Hans-Dieter Sill, Universität Rostock

Probleme der Entwicklung des Wissens und Könnens im Rechnen mit Zahlen und Größen

Inhalt

1 Theoretische und bildungspolitische Grundlagen

1.1 Bestandteile des Wissens und Könnens im Rechnen mit Zahlen und Größen

Das Wissen und Können zu Zahlen und Größen ist ein sehr komplexes System von Kenntnissen, Fertigkeiten, Fähigkeiten, Einstellungen und Gewohnheiten. Der Entwicklungsprozess dieses Systems kann in folgende Teilprozesse strukturiert werden, die eine relative Eigenständigkeit besitzen und bis auf das Arbeiten mit Prozenten alle bereits in der Primarstufe beginnen.

1. Kenntnisse zu Zahlen, Zahlenbereichen und Rechengesetzen
2. Können im Durchführen von Zahlenvergleichen und Rechenoperationen mit natürlichen, gebrochenen und rationalen Zahlen in den Formen mündlich, schriftlich und mit Hilfsmitteln
3. Können im Arbeiten mit Größen
4. Kenntnisse zur Teilbarkeit natürlicher Zahlen
5. Können im Arbeiten mit Prozentangaben
6. Können im Arbeiten mit Näherungswerten und sinnvoller Genauigkeit
7. Kenntnisse, Einstellungen und Gewohnheiten zur
   - Wahl eines effektiven Lösungsweges
   - exakten und übersichtlichen Darstellung der Lösung
   - Durchführung von Rechenkontrollen
8. Können im Bestimmen von Anzahlen

Die Entwicklung des Könnens im Arbeiten mit Größen, insbesondere die Entwicklung von Größenvorstellungen sowie das Können im Umrechnen und Schätzen von Größen ist in der Broschüre zum sicheren Wissen und Können zu Größen ausführlich beschrieben worden. In dieser Broschüre beschränken wir uns auf das Rechnen mit Größenangaben.

Auf Probleme der Teilbarkeit natürlicher Zahlen wird in dieser Broschüre nicht eingegangen, da es aus unserer Sicht für einen Absolventen der Sekundarstufe I nicht erforderlich ist, sicheres Wissen und Können zur Teilbarkeit zu besitzen. Eine Ausnahme ist das Bestimmen des kgV zweier Zahlen, das als sichere Fertigkeit beim Addieren von Brüchen benötigt und auch an dieser Stelle in der Broschüre berücksichtigt wird.
Die Entwicklung der Kenntnisse zur Teilbarkeit erreicht in der Orientierungsstufe einen relativen Abschluss und wird in den folgenden Klassenstufen nicht weitergeführt.

Die im Punkt 7 genannten Kenntnisse, Einstellungen und Gewohnheiten sind aus unserer Sicht ein wichtiger Bestandteil des Rechnenkönnens. Wir haben allerdings keine Möglichkeiten gesehen, hierzu sinnvolle Ziele und Aufgaben für ein sicheres Wissen und Können zu formulieren und haben deshalb diesen Bereich nicht in dieser Broschüre berücksichtigt.

Das Können im Bestimmen von Anzahlen wird häufig als Bestandteil der Entwicklung des stochastischen Könnens angesehen. Es hat aber sehr wenige Bezüge zur stochastischen Denkweise und ist im Rahmen der Stochastik lediglich ein Hilfsmittel zum Lösen bestimmter Aufgaben. Das Bestimmen von Anzahlen hat eher Bezüge zum Rechnenkönnen, insbesondere zur Multiplikation natürlicher Zahlen und wird deshalb in dieser Broschüre mit behandelt.

1.2 Ziele und Inhalte von Bildungsstandards und Rahmenplänen

Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4, Beschluss der KMK vom 15.10.2004)

Zahldarstellungen und Zahlbeziehungen verstehen:

- den Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems verstehen
- Zahlen bis 1.000.000 auf verschiedene Weise darstellen und zueinander in Beziehung setzen
- sich im Zahlenraum bis 1.000.000 orientieren (z. B. Zahlen der Größe nach ordnen, runden)

Rechenoperationen verstehen und beherrschen:

- die vier Grundrechenarten und ihre Zusammenhänge verstehen
- die Grundaufgaben des Kopfrechnens (Einspluseins, Einmaleins, Zahlzerlegungen) gedächtnismäßig beherrschen, deren Umkehrungen sicher ableiten und diese Grundkenntnisse auf analoge Aufgaben in größeren Zahlenräumen übertragen
- mündliche und halbschriftliche Rechenstrategien verstehen und bei geeigneten Aufgaben anwenden
- verschiedene Rechenwege vergleichen und bewerten; Rechenfehler finden, erklären und korrigieren
- Rechengesetze erkennen, erklären und benutzen
- schriftliche Verfahren der Addition, Subtraktion und Multiplikation verstehen, geläufig ausführen und bei geeigneten Aufgaben anwenden
- Lösungen durch Überschlagsrechnungen und durch Anwenden der Umkehroperation kontrollieren

Weitere Ziele aus anderen Bereichen:

- strukturierte Zahldarstellungen (z.B. Hunderter-Tafel) verstehen und nutzen
- Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen
- arithmetische und geometrische Muster selbst entwickeln, systematisch verändern und beschreiben

- im Alltag gebräuchliche einfache Bruchzahlen im Zusammenhang mit Größen kennen und verstehen
- in Sachsituationen angemessen mit Näherungswerten rechnen
- einfache kombinatorische Aufgaben (z.B. Knobelaufgaben) durch Probieren bzw. systematisches Vorgehen lösen

Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss (Beschluss der KMK vom 04.12.2003) und den Hauptschulabschluss (Jahrgangsstufe 9, Beschluss der KMK vom 15.10.2004)

Die *kursiv* gesetzten Angaben sind *nur* in den Standards zum Mittleren Abschluss aber *nicht* zum Hauptschulabschluss und die unterstrichenen Angaben sind nur in den Standards für den Hauptschulabschluss aber nicht für den Mittleren Abschluss enthalten.

Leitidee Zahl

Die Schülerinnen und Schüler

- nutzen sinntragende Vorstellungen von rationalen Zahlen, insbesondere von natürlichen, ganzen und gebrochenen Zahlen entsprechend der Verwendungsnotwendigkeit,
- stellen Zahlen der Situation angemessen dar, unter anderem in Zehnerpotenzschreibweise,
- rechnen mit natürlichen, gebrochenen und negativen Zahlen, die im täglichen Leben vorkommen, auch im Kopf,
- *begründen die Notwendigkeit von Zahlbereichserweiterungen an Beispielen,*
- nutzen Rechengesetze, auch zum vorteilhaften Rechnen,
- nutzen zur Kontrolle Überschlagsrechnungen *und andere Verfahren*,
- runden Rechenergebnisse entsprechend dem Sachverhalt sinnvoll,
- verwenden Prozent- und Zinsrechnung sachgerecht,
- erläutern an Beispielen den Zusammenhang zwischen Rechenoperationen und deren Umkehrungen und nutzen diese Zusammenhänge,
- *führen in konkreten Situationen kombinatorische Überlegungen durch, um die Anzahl der jeweiligen Möglichkeiten zu bestimmen.*

Wie auch in allen anderen Themenbereichen wird durch die aktuellen Bildungsstandards das zu erreichende Abschlussniveau nur sehr allgemein und nicht vollständig beschrieben. Es fehlen z. B. in den Standards zum Mittleren Abschluss Aussagen zu den auszubildenden Rechenfertigkeiten, zur Arbeit mit Rechenhilfsmitteln und zur Teilbarkeit.

Auch zu den notwendigen Kenntnissen zur Ausbildung dieser Kompetenzen sind wenige Anhaltspunkte erkennbar.

2 Rechnen mit natürlichen Zahlen

Zur Berücksichtigung der Aspekte des Begriffs natürliche Zahl

Es können folgende Aspekte des Begriffs NATÜRLICHE ZAHL unterschieden werden.

1. *Kardinalzahlaspekt:* Zahlen beschreiben die Anzahl der Elemente einer (endlichen, abzählbaren) Menge. Bsp.: 5 Äpfel
2. *Ordinalzahlaspekt:*
   - *Zählzahlaspekt:* Folge, die beim Zählen durchlaufen wird
   - *Ordnungszahlaspekt:* Zahlen geben den Rangplatz an. Bsp.: 3. Platz
3. *Maßzahlaspekt:* Zahlen dienen als Maßzahlen bei Größen.
4. *Operatoraspekt:* Zahlen bezeichnen eine Vielfachheit. Bsp.: das Dreifache; fünfmal
5. *Darstellungsaspekt:* Zahlen lassen sich durch Ziffernreihen darstellen.
6. *Rechenzahlaspekt:* Mit Zahlen kann man rechnen.
7. *Codierungsaspekt:* Zahlen werden zur Bezeichnung, Codierung bzw. Nummerierung verwendet. Bsp.: PLZ, Telefonnummer, ISBN-Code

