangaben bei Sachaufgaben in der Regel immer Näherungswerte sind,
- können auf Grund der Genauigkeit eines Messinstrumentes mögliche Messwerte angeben und identifizieren
- wissen, dass mit den Ziffern eines Näherungswertes, insbesondere mit den Dezimalstellen die Genauigkeit zum Ausdruck gebracht werden kann,
- wissen, was die Angabe eines Ergebnisses mit sinnvoller Genauigkeit im Sachrechnen von dem Sachverhalt, von der Güte des verwendeten Modells und der Genauigkeit der Ausgangswerte abhängig ist,
- können entsprechend dem Sachverhalt Größen mit sinnvoller Genauigkeit angeben,
- kennen die Regel der Zifferzählung zum Multiplizieren und Dividieren zweier Näherungswerte mit sinnvoller Genauigkeit und können sie anwenden.

1.7 Zur Bestimmung von Anzahlen

Die Schülerinnen und Schüler

- können die Anzahl von Möglichkeiten durch systematisches Probieren bestimmen, wenn die gesuchte Anzahl nicht größer als 20 ist,
- können die Anzahl von Möglichkeiten mithilfe der Produktregel der Kombinatorik bestimmen, wenn sich die Folge von Entscheidungen aus dem Sachverhalt in einfacher Weise ergibt.

2 Zum Sicherem Wissen und Können im Arbeiten mit Größen²

Auf Grund der großen Bedeutung, die das Arbeiten mit Größen in vielen Bereichen hat, war es nicht leicht, eine Beschränkung und Gewichtung der anzueignenden Wissens- und Könnenselemente vorzunehmen. Als entscheidendes Kriterium für die Auswahl dieser Elemente haben wir ihre Relevanz für das tägliche Leben und die berufliche Ausbildung gewählt. Damit überhaupt reale Chancen für das Erreichen der angestrebten Qualität in der Beherrschung dieser Elemente vorhanden sind, halten wir eine möglichst deutliche Einschränkung für erforderlich. Im Ergebnis dieser Überlegungen schlagen wir vor, bei den einzelnen Größen sicheres Wissen und Können bei den Größenvorstellungen sowie im Umrechnen nur hinsichtlich folgender Einheiten anzustreben.

Währung: Cent, Euro

Zeit: Sekunde, Minute, Stunde, Tag

Masse: Gramm, Kilogramm, Tonne

Länge: Millimeter, Zentimeter, Meter, Kilometer

Flächeninhalt: Quadratzentimeter, Quadratmeter, Hektar, Quadratkilometer

Rauminhalt: Milliliter, Kubikzentimeter, Kubikmeter

In der vorliegenden Broschüre beschränken wir uns deshalb bei allen Aufgaben auf die genannten Einheiten. Zum Erreichen der angestrebten Qualität sollten die Schüler zu diesen Einheiten bzw. einigen ihrer Vielfachen sich sofort gedankliche Repräsentanten vorstellen und ohne Bezüge zu Einheitenketten oder Größengleichungen die Umrechnungszahlen unmittelbar nennen können.

Die angegebene Beschränkung auf bestimmte Einheiten bedeutet nicht, dass bei der Erarbeitung bzw. Wiederholung der Größen und ihrer Einheiten sowie bei der Lösung von Sachaufgaben auf die anderen Einheiten verzichtet wird. Die Schüler müssen in diesen Fällen in der Lage sein, diese Anforderungen als Problemaufgaben zu erkennen und sie mit geeigneten heuristischen Hilfsmitteln oder Nachschlagewerken lösen können.

3 Sicheres Wissen und Können in der ebenen Geometrie³

3.1 Kenntnisse zu Grundbegriffen und Zeichenfertigkeiten

Die Schüler können die geometrische Figuren Punkt, Gerade, Strecke und Strahl sowie die Relationen parallel und senkrecht zueinander identifizieren. Sie sind in der Lage, gemeinsame und unterschiedliche Bedeutungen dieser Wörter in der Mathematik und in anderen Zusammenhängen zu erkennen und zu beschreiben.

Es wird im Sprechen und in der Schreibweise nicht zwischen dem geometrischen Objekt und seinem Maß unterschieden.

Die Schüler können spitze, rechte, stumpfe und gestreckte Winkel benennen.

Die Schüler besitzen sichere Fertigkeiten im Ausführen folgender Handlungen:

- Zeichnen von Punkten, Geraden, Strecken (nach gegebenen Maßen) und Strahlen

² Auszug aus: Sill, H.-D., Funk, Th.; Grueter, H. G.; Luther, K.; Marschke, E.; Schädel, I.; Schwedhelm, G.; Siefke, S.: Sicheres Wissen und Können beim Arbeiten mit Größen im Mathematikunterricht. – Schwerin : Landesinstitut für Schule und Ausbildung Mecklenburg-Vorpommern, 2004

³ Auszug aus: Sill, H.-D.; Bluhm, S.; Brandt, K.; Heldner, I.; Julius, R.; Lindstädt, M.; Lorenz, J.; Merchel, M.; Roscher, M.; Scherff, K.; Seebahn, A.; Sobjetzki, Ch.: Sicheres Wissen und Können in der ebenen Geometrie. - Schwerin : Landesinstitut für Schule und Ausbildung Mecklenburg-Vorpommern, 2005

- Zeichnen von Parallelen zu einer Geraden durch einen Punkt bzw. in einem gegebenen Abstand mit dem Geodreieck
- Zeichnen einer Senkrechten zu einer Geraden bzw. Strecke durch einen Punkt auf der Geraden/Strecke mit dem Geodreieck (Senkrechte errichten)
- Zeichnen einer Senkrechten zu einer Geraden bzw. Strecke durch einen Punkt außerhalb der Geraden/Strecke mit dem Geodreieck (Lot fällen)
- Zeichnen/Antragen eines Winkels in verschiedenen Lagen von 0° bis 180° mit einem Geodreieck
- Messen eines Winkels von 0° bis 180° in verschiedenen Lagen mit einem Geodreieck
- Messen von Strecken mit einem Lineal
- Bestimmen des Mittelpunktes einer Strecke, Möglichkeiten: mit dem Zirkel, Messen der Strecke und Halbieren des Messwertes, Probieren mit dem Geodreieck

Die Schüler sind in der Lage, gleiche Winkel an geschnittenen Geraden bzw. Parallelen zu erkennen bzw. fehlende Winkel berechnen zu können. Dabei ist es nicht erforderlich, die entsprechenden Begriffe (Scheitelwinkel, Nebenwinkel, Stufenwinkel, Wechselwinkel) sowie die Bezeichnungen der betreffenden Sätze zu verwenden.

3.2 Wissen und Können zu Bewegungen und Symmetrien

Die Schüler haben Fertigkeiten im Eintragen und Ablesen von Punkten in ein rechtwinkliges Koordinatensystem, wobei bis zur Einführung der rationalen Zahlen eine Beschränkung auf den ersten Quadranten erfolgt. Sie können die Achsen mit x-Achse und y-Achse bezeichnen.

Die Schüler haben zu den Bewegungen Spiegelung, Verschiebung und Drehung inhaltliche Vorstellungen im Sinne einer physikalischen Bewegung und nutzen diese beim Realisieren und Identifizieren von Bewegungen.

Die Schüler können in achsensymmetrischen Figuren eine Symmetrieachse mit einem Lineal ohne Konstruktion einzeichnen. Die Schüler können eine achsensymmetrischen Figur auf kariertem Papier unter Nutzung der Gitterpunkte herstellen bzw. ergänzen.

Die Schüler können auf kariertem Papier einfache Bandornamente herstellen.

Die Drehung einer Figur wird nur für sehr einfache Fälle auf kariertem Papier verlangt.

Dabei werden in der Regel Figuren verwendet, die als Ganzes wirken.

Die Schüler sollen in einfachen Fällen untersuchen können, ob eine Figur aus einer anderen durch Verschiebung hervorgegangen ist. Die Schüler können auf kariertem und weißem Papier Verschiebungen einfacher Figuren durch Parallelverschiebung zeichnen.

Das Wort „kongruent“ gehört als Synonym mit „deckungsgleich“ zum sicheren Wortschatz der Schüler. Die Schüler können Figurenpaare auf Unterschiede untersuchen und eine Aussage über die Kongruenz treffen.

3.3 Wissen und Können zu Dreiecken

Die Schüler verwenden den Begriff Figur für beliebige geradlinig oder krummlinig begrenzte ebene Figuren. Die Namen der Figuren sind im Denken der Schüler sowohl mit der Begrenzungslinie als auch mit der Fläche verbunden.

Die Schüler wissen, dass das Dreieck eine stabile Figur ist und können dies auf Sachverhalte anwenden.

Die Schüler kennen die „Standardbeschriftung“ von Dreiecken und die damit verbundenen Konventionen und können diese auf andere Beschriftungen anwenden.

Die Schüler können gleichschenklige und rechtwinklige Dreieck in beliebiger Lage identifizieren, realisieren und benennen. Sie können den Basiswinkelsatz anwenden.

Die Schüler wissen, dass bei Vergrößerung einer Seite eines Dreiecks der gegenüberliegende Winkel größer wird und können die Größe von gegenüberliegenden Winkeln bzw. Seiten bei gegebenen Seiten bzw. Winkeln vergleichen.

Die Schüler erkennen bei drei gegebenen Seiten durch dynamische Betrachtungen die Konstruierbarkeit eines Dreiecks.

Die Schüler wissen, dass die Summe der Innenwinkel in einem Dreieck 180° beträgt und können diese Kenntnisse zu Berechnung von Innenwinkeln anwenden.

Die Schüler verstehen unter dem Umfang einer Figur allgemein die Länge des „Randes“ der Figur und können mit dieser Vorstellung Aufgaben zum Bestimmen bzw. Identifizieren des Umfangs von Dreiecken ohne Formelkenntnisse lösen.

Die Schüler können Höhen in beliebigen Dreiecken identifizieren bzw. einzeichnen. Sie wissen, dass der Flächeninhalt eines Dreiecks aus einer Seite und der zugehörigen Höhe berechnet werden kann und können dies auf beliebige Dreiecke anwenden. Bei der Berechnung des Flächeninhalts von Dreiecken, die auf kariertem Papier gegeben sind, können die Schüler den Flächeninhalt auch als Vielfaches einer Flächeneinheit (eines Kästchens) angeben. Die Bezeichnungen LE und FE werden dabei nicht verwendet.

Die Schüler kennen den Satz des Pythagoras in der „Standardformulierung“ $a^2 + b^2 = c^2$ und können diesen Satz auf Dreiecke in allen Lagen und Bezeichnungen anwenden.

Die Schüler wissen, dass man bei drei gegebenen Stücken eines Dreiecks (außer den drei Winkeln) alle übrigen Stücke mit Hilfe von Sätzen der Trigonometrie berechnen kann.

3.4 Wissen und Können zu Vierecken

Die Schüler können Figuren als Viereck, Fünfeck, Sechseck usw. bezeichnen und können solche Figuren skizzieren (ohne Angabe von Maßen).

Die Schüler beherrschen den Begriff „Diagonalen eines Vierecks“

Die Schüler können ohne Formelkenntnisse Umfänge von Vielecken bestimmen (messen/berechnen) sowie zu gegebenen Umfängen Figuren zeichnen.

Die Schüler können Quadrate und Rechtecke benennen, nach Maßen zeichnen, Umfang und Inhalt berechnen, kennen die Formeln $A = a^2$ und $A = a \cdot b$ und die Schnittpunkteigenschaften der Diagonalen.