Das Eingehen auf die Verwendungsaspekte natürlicher Zahlen dient vor allem der Herausbildung eines umfassenden Zahlbegriffs in der Primarstufe. Die Aspekte sollten bei jedem Schüler verinnerlicht sein und sind deshalb kein expliziter Unterrichtsgegenstand in der Sekundarstufe. Eine Besinnung auf die Vielfalt möglicher Verwendungen ohne eine Thematisierung der Unterschiede wird jedoch für sinnvoll gehalten, da dadurch eine weitere Möglichkeit besteht, die Beziehungen der Mathematik zur Umwelt der Schüler auf einfache Weise sichtbar zu machen und das komplizierte Netz des Zahlbegriffs zu Beginn der Klasse 5 zu reaktivieren.

Bei den Sachaufgaben ist zu beachten, dass die verschiedenen Verwendungsaspekte ausgewogen berücksichtigt werden.

Zur Reihenfolge der Behandlung der mündlichen und schriftlichen Rechenverfahren

Für eine parallele Behandlung der Addition und Subtraktion bzw. Multiplikation und Division spricht, dass

- zahlreiche Verwendungsaspekte der entgegengesetzten Rechenoperationen inhaltlich verbunden sind (z. B. Zusammenlegen/Wegnehmen; Verlängern/Verkürzen; Vergrößern/Verkleinern; Vervielfachen/Halbieren),
- das Modell „Schreiten auf dem Zahlenstrahl“ gleich für Addition und Subtraktion einheitlich ausgebildet werden kann,
- die Grundaufgaben jeweils für zwei Rechenoperationen zu verwenden sind,
- die enge Verbindung von Operation und Umkehroperation ein operatives Durchdringen fördert,
- gemischte Aufgaben früh einbezogen werden können und die Schüler so an ein Identifizieren des Aufgabentyps vor Ausführen der Rechnung weiter gewöhnt werden,
- die Aufgaben, insbesondere auch die Sachaufgaben, vielfältiger sein können,
- die Umkehroperation jeweils zur Probe verwendet werden kann.

Gegen eine parallele Behandlung spricht, dass

- die Anforderungen im Vergleich zu einer aufeinander folgenden Behandlung für die Schüler höher sind,
- die Rechengesetze unterschiedlich sind,

- einige Aspekte der Multiplikation und Division keine Entsprechung haben (Flächeninhalt, Verteilen/Aufteilen, Verhältnis),
- die Multiplikation mit ergänzenden Stoffelementen (Potenzschreibweise, kombinatorisches Zählen) verbunden werden kann, die mit der Division wenig zu tun haben,
- die schriftlichen Verfahren nicht in die parallele Behandlung eingeordnet werden können.

Da die Vorteile einer parallelen Behandlung für die Addition und Subtraktion überwiegen, sollte dafür diese Variante gewählt werden. Multiplikation und Division sollte man auf Grund ihrer größeren inhaltlichen Unterschiede und der speziellen Ergänzungen nacheinander behandeln.

Zur Behandlung der großen Zahlen

Unter großen Zahlen werden Zahlen ab 1 Million verstanden. Für das tägliche Leben von Bedeutung sind vor allem Zahlen bis zur Milliardengröße, vereinzelt auch Angaben von Billionen (Bsp.: Staatsverschuldung). Noch größere Zahlen sollten nicht behandelt werden.

Eine eigenständige Rolle im Zusammenhang mit großen Zahlen spielen

- die Kenntnis der Bezeichnungen Milliarde und Billion,
- die Festigung der Schreibweise und des Lesens von Zahlen,
- die Festigung der Dreiergruppierung großer Zahlen zur übersichtlichen Darstellung,
- die Kenntnis, dass man große oder wenig anschauliche Zahlen durch geeignete Vergleiche erfassbar machen kann,
- die Entwicklung eines „Zahlenvorstellungsvermögens“ über natürliche Zahlen bis zur Milliardengröße.

Unter der Vorstellung von Zahlen, die als abstrakte Gebilde bzw. als Zahlenwerte von Größenangaben an sich nicht vorstellbar sind, wird die Vorstellung über eine betreffende Anzahl von Gegenständen oder Personen (Stückzahl, Einwohnerzahl) verstanden. In dieser Verwendung haben die natürlichen Zahlen auch einen Größencharakter. Die Größe Geld kommt bei Beschränkung auf die Standardeinheit (1 €) dem Anzahlcharakter recht nahe und kann ebenfalls als Beispiel für Zahlvorstellungen verwendet werden.

Die Vorstellung über 1 Million und eine Milliarde kann durch Größenvergleiche ausgebildet werden, z. B. durch

- die Zeit zum Zählen bis zu diesen Zahlen bei einer Zahl pro Sekunde oder
- die Höhe eines Geldstapels aus 100-Euroscheinen (10 Scheine, also 1000 € ergeben eine Höhe von 1 mm; 1 Mill. Euro ergeben 1 m und 1 Mrd. entsprechen 1000 m.)

Zur Berücksichtigung der Verwendungsaspekte der Rechenoperationen

Analog zu den Aspekten des Begriffs natürliche Zahlen sind den Schülern aus der Primarstufe auch die Verwendungsaspekte der vier Grundrechenarten implizit bekannt. Sie sind die Grundlage für die Gewinnung der einzelnen Operationen durch Abstraktion aus den realen Beziehungen. Sie stellen keinen expliziten Lerngegenstand dar. Andererseits muss der Schüler in der Lage sein, insbesondere im Zusammenhang mit dem Lösen von Sachaufgaben, in vorliegenden inhaltlichen Darstellungen bzw. Sachverhalten die mathematischen Strukturen zu erkennen.

Deshalb sollten in den Stoffabschnitten zu den Rechenoperationen vielfältige Übungen zur Übertragung außermathematischer bzw. verbal formulierter Sachverhalte in die Sprache der Mathematik erfolgen. Auch Umkehraufgaben (Formulierung von „Geschichten“ zu mathematischen Termen oder Gleichungen) sind wichtig.

Aspekte der Addition und Subtraktion:

- *Addieren* heißt: Hinzufügen, Zusammenlegen, Vermehren, Verlängern, Wachsen, Zunehmen, Zuzählen, Gewinnen, Gesamtzahl bestimmen, Ergänzen, Einsteigen
- *Subtrahieren* heißt: Wegnehmen, Abtrennen, Vermindern, Verkürzen, Schrumpfen, Abnehmen, Zurückzählen, Verlieren, Rest bestimmen, Verringern, Aussteigen
- Addieren und Subtrahieren kann man darstellen durch
    - Abtragen von Strecken
    - Bewegen auf dem Zahlenstrahl
    - Pfeile (Operatordarstellung)

Aspekte der Multiplikation:

Multiplizieren ist:

(1) Verkürzen des mehrfachen Addierens
(2) Zusammenfassen gleichartiger Mengen
(3) Vervielfachen
(4) Bildung von Paaren aus zwei Mengen
(5) Abzählen rechteckiger Anordnungen

Aspekte der Division:

Dividieren ist:

(1) Verkürzen des mehrfachen Subtrahierens
(2) Aufteilen einer Menge in gleichmächtige Mengen vorgegebener Größe
Bsp.: 12 Äpfel in Gruppen zu drei Äpfeln aufteilen; ges.: Anzahl der Gruppen;
Handlung: fortgesetztes Wegnehmen von 3 Äpfeln (fortgesetzte Subtraktion als Umkehrung der Multiplikation im Sinne einer fortgesetzten Addition)
(3) gleichmäßiges Verteilen der Elemente auf eine vorgegebene Anzahl von Teilmengen
Bsp.: 12 Äpfel an 4 Schüler verteilen; ges.: Anzahl der Äpfel pro Schüler;
Handlung: fortgesetzt je einen Apfel an die Schüler verteilen
(4) Halbieren, Dritteln, Vierteln

Weiterhin ist zu beachten, dass mit „Summe“, „Differenz“, „Produkt“ bzw. „Quotient“ sowohl die Aufgabe als auch das Ergebnis bezeichnet werden.