Die Schüler können Trapeze, Parallelogramme und Drachenvierecke benennen und zeichnen (z. T. mit Vorgaben).

Die Schüler können Beziehungen zwischen den Vierecksbegriffen herstellen. Bei Vorlage eines Objektes wird nur erwartet, dass der Begriff mit dem geringsten Umfang genannt wird, d. h. dass ein Schüler z. B. ein Quadrat als Quadrat und nicht auch als Rechteck, Trapez oder Parallelogramm bezeichnet.

Die Schüler können Eigenschaften der Vierecke nennen und vergleichen, indem sie sich jeweils Prototypen gedanklich vorstellen und untersuchen.

Die Schüler können den Flächeninhalt von Trapezen, Parallelogrammen, Drachenvierecken und einfachen zusammengesetzten Figuren ermitteln, indem sie diese in Quadrate, Rechtecke oder Dreiecke zerlegen.

Es können auch konkave Figuren vorkommen ohne dafür Bezeichnungen zu verwenden.

3.5 Wissen und Können zum Kreis

Die Schüler können Figuren als Kreise erkennen und Kreise nach gegebenen Maßen mit dem Zirkel zeichnen.

Die Schüler beherrschen folgende Bezeichnungen: Mittelpunkt des Kreises, Radius, Durchmesser, Kreisbogen, Tangente sowie die Beziehung $d = 2r$.

Die Worte Kreis, Kreislinie und Kreisfläche verwenden die Schüler als Synonyme.

Sie wissen, dass ein Kreis axialsymmetrisch ist und dass durch 3 gegebene Punkte immer genau ein Kreis geht und durch 4 Punkte nicht immer.

Sie kennen den Namen „Satz des Thales“ und können in Halbkreise rechtwinklige Dreiecke einzeichnen und um rechtwinklige Dreiecke Halbkreise zeichnen.

Sie kennen die Formeln $u = 2\pi r$ und $A = \pi r^2$, wissen, dass π etwa 3,14 ist und können dies auf Sachverhalte anwenden. Für Überschlagsrechnungen verwenden sie für π den Wert 3.

3.6 Wissen und Können zum Maßstab und zur Ähnlichkeit

Die Schüler wissen, dass Maßstabsangaben der Form 1 : n eine Verkleinerung und Angaben der Form n : 1 eine Vergrößerung der Originals beschrieben. Sie können maßstäbliche Vergrößerungen und Verkleinerungen für einfache Figuren (Strecken, Dreiecke, Quadrate, Rechtecke) auf Kästchenpapier vornehmen und Vergrößerungen bzw. Verkleinerungen dieser Figuren identifizieren.

Die Schüler können zu gegebenen Kartenmaßstäben berechnen, welche Strecke in Wirklichkeit einem Zentimeter auf der Karte entspricht. Sie verwenden dabei das Zeichen \square . Sie können in einfachen Fällen Entfernungen auf Karten bestimmen.

Die Schüler können Streckenverhältnisse auch als Bruch angeben.

Sie sind in der Lage, zu einem Dreieck oder Rechteck ein ähnliches durch Berechnen der Seitenlängen bzw. Verwenden der Gleichheit der Winkel zu zeichnen.

Sie können weiterhin zwei Dreiecke in verschiedenen Lagen auf Ähnlichkeit untersuchen, indem sie die Seitenverhältnisse bilden oder die Winkel vergleichen.

Die Schüler können in einer einfachen Figur ähnliche Dreiecke bzw. Strahlensatzfiguren erkennen und Figuren zu Strahlensatzfiguren ergänzen. Sie können fehlende Streckenlängen durch Lösen von Verhältnisgleichungen ermitteln, wobei die Zahlenwerte einfach sind. Sie können auch Aufgabenstellungen unter Verwendung eines Koordinatensystems bearbeiten.

4 Sicheres Wissen und Können zu Körpern⁴

4.1 Allgemeine Begriffe, Merkmale und Eigenschaft

Figur:

Das Wort Figur sollte im Mathematikunterricht generell nur in der Bedeutung von ebenen Figuren, die durch eine Linie begrenzt sind, also einen Flächeninhalt und einen Umfang haben, verwendet

⁴ Auszug aus: Sill, H.-D.; Kowaleczko, E.; Kretzschmar, H.; Lindstedt, E.; Müller, V.; Sabelus, H.: Sicheres Wissen und Können in der räumlichen Geometrie. - Schwerin : Landesinstitut für Schule und Ausbildung Mecklenburg-Vorpommern, 2005

werden. Diese Vorstellung sollte zum sicheren Wissen und Können in der ebenen Geometrie gehören. Über den allgemeinen Figurbegriff der Mathematik, der auch Körper und andere Punktmengen umfasst, können in oberen Klassen interessierte Schüler informiert werden, bei denen dann möglicherweise eine entsprechende Verallgemeinerung ihrer Kenntnisse zum mathematischen Figurbegriff erfolgt.

Körper:

Die Schüler sollten den mathematischen Körperbegriff sicher beherrschen und damit u. a. etwa die folgenden Gedanken verbinden: Körper sind Quader, Würfel, Zylinder, Kegel, Pyramiden, Kugeln und daraus durch Zerlegung oder Zusammensetzung entstandene Objekte. Mit den Namen von Körpern wird die idealisierte Form eines realen Gegenstandes beschrieben, Körper sind mathematische Modelle für reale Gegenstände.

Weitere Gedanken zu Körpern, die zum sicheren Wissen gehören sollten, ergeben sich aus den weiteren Betrachtungen zu Eigenschaften von Körpern.

Ecke, Spitze, Kante:

Die Schüler beherrschen wesentliche Inhalte der Bedeutung der Begriffe Ecke, Spitze und Kante in der Geometrie in etwa der folgenden Weise.