Man kann die Verwendung der Rechenoperationen auch unter dem Aspekt der „Zustandsänderung“ betrachten:

(1) Ein Zustand (eine Zahl, eine Größe) wird verändert. Im Ergebnis entsteht ein neuer Zustand.
Beispiele:

Addition/Subtraktion: ein Bankguthaben um einen Betrag erhöhen/verringern

Multiplikation/Division: Vervielfachen/Halbieren eines Geldbetrages

Bei dieser Auffassung ist die Reihenfolge der Größen bei Addition und Multiplikation inhaltlich nicht vertauschbar (Ein Bankguthaben von 1000 € um 10 € zu erhöhen ist als Sachverhalt etwas ganz anderes, als ein Bankguthaben von 10 € um 1000 € zu erhöhen). Bei der Multiplikation und Division haben beide Operanden eine inhaltlich unterschiedliche Bedeutung ($3 \cdot 40$ kg beschreibt einen anderen Sachverhalt als $40 \cdot 3$ kg).

(2) Es werden zwei gleichwertige Zustände zu einem neuen zusammengefasst oder verknüpft. Beide Zustände (Zahlen, Größen) sind inhaltlich völlig gleichwertig. Bei Addition und Multiplikation ist es deshalb auch inhaltlich leicht einsichtig, dass die Reihenfolge beliebig ist. Beispiele:

Addition: Aneinanderlegen von Strecken, Wegen

Multiplikation: Auslegung einer Fläche (Rechtecke) mit Platten (Quadraten)

Das Ergebnis der Multiplikation ist von anderer Qualität als die Ausgangszustände.

(3) Es wird zweimal nacheinander eine Zustandsänderung vorgenommen und gefragt, welche Gesamtänderung sich ergibt. Auch eine Verknüpfung verschiedener Operationen ist möglich. Es ist inhaltlich klar, dass die Reihenfolge der Operatoren beliebig ist. Beispiele:

Addition, Subtraktion: zweimalige Änderung einer Temperatur

Multiplikation, Division: wiederholtes Vergrößern und/oder Verkleinern einer Größe

Durch diese Betrachtungen werden das Vervielfachen mit Brüchen, sowie der Dreisatz und die Prozentrechnung vorbereitet.

Zur Behandlung des Rechnens mit 0 und 1

Das Können im Rechnen mit 0 und 1 ist kein automatisches Produkt der Aneignung des kleinen Einsundeins bzw. Einmaleins. Es verlangt die Kenntnis einer Vielzahl besonderer Regeln (bei Berücksichtigung der inhaltlichen Nichtkommutativität sind es insgesamt 16), die durch ihre inhaltliche und äußere Verwandtschaft leicht verwechselt werden können. Die ständige Vermittlung bzw. Wiederholung dieser Regeln auf formaler Ebene bringt oft wenig. Als Hauptansatzpunkt zur Vermeidung der häufigen Fehler im Rechnen mit 0 und 1 sollten die Schüler für diese Problematik sensibilisiert werden (Achtung Null!) und sich aus dem Automatismus des Rechnens lösen können und inhaltliche Überlegungen an einem Beispiel anstellen können (z. B. für „$3 \cdot 1$“ und „$3 \cdot 0$“: Wenn ich dreimal einen Apfel bekomme, habe ich drei Äpfel. Wenn ich dreimal keinen Apfel bekommen, habe ich keinen Apfel.)

Zur Behandlung der Rechengesetze und Vorrangregeln

Eine inhaltliche Begründung der Rechengesetze sollte nicht gegeben werden, da es inhaltlich oft keine Kommutativität gibt. Rechengesetze beschreiben das formale Rechnen mit Zahlen.

Die Rechengesetze sollten im Zusammenhang mit der Wiederholung der entsprechenden Rechenoperationen gefestigt werden.

Rechenbäume können als Form vielfältiger Aufgabenstellungen und zur Unterstützung einer bewussten Analyse der Struktur des Terms verwendet werden. Eine Aneignung und selbstständige Anfertigung ist nicht erforderlich.

Die Vorrangregeln (oder „Vorfahrtsregeln“) sollten als verbale Orientierungen („Erst Klammern ausrechnen!“, später dann „Erst Klammern auflösen!“) angeeignet werden.