Es ist nicht notwendig, dass sie unter der Ecke eines Körpers lediglich den Eckpunkt vorstellen, sie können durchaus auch ein Gebiet in der Nähe des Eckpunktes im Innern des Körpers vor Augen haben. Wenn die Bezeichnungen der Ecken gesucht sind, sollte nach den Eckpunkten gefragt werden.

Die Bezeichnung Spitze sollte lediglich in Zusammenhang mit den Begriffen Pyramide und Kegel erfolgen. Der Zusammenhang von Spitze und Ecke gehört nicht zum sicheren Wissen.

Unter Kanten sollten im Bereich des sicheren Wissens nur Strecken verstanden werden.

Fläche, Begrenzungsfläche, Oberfläche, Grundfläche, Deckfläche, Seite, Seitenfläche, Mantelfläche, Grundkanten, Seitenkanten:

Die Schüler sollten zur Beschreibung allgemeiner Merkmale von Körpern die Wörter bzw. Redewendungen „Begrenzungsflächen“, „Flächen, die den Körper begrenzen“ oder „Flächen eines Körpers“ sicher verwenden können. Unter einer Fläche oder einer Begrenzungsfläche sollten sie sowohl ebene als auch gekrümmte Flächen verstehen. Damit können alle Körper im Mathematikunterricht durch die Angabe der Art, Anzahl und Lage ihrer Begrenzungsflächen eindeutig charakterisiert werden.

Aufgrund der zweifachen innermathematischen und außermathematischen Bedeutung des Wortes Seitenfläche bzw. Seite sollten diese Bezeichnungen im Rahmen des sicheren Wissens und Könnens nur bei Körpern erfolgen, die eine Grundfläche haben. Bei diesen Körpern sollten die Schüler sowohl eine Grundfläche als auch die Seitenflächen sicher identifizieren können.

Da auch das Wort Oberfläche im Alltag zwei Bedeutungen hat, sollte die mathematische Bedeutung nicht zum sicheren Wissen und Können gehören, zumal wir auch die Formeln für den Oberflächeninhalt nicht dazu rechnen. Bei Aufgabenstellungen zum Oberflächeninhalt kann die Formulierung „Summe der Inhalte aller Begrenzungsflächen“ verwendet werden.

Die Begriffe Deckfläche, Mantelfläche, Grundkante und Seitenkante sollten nicht zum sicheren Wissen der Schüler gehören, da sie zur Identifizierung der Körper und zur Volumenberechnung nicht erforderlich sind und im Alltag kaum eine Rolle spielen.

Länge, Breite, Tiefe, Höhe:

Der Begriff Länge gehört einmal zum sicheren Wissen und Können im Arbeiten mit Größen, auf das hier nicht weiter eingegangen werden soll.

Wegen der üblichen Verwendungen der Begriffe Länge, Breite und Tiefe im Alltag, sollten diese Bedeutungen im Geometrieunterricht ebenfalls zur Angabe von Längenmaßen verwendet werden, obwohl dies zu einer zweifachen Bedeutung des Wortes Breite im Mathematikunterricht führt. Für die Maße eines quaderförmigem Gegenstandes oder Raumes sollten die Bezeichnungen Länge, Breite, Höhe bzw. Breite, Tiefe, Höhe je nach Kontext verwendet werden. Bei innermathematischen Aufgaben sollten mit Blick auf die Körperdarstellung die Bezeichnungen Breite, Tiefe und Höhe benutzt werden. Die Schüler sollten mit diesen verschiedenen Bezeichnungen für die Abmessungen von Quadern sicher umgehen können, ohne dabei über die Unterschiede reflektieren zu können.

Der mathematische Begriff der Höhe sollte aufgrund seiner Bedeutsamkeit für die Volumenberechnung zum sicheren Wissen gehören. Das wesentliche Merkmal in der mathematischen Bedeutung ist im Unterschied zum Alltagsbegriff sein Bezug zur Grundfläche und damit seine Unabhängigkeit von der Lage des Körpers. Die Schüler sollte die Höhe eines Körpers (falls sie existiert) sicher in allen Lagen identifizieren können.

4.2 Merkmale und Eigenschaften von Würfeln und Quadern

Zum sicheren Wissen und Können sollten die Kenntnis der Wörter Würfel und Quader und ihrer mathematischen Bedeutungen (einschließlich ihrer Unterscheidung von den Begriffen Quadrat und Rechteck) sowie das Können im Anwenden der Formel für das Würfel- und Quadervolumen gehören.

4.3 Merkmale und Eigenschaften von Prismen

Zum sicheren Wissen und Können sollte gehören, dass die Schüler in der Lage sind, ein gerades Prisma durch die Angabe der Form und Lage der Begrenzungsflächen beschreiben zu können, die Volumenformel zu kennen und zur Volumenberechnung eine entsprechende Begrenzungsfläche und die dazugehörige Höhe auszuwählen zu können.

Die Kenntnis der Bezeichnung Prisma und die Unterscheidung von geraden und schiefen Prismen rechnen wir nicht zum sicheren Wissen und Können.

4.4 Merkmale und Eigenschaften von Zylindern

Die Schüler sollten das Wort Zylinder in der Bedeutung eines geraden Kreiszylinders sicher kennen, wozu auch die Kenntnis der Abwicklung der Mantelfläche als Rechteck und die Rotationseigenschaft gehören. Sie sollten sicher wissen, wie man das Volumen berechnet und die Berechnung des Oberflächeninhalts auf die Berechnung ebener Figuren zurückführen können.

4.5 Merkmale und Eigenschaften von Pyramiden, Kegeln und Kugeln

Die Schüler sollten die Wörter Pyramide, Kegel und Kugel in folgenden Bedeutungen sicher kennen. Eine Pyramide ist in der Mathematik ein Körper, der als Grundfläche ein Dreieck, ein Viereck, ein Fünfeck usw. und als Seitenflächen Dreiecke hat. Unter einem Kegel in der Mathematik sollten sie einen geraden Kreiskegel verstehen. Zum Begriff Kugel sollten sie wissen, dass es sich um eine gekrümmte Fläche handelt, deren Punkte vom Mittelpunkt der Kugel alle den gleichen Abstand haben. Sie sollten auch die Rotationseigenschaften von Kegel und Kugel sicher kennen. Weiterhin sollten sie die Volumenformel für Pyramiden und Kegel sicher anwenden können.

5 Sicheres Wissen und Können zur Körperdarstellung und sichere Fähigkeiten zur räumlichen Wahrnehmung und räumlichen Vorstellung⁵

5.1 Allgemeine Begriffe und Verfahren zur Darstellung von Körpern

Projektion und Axonometrie

Zur räumlichen Darstellung von Körpern ist es nicht erforderlich, die Darstellungen als Projektionen im mathematischen Sinne zu erfassen. Kenntnisse zu Projektionen sollten deshalb im Mathematikunterricht nur mit einem geringen Grad der Qualität vermittelt werden und nicht zum sicheren Wissen und Können gehören. Die Schüler sollten mindestens eine Vorschrift zur Anfertigung einer räumlichen Darstellung sicher kennen und anwenden können. Für diese Vorschrift sollte keine spezielle Bezeichnung eingeführt werden.

Bild, Schrägbild, Normalbild, Grundriss, Aufriss, Zweitafelbild, Ansicht, Perspektive

Wegen dem meist eingeeengten Verständnis des Wortes „Schrägbild“ und der schwierigen Unterscheidung von Bildern bei schrägen und senkrechten Projektionen, sollte das Wort „Schrägbild“ nicht zum sicheren Wissen und Können gehören. Es wird als ausreichend angesehen, nur vor einer „räumlichen Darstellung“ eines Körpers zu sprechen. Darunter sollten alle Bilder bei Projektionen verstanden werden, die zu anschaulichen Darstellungen führen, also alle Kanten enthalten und einer bestimmten Sicht auf den Körper entsprechen.

Die Schüler sollten sicher wissen, dass es 6 Ansichten eines Körpers gibt, die einer senkrechten Sicht aus 6 Richtungen entsprechen, wobei die Begrenzungsflächen des Körpers möglich senkrecht zur Blickrichtung sind. Dadurch entstehen in der Regel keine räumlichen Darstellungen, da einige Eckpunkte und Kanten zusammenfallen. Sie sollten die Bezeichnungen Ansicht von vorn (Vorderansicht), Ansicht von oben (Draufsicht) und Ansicht von links bzw. rechts sicher kennen. Die sichere Kenntnis der Wörter Grundriss und Aufriss wird nicht erwartet, da sie in ihrer mathematischen Bedeutung im Alltag eine geringe Rolle spielen.

Verfahren zur Herstellung von räumlichen Darstellungen und Ansichten

Die Schüler können Schrägbilder von Würfeln, Würfelbauten, Quadern und Pyramiden mit quadratischer oder rechteckiger Grundfläche auf Gitterpapier skizzieren und zeichnen. Sie verwenden dabei eine feste Vorschrift zur Bestimmung des Endpunktes einer Tiefenlinie.

Die Schüler haben folgende Kenntnisse über die Anfertigung räumlicher Darstellungen auf weißem Papier und können diese zum Skizzieren oder Zeichnen von Darstellungen elementarer Körpern und einfachen Zusammensetzungen und Zerlegungen anwenden.

- Die Vorderfläche des Körpers wird in wahrer Größe dargestellt.
- Die nach hinten verlaufenden Kanten werden unter einem Winkel von 45° nach rechts oder nach links und um die Hälfte verkürzt angetragen.
- Die nicht sichtbaren Kanten werden gestrichelt oder dünn gezeichnet. Sie können auch weggelassen werden.

Die Schüler können Ansichten von oben und von vorne von elementarer Körpern und einfachen Zusammensetzungen und Zerlegungen anfertigen. Sie verwenden dabei die gegebenen Maße. Die nicht sichtbaren Kanten werden gestrichelt gezeichnet. Eine Rissachse muss nicht gezeichnet werden. Die Eckpunkte werden in der Regel nicht beschriftet.

Bei allen Darstellungen sind die Schüler daran gewöhnt, sich zuerst die betreffende Ansicht des Körpers vorzustellen und dann mit der Skizze oder Zeichnung zu beginnen.

⁵ Auszug aus: Sill, H.-D.; Kowaleczko, E.; Kretzschmar, H.; Lindstedt, E.; Müller, V.; Sabelus, H.: Sicheres Wissen und Können in der räumlichen Geometrie. - Schwerin : Landesinstitut für Schule und Ausbildung Mecklenburg-Vorpommern, 2005

5.2 Zur Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens

Zu den verwendeten Körpern und ihrer Darstellung

Als Körperbeispiele wurden nur folgende verwendet:

- a) Elementare Körper: Würfel, Quader, gerader Zylinder, gerade Pyramide (maximal sechsseitig), gerader Kreiskegel, Kugel
- b) Einfache gerade Prismen, die in der Praxis auftreten und als Ganzes betrachtet werden sollten: dreiseitiges Prisma (Hausdach), Prisma mit trapezförmiger Grundfläche (Graben, Deich)
- c) Einfache, aus elementaren Körpern und einfachen Prismen zusammengesetzte bzw. in solche zerlegbare Körper mit möglichst praktischem Bezug: Winkel, Treppenstufe, Haus mit Dach, Stahlträger (T-, U-förmig)

Bei den verwendeten Darstellungen wurde folgendes beachtet:

- Bei Körpern, die nur ebene Begrenzungsflächen haben (z. B. Würfel, Quader, Prismen) sowie bei liegenden Zylindern ist stets eine Fläche (Vorderfläche) parallel zur Projektionsebene.
- Pyramiden und Kegel werden stets stehend auf der Grundfläche dargestellt. Bei Pyramiden ist stets eine Grundkante parallel zur Projektionsebene.
- In den Schrägbildern sind die Kanten bzw. Linien in Breitenrichtung stets parallel zur unteren Kante des Buches bzw. des Zeichenblattes der Schüler.