Zum Bestimmen von Anzahlen durch kombinatorische Überlegungen

Mit Hilfe der *Zählregeln*, auch *Zählprinzipien* genannt, lassen sich kombinatorische Aufgaben lösen, ohne ein Begriffs- oder Formelsystem zu benötigen. Die Überlegungen bleiben sehr nahe am Sachverhalt, eine Verallgemeinerung oder Typisierung der Aufgaben ist nicht erforderlich. In der Schulpraxis hat sich dieser Weg als der effektivste herausgestellt. Es gibt mehrere Zählregeln. Die *Produktregel* ist dabei die wichtigste, da sie am häufigsten auftritt und Grundlage der anderen Regeln ist. Sie kann in folgender Weise formuliert werden:

Kann zur Erzeugung eines möglichen Ergebnisses eine Folge von Entscheidungen angegeben werden, die nacheinander getroffen werden müssen und die voneinander unabhängig sind, so ist die Gesamtzahl aller möglichen Ergebnisse gleich dem Produkt der Anzahl von Möglichkeiten bei jeder Entscheidung.

Zur Anwendung der Produktregel sollte in folgenden Schritten vorgegangen werden:

1. Stelle dir vor, dass eine der Möglichkeiten verwirklicht wird.
2. Überlege, welche Entscheidungen zur Verwirklichung dieser Möglichkeit nacheinander getroffen werden müssen und ob die Entscheidungen voneinander unabhängig sind.
3. Ermittle die Anzahl der Möglichkeiten bei jeder Entscheidung.
4. Berechne das Produkt der ermittelten Anzahlen bei den einzelnen Entscheidungen.

Die Produktregel kann bildlich durch ein *Baumdiagramm* veranschaulicht werden. Das Baumdiagramm ist nicht nur ein Hilfsmittel zur Erfassung des Grundgedankens der Produktregel, sondern dient auch der Vorbereitung der *Pfadregeln*, die beim Lösen von wahrscheinlichkeitstheoretischen Aufgaben eine wichtige Rolle spielen. Das Baumdiagramm sollte bis zur sicheren Beherrschung der Produktregel zumindest andeutungsweise stets verwendet werden. Probleme bei der Anwendung der Produktregel ergeben sich, wenn die Entscheidungsfolge nicht dem natürlichen Handlungsablauf entspricht bzw. wenn auch Folgen in Betracht kommen, bei denen die Entscheidungen voneinander nicht unabhängig sind.

In einigen Fällen kommt es bei der Anwendung der Produktregel zu *Mehrfachzählungen*. Das bei Mehrfachzählungen zu verwendende Zählprinzip wird häufig als *Quotientenregel* bezeichnet und könnte so formuliert werden: Wurde bei Anwendung der Produktregel jede der ermittelten Möglichkeiten n mal gezählt, so ist die Gesamtzahl der Möglichkeiten durch n zu dividieren.

3 Rechnen mit gebrochenen Zahlen

Zu Problemen der Bildung des Begriffs „Gebrochene Zahl"

Die Schüler sollen zunächst auf vielfältige Weise konkrete Brüche und Dezimalbrüche kennen lernen, deren Notwendigkeit/Zweckmäßigkeit sie an Beispielen aus ihrer Erfahrungswelt erleben. Hauptziel bei der Behandlung der gebrochenen Zahlen in den Klassen 5 und 6 ist die Herausbildung eines inhaltlichen Verständnisses für die verwendeten Begriffe und Verfahren sowie sicherer Fertigkeiten im Lösen einfacher Grundaufgaben. Es soll eine Vertrautheit insbesondere im Umgang mit Brüchen erreicht werden. Die weitere Entwicklung des formalen Könnens beim Lösen anspruchsvoller Aufgaben zur Bruchrechnung erfolgt in den Klassen 7 – 10 vor allem im Zusammenhang mit den Termumformungen und dem Lösen von Gleichungen.

Der Begriff „gebrochene Zahl" wird erst in Klasse 6 im Zusammenhang mit der Darstellung von Brüchen und Dezimalbrüchen auf dem Zahlenstrahl eingeführt und als Oberbegriff für Brüche und Dezimalbrüche aufgefasst. Auf seine Verwendung sollte verzichtet werden, wenn entweder nur mit gemeinen Brüchen oder nur mit Dezimalbrüchen gearbeitet wird.

Erst am Ende der Behandlung der gebrochenen Zahlen in Klasse 6 sollte eine Systematisierung der Eigenschaften der gebrochenen Zahlen und ein Vergleich mit den natürlichen Zahlen erfolgen.

Zur Aneignung des Bruchbegriffs

Der Bruchbegriff ist sehr aspektreich, seine Aneignung erfordert deshalb ein sehr umfangreiches und vielfältiges Arbeiten. Es müssen in einer geeigneten und miteinander verflochtenen Vorgehensweise folgende Aspekte berücksichtigt werden.