Standpunkte zu sicheren Fähigkeiten im Lesen und Herstellen von räumlichen Darstellungen⁶

Die Schüler können sicher

- sich den durch eine räumliche Darstellung gegebenen Körper vorstellen,
- die Blickrichtung identifizieren und durch entsprechendes Nachzeichnen von Kanten realisieren,
- sich die wahre Form der verzerrt dargestellten Seitenflächen vorstellen,
- erkennen, welche Kanten des Körpers (wahrscheinlich) gleich lang und welche Flächen (wahrscheinlich) deckungsgleich sind,
- sich räumliche Darstellungen zu gegebenen Ansichten (Grundrissen und Zweitafelbildern) vorstellen um sie zu zeichnen oder zu skizzieren⁷.

Standpunkte zu sicheren Fähigkeiten im Lesen und Herstellen von Ansichten

Die Schüler können sicher

- zu einer gegebenen räumlichen Darstellung eines Körpers seine Ansicht von oben, von vorn oder von einer Seite identifizieren, vervollständigen, skizzieren oder zeichnen,
- Ansichten von zwei zusammengesetzten Quadern skizzieren,
- eine zweite Ansicht zu einer gegebenen Ansicht eines elementaren Körpers skizzieren.

Standpunkte zu sicheren Fähigkeiten im Arbeiten mit Körpernetzen und Faltungen

Die Schüler können sicher

- einfache Würfelnetze identifizieren, vervollständigen oder zeichnen
- gegenüberliegende Flächen in Würfel- und Quadernetzen identifizieren,
- Netze als Körpernetze identifizieren (nur Quader, Pyramiden, Kegel, dreiseitige Prismen),
- die Form eines einmal gefalteten und dann höchstens dreimal ausgeschnittenen Papierbogens nach dem Auseinanderfalten skizzieren.

⁶ Es werden nur die Komponenten angegeben, die das räumliche Vorstellungsvermögen betreffen, da die Standpunkte zur Körperdarstellung bereits unter 3.1 aufgeführt wurden.

⁷ Dazu müssen allerdings sichere Fähigkeiten im Lesen von Ansichten vorhanden sein, zu denen die Aufgaben erst im nächsten Abschnitt der Aufgabensammlung enthalten sind.

Standpunkte zu sicheren Fähigkeiten im Zerlegen und Zusammensetzen von Körpern

Die Schüler können sicher

- einfache Würfelbauten in der Vorstellung zu Quadern vervollständigen,
- zwei zusammengehörende Teile eines Würfels oder Quaders erkennen,
- gefärbte Würfel oder Quader in Gedanken in Teilwürfel zerlegen und die Anzahl bestimmter Arten von Teilwürfel bestimmen.

Standpunkte zu sicheren Fähigkeiten im Erkennen und Herstellen von Rotationen

Die Schüler können sicher

- eine Drehung eines Würfels um eine Achse identifizieren und realisieren,
- einen Würfel zweimal kippen und die oben liegende Augenzahl bestimmen,
- verschiedene, durch eine Rotation entstandene Lagen eines Körper, der aus zwei elementaren Körpern zusammengesetzt ist, identifizieren und realisieren.

Standpunkte zu sicheren Fähigkeiten in der räumlichen Orientierung

Die Schüler können sicher

- die rechte und linke Seite von bis zu zwei kreuzenden Straße identifizieren,
- sich zu einer gegebenen Draufsicht oder Vorderansicht von bis zu drei elementaren Körpern die jeweils andere Ansicht vorstellen und skizzieren,
- Zuordnungen bestimmen zwischen der Darstellung eines Objektes, eines Geländes oder eines Raumes auf einer Zeichnung oder Fotografie auch einer Sicht von oben und einer Sicht von vorn.

6 Sicheres Wissen und Können zum Arbeiten mit Variablen, Termen, Gleichungen und Ungleichungen⁸

6.1 Zu den Begriffen Variable, Term, Gleichung und Ungleichung

Klasse 6:

Die Schülerinnen und Schüler

- verwenden für Buchstaben das Wort „Variable“ in den folgenden Verwendungen: Formulierung von Rechengesetzen, Unbekannte in einer Gleichung bzw. Ungleichung, Bezeichnung für Größen in der Geometrie und aus der Physik,
- wissen, dass mit dem Buchstaben x in einer Gleichung eine unbekannte Zahl bezeichnet wird,
- kennen die üblichen Bezeichnungen für die Größen Länge (l) bzw. Weg (s), Flächeninhalt (A), Rauminhalt (V), Zeit (t), Masse (m),
- können für ein Dreieck ABC die Eckpunkte, die Seiten und Winkel mit den Standardbezeichnungen ($a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$) in der richtigen Anordnung beschriften,
- wissen, dass Buchstaben unterschiedliche Bedeutung haben können und können dies an folgenden Buchstaben erläutern: a, b, m, t
- kennen die Bezeichnungen „Term“, „Gleichung“ und „Ungleichung“ und können Beispiele für Terme und Gleichungen mit einer Variablen und Ungleichungen ohne Variable erkennen und angeben,
- wissen, dass eine Formel eine Gleichung ist und bei Anwendung der Formel die Variablen auf der rechten Seite mit Größenangaben belegt werden.

Klasse 8:

Die Schülerinnen und Schüler

- wissen, dass sich Variable ändern können und man die Abhängigkeit der Veränderung einer Variablen von der Veränderung einer anderen untersuchen kann,
- wissen, dass man Variable durch Zahlen, Größen oder andere Terme belegen kann und können in einfachen Fällen solche Belegungen vornehmen,
- können Beispiele für Terme, Gleichungen und Ungleichungen mit bis zu drei Variablen erkennen und angeben,
- wissen, dass man Terme verwendet, um Rechenausdrücke, geometrische Beziehungen oder außermathematische Sachverhalte allgemein zu beschreiben,
- können die Konventionen zum Weglassen des Multiplikationszeichens und der Faktoren 1 und -1 sowie der Ordnung in Produkten aus Zahlen und Variablen anwenden,
- können Terme zu gegebenen Rechenausdrücken mit maximal 2 Variablen und zwei Operationen aufstellen,
- können Terme mit maximal 2 Variablen und 2 Operationen durch Rechenausdrücke, Streckenlängen oder außermathematische Sachverhalte interpretieren.

Klasse 10, Gymnasium:

Die Schülerinnen und Schüler

⁸ Auszug aus: Sill, H.-D.; Kowaleczko, E.; Leye, D.; Lindstädt, E.; Pietsch, E.; Roscher, M.; Sikora, Ch.: Sicheres Wissen und Können – Arbeiten mit Variablen, Termen, Gleichungen und Ungleichungen – Sekundarstufe I. – Schwerin: Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur Mecklenburg- Vorpommern, 2010

- können in allgemeinen Darstellungen von Gleichungen und Funktionen die Variablen und Parameter unterscheiden
- können Gleichungen bzw. Funktionsgleichungen mit bis zu zwei Variablen und drei Parametern angeben.

6.2 Zum Erkennen der Struktur von Termen

Klasse 8:

Die Schülerinnen und Schüler

- können die äußere Struktur eines Terms aus Zahlen erkennen, der maximal 2 der 5 Rechenoperationen und Klammern enthält,
- können einen Term aus Zahlen mit maximal 2 der 5 Rechenoperationen und Klammern in einen Term mit Variablen gleicher Struktur überführen und umgekehrt,
- können in einem Term aus Zahlen oder Variablen mit maximal 2 der 5 Rechenoperationen und Klammern die Operation erkennen, die zuletzt ausgeführt werden muss.

Klasse 10, Regionale Schule und Gymnasium

Die Schülerinnen und Schüler

- können in einem Term, der sich als Summe, Produkt oder Potenz zweier einzelner Terme auffassen lässt, die Grundstruktur erkennen und zwei mögliche Teilterme bestimmen, wobei die jeweiligen Teilterme maximal eine Rechenoperation enthalten
- können die Struktur einer Summe aus maximal drei Summanden erkennen und die Teilterme angeben,
- können Terme der Form $\frac{T}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ in der Form $\frac{1}{n} \cdot T$ schreiben und umgekehrt.

Klasse 10, nur Gymnasium:

Die Schülerinnen und Schüler

- können die Struktur von Termen aller betrachteten Formen mit indizierten Variablen untersuchen,
- können Quotienten aus zwei Termen als Produkte aus zwei Termen schreiben,
- können die komplette Struktur eines Terms bestimmen, der aus maximal 4 Teiltermen besteht, wobei die unterste Stufe ein Term aus einem Koeffizienten und einer Variablen ist.

6.3 Zum Umformen von Termen

Klasse 8

Die Schülerinnen und Schüler

- können Terme zusammenfassen, die maximal 4 Summanden haben,
- können Produkte aus maximal 3 Faktoren zusammenfassen, die jeweils aus einem Koeffizienten und einer Variablen bestehen,

- können zwei Terme aus einem Koeffizienten und maximal zwei Variablen durcheinander dividieren, wobei als Ergebnis ein Bruch auftreten kann,
- können Klammern um Terme mit zwei Gliedern auflösen,
- können unter Beachtung der bisherigen Bedingungen ein Binom mit einem Term aus einer Zahl und einer Variablen ausmultiplizieren,
- können zwei Summen aus je zwei Variablen miteinander multiplizieren,

Klasse 10

Die Schülerinnen und Schüler

- können Zahlen mit abgetrennten Zehnerpotenzen schreiben,
- können die Potenzgesetze auf das Rechnen mit Zehnerpotenzen anwenden,
- können Quotienten von Einheiten als Produkte mithilfe negativer Exponenten schreiben,
- können die Potenzgesetze für Potenzen mit ganzzahligen Exponenten anwenden (nur Gymnasium),
- können Wurzeln als Potenzen schreiben (nur Gymnasium),
- wissen, dass Logarithmen Exponenten sind,
- können logarithmische Gleichungen als Exponentialgleichungen schreiben und lösen, wenn als Exponenten nur natürliche Zahlen auftreten (nur Gymnasium).

6.4 Zum inhaltlichen Lösen von Gleichungen und Ungleichungen

Hinweis: Mit „lösen“ ist immer inhaltliches Lösen gemeint.

Klasse 6:

Die Schülerinnen und Schüler

- können lineare Gleichungen mit einer Variablen, die nur einmal auf der linken Seite der Gleichung auftritt, inhaltlich durch Zerlegen der Zahl auf der rechten Seite in eine Summe, eine Differenz oder ein Produkt lösen,
- können lineare Gleichungen mit einer Variablen auf der linken Seite, in der Differenzen oder Quotienten auftreten, durch Anwenden der Umkehroperation lösen,
- können einfache lineare Gleichungen der genannten Form durch Veranschaulichung auf einem Zahlenstrahl lösen,
- können die Lösungen folgender Gleichungs- und Ungleichungstypen durch systematisches Probieren finden: lineare Ungleichungen mit einer Variablen (auf der linken Seite), quadratische Gleichungen mit natürlichen Zahlen als Lösungen, lineare Gleichungen mit einer Variablen, die auf beiden Seiten auftritt.