– Formale Aspekte:

  - Ein Bruch besteht formal aus zwei natürlichen Zahlen (für die Schüler nur „Zahlen“), die als Zähler und Nenner bezeichnet werden und aus einem Bruchstrich.
  - Ein Bruch ist ein Ergebnis einer Divisionsaufgabe.
  - Ein Bruch ist ein Operator. Z.B.: „$\frac{2}{3}$ von“ („von“ bedeutet hier also „mal“)

- Inhaltliche Aspekte
  - Brüche beschreiben Teile eines Ganzen. ($\frac{3}{4}$ der Torte)
  - Brüche beschreiben Teiler mehrerer Ganzer. ($\frac{3}{4}$ von 2 Torten)
  - Brüche beschreiben Teile einer Anzahl. ($\frac{3}{4}$ von 28 Schülern)
  - Brüche treten als Zahlenwerte bei Größenangaben auf. ($\frac{3}{4}$ l)
  - Brüche beschreiben Teile einer Größenangabe. ($\frac{3}{4}$ von 12 l)

Die Erarbeitung des Bruchbegriffs kann durch Vergleich und Analyse von Beispielen für das Auftreten von Brüchen in der Umwelt der Schüler zunächst beschränkt auf Brüche als Teile eines Ganzen, Brüche als Zahlenwerte von Größenangaben, Brüche als Teile einer Menge sowie Brüche zur Beschreibung von Anteilen einer Größe erfolgen. Der Begriff Bruch sowie seine Bestandteile Zähler, Bruchstrich und Nenner sollten bereits im Ergebnis dieser ersten Einführung genannt werden, damit eine langfristige Festigung dieser Begriffe möglich ist.

In der Phase der Erstfestigung sind materielle Handlungen zur Realisierung von Brüchen durch Brechen, Schneiden und Falten unabdingbar, um anschauliche Vorstellungen herauszubilden. Weiterhin sind Aufgaben zur Darstellung von Brüchen durch Zerlegung von Strecken, Flächen und Körpern erforderlich. Diese Aufgaben enthalten bereits Aufforderungen zum Vergleichen und Addieren bzw. Subtrahieren von Brüchen. Es sollte vorrangig mit Stammbrüchen und einfachen echten Brüchen gearbeitet werden.

Als Anschauungsmittel sollte man Kreise, Quadrate, Rechtecke und Strecken verwenden, wobei die Häufigkeit in der genannten Reihenfolge abnehmen kann. Mit diesen Anschauungsmitteln kann ebenfalls bei der Erarbeitung der Ordnungsrelation und der Addition gearbeitet werden.

Das Bestimmen von Bruchteilen von Größenangaben sollte als vollständige Handlung ausgebildet und bis zur sicheren Beherrschung gefestigt werden. Dabei muss allerdings im Wesentlichen eine Beschränkung auf den Fall der Teilbarkeit der Größenangabe durch den Nenner des Bruches erfolgen.

Um die Einführung nicht zu überlasten, kann man das Umwandeln der gemischten Schreibweise in unechte Brüche zu einem späteren Zeitpunkt behandeln.

Die Darstellung von Brüchen auf dem Zahlenstrahl sollte man nur für wenige Brüche vornehmen und nicht durch Übungen festigen, da später nur Dezimalbrüche zur Darstellung verwendet werden.

Zur Behandlung des Dezimalbruchbegriffs

Die Schüler kennen aus der Primarstufe und dem täglichen Leben Größenangaben in Kommaschreibweise. Diese werden von ihnen in der Regel als abgekürzte Schreibweise einer

Größenangabe mit zwei Einheiten (Sortentrennschreibweise) aufgefasst. Allgemein bekannt sollten die Kombinationen € – ct, m – cm, kg – g sein.

Im Zusammenhang mit der Einführung des Dezimalbruchbegriffes kann an die Kommaschreibweise von Größenangaben angeknüpft und die Angabe nach dem Komma als Zehntel, Hundertstel usw. der Einheit gedeutet werden. Die Deutung der Nachkommastellen von Größenangaben (auch durch Größenvorstellungen) ist für die Interpretation von Ergebnissen bzw. das Arbeiten mit sinnvoller Genauigkeit von großer Bedeutung und sollte deshalb bis zur sicheren Fertigkeit entwickelt werden. Dabei bedarf es nicht einer Deutung als Vielfaches kleinerer Einheiten, sondern es reicht aus, die Stellenwerte als Teile der Einheit (Zehntel, Hundertstel, Tausendstel, ...) zu lesen.