Klasse 10, Regionale Schule und Gymnasium

Die Schülerinnen und Schüler

- können lineare Gleichungen mit einer Variablen durch Zerlegen von Zahlen oder Termen in Summen, Differenzen oder Produkte lösen, wenn dies sinnvoll möglich ist,
- können Verhältnisgleichungen durch Vergleichen von Zählern bzw. Nennern lösen, wenn dies sinnvoll möglich ist,
- können folgende Typen quadratischer Gleichungen mit den angegebenen Verfahren lösen

- | | | |
|-----|----------------------|--|
| (1) | $x^2 = a$ | Betrachtungen zur Umkehroperation oder zum Quadrat eine Zahl |
| (2) | $(x + a)^2 = b$ | Betrachtungen wie (1), Rückführen durch formales Umformen |
| (3) | $x(x - a) = 0$ | Anwenden des Satzes über ein Produkt, mit dem Wert Null |
| (4) | $x^2 + ax = 0$ | Rückführung auf (3) durch Ausklammern |
| (5) | $(x - a)(x - b) = 0$ | Überlegungen wie (3) |

Klasse 10, nur Gymnasium:

Die Schülerinnen und Schüler

- können Gleichungen und Ungleichungen mit Beträgen durch Veranschaulichung auf der Zahlengeraden lösen,
- können Exponential- und Logarithmusgleichungen durch Anwenden der Umkehroperation bzw. der Definition der Rechooperation lösen, wenn dies im Kopf möglich ist.

6.5 Zum Umformen und Umstellen von Gleichungen und Ungleichungen

Klasse 8:

Die Schülerinnen und Schüler

- kennen die Schreibweise für das Umformen von Gleichungen und Ungleichungen
- kennen folgende Umformungsregeln für Gleichungen bzw. Ungleichungen und wissen, dass sich bei ihrer Anwendung die Lösungsmenge nicht ändert:
 - o Die Seiten einer Gleichung können vertauscht werden.
 - o Auf beiden Seiten einer Gleichung oder Ungleichung kann derselbe Term addiert oder subtrahiert werden.
 - o Beide Seiten einer Gleichung können mit demselben Term multipliziert bzw. durch denselben Term dividiert werden, wenn er nicht den Wert Null annehmen kann.
 - o Beide Seiten einer Ungleichung können mit derselben Zahl ungleich Null multipliziert bzw. durch dieselbe Zahl ungleich Null dividiert werden. Wenn die Zahl negativ ist, kehrt sich das Relationszeichen um.
- können einen vorgenommenen Umformungsschritt erkennen bei
 - o linearen oder quadratischen Gleichungen mit einer Variablen,
 - o Formeln oder Größengleichungen,
- können eine äquivalente Gleichung durch einen Umformungsschritt bilden zu
 - o linearen oder quadratischen Gleichungen mit einer Variablen,
 - o einfachen Formeln bzw. Größengleichungen,
 - o linearen Ungleichungen mit einer Variablen
- können eine Formel oder Größengleichung in einem Schritt nach einer Größe umstellen,
- können entscheiden, ob eine Umformung einer linearen oder quadratischen Gleichung, einer Formel oder einer Ungleichung richtig vorgenommen wurde.

Klasse 10, Gymnasium:

Die Schülerinnen und Schüler

- wissen, dass sich beim Quadrieren und Wurzelziehen die Lösungsmenge einer Gleichung ändern kann.

6.6 Zum Lösen von linearen Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssystemen

Die Schülerinnen und Schüler

- wissen, dass man alle Lösungen einer Gleichung oder Ungleichung als Lösungsmenge bezeichnet,
- können lineare Gleichungen und Ungleichungen in verschiedenen Grundbereichen lösen,
- können die Variable in einer linearen Gleichung oder Ungleichung in einem Schritt isolieren, wenn dies möglich ist,
- können lineare Gleichungen, bei denen die Variable auf beiden Seiten auftritt, lösen, wenn dies in zwei bis drei Schritten möglich ist,
- können eine Probe zu einer linearen Gleichung und gegebener Lösung durchführen,
- können einfache Sachverhalte durch eine Gleichung mit einer Variablen beschreiben,
- können zu einer Gleichung mit zwei Variablen mögliche Lösungen als Zahlenpaare in verschiedenen Grundbereichen angeben,
- wissen, dass die Lösungsmenge eines Gleichungssystems aus zwei Gleichungen mit zwei Variablen aus allen Paaren $(x; y)$ reeller Zahlen besteht, die sowohl die Gleichung (I) als auch die Gleichung (II) erfüllen und können die Lösung als geordnetes Paar oder in der Form $x = \dots$ und $y = \dots$ angeben,
- können die Lösung linearer Gleichungssysteme mit zwei Variablen mithilfe der Graphen der betreffenden linearen Funktionen ermitteln, wenn die Graphen gegeben sind,
- können bei gegebenen Graphen Betrachtungen zur Anzahl der Lösungen von Gleichungssystemen durchführen, indem sie ihre Kenntnisse zum grafischen Lösen verwenden,
- können ein rechnerisches Lösungsverfahren zum Lösen sehr einfacher linearer Gleichungssysteme anwenden,
- können einfache Sachverhalte durch ein lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen beschreiben.

6.7 Zum Lösen quadratischer Gleichungen

Die Schülerinnen und Schüler

- können lineare und quadratische Gleichungen unterscheiden,
- können quadratische Gleichungen der Form $x^2 = a$, $(x + d)^2 = e$, $(x + c) \cdot (x + d) = 0$ und $x^2 + px = 0$ inhaltlich lösen ohne diese allgemeinen Darstellungen zu benutzen,
- können die Lösungen quadratischer Gleichungen der Form $x^2 + px + q = 0$ mithilfe der Lösungsformel bestimmen, wenn die Lösungsformel gegeben ist und die Diskriminante keine Quadratzahl ist,
- wissen, dass eine quadratische Gleichung entweder keine, genau eine oder genau zwei Lösungen hat,
- können die Anzahl der Lösungen einer quadratischen Gleichung unter Anwendung der Lösungsformel bestimmen, indem sie den Ausdruck unter der Wurzel auswerten,
- können überprüfen, ob gegebene Zahlen Lösung der quadratischen Gleichung sind.