Die Erweiterung der Stellentafel nach rechts und die Betrachtung von Zehnerbrüchen sollten gekoppelt bei der Einführung des Dezimalbruchbegriffs auftreten. Beide Zugänge sind gleichermaßen von Bedeutung. Die Stellentafel ist ein grundlegendes Modell, insbesondere für die Addition und Subtraktion von Dezimalbrüchen und muss als Begriff und Methode erweitert werden. Die Zuordnung von Dezimalbrüchen und Zehnerbrüchen soll die Verbindung zu den bereits bekannten „Brüchen“ herstellen.

Die Zuordnung von bestimmten Brüchen und Zehnerbrüchen (bzw. den entsprechenden Kernbrüchen) sollte zu den sicheren Kenntnissen der Schüler am Ende der Bruchrechnung gehören (bequeme Prozentsätze) und kann bei der Einführung der Dezimalbrüche gut vorbereitet werden.

Es sollte konsequent auf die Ziffernsprechweise für Brüche orientiert werden. Zur Einführung von Größen mit Dezimalstellen sind beispielsweise 38,2°C (Körpertemperatur); 10,3 s; 2,348 m oder 17,325 kg geeignet. Größen mit den Einheiten Meter oder Euro mit zwei Nachkommastellen sollten in dieser Phase vermieden werden, da für diese Größenangaben die gebräuchliche Sprechweise der Dezimalstellen (Vier-Meter-Zweiunddreißig, Drei-Euro-Zwanzig) beibehalten werden sollte.

Bildung des Begriffs der gebrochenen Zahl

Nachdem die Schüler in der Klasse 5 vielfältige Erfahrungen mit Brüchen und Dezimalbrüchen gesammelt und entsprechende Vorstellungen entwickelt haben, wird zu Beginn der Behandlung der Bruchrechnung in Klasse 6 die *Bezeichnung „gebrochene Zahl“* eingeführt. Damit muss der Schüler seine Vorstellungen zum Zahlbegriff erheblich verändern. Bisher war die Bezeichnung Zahl mit den Eigenschaften der natürlichen Zahl verbunden. Insbesondere gab es für jede Zahl genau eine Darstellung mit Hilfe von Ziffern. Die in der Grundschule zwar versuchte Unterscheidung von *Zahl und Ziffer* ist sicher kaum von den Schülern verstanden und behalten worden. Jetzt ist eine Unterscheidung von „Zahl“ und Darstellung der Zahl notwendig. Es gibt keine eindeutige Bezeichnung einer gebrochenen Zahl mit Hilfe von Ziffern.

Eine erste Verwendung eines erweiterten Zahlbegriffs wurde bei der Erklärung des Dezimalbruchbegriffes vorgenommen: Zahlen mit einem Komma heißen Dezimalbrüche. Dezimalbrüche werden von Schülern noch am ehesten als Zahlen angesehen, da ihre Darstellung mit Hilfe von Ziffern, abgesehen von der Möglichkeit beliebig viele Nullen anzuhängen, ebenfalls eindeutig ist.
Eine Verbindung oder gar Gleichsetzung der Begriffe Dezimalbruch und Zehnerbruch sollte aber vermieden werden, da nicht jeder Dezimalbruch als Zehnerbruch darstellbar ist.

Die Eindeutigkeit der Darstellung einer gebrochenen Zahl ist nur mit Hilfe des *Zahlenstrahls* möglich. Die verschiedenen Bezeichnungen gebrochener Zahlen erscheinen nun als verschiedene Bezeichnungen für einen Punkt. Der Zahlenstrahl (und später die Zahlengerade) hat damit eine erhebliche Bedeutung für die Entwicklung des Zahlbegriffs. Es geht nicht mehr nur um die grafische Darstellung von (eigentlich bekannten) Zahlen, sondern mit Hilfe dieser Darstellung werden die

Vorstellungen und Kenntnisse der Schüler zu den verschiedenen Zahlbegriffen erst herausgebildet. Die Zahlenbereichserweiterungen können als schrittweise Erforschung der Zahlengeraden aufgefasst werden. Die Zahlengerade ist sowohl
Veranschaulichungs- als auch Erkenntnismittel.

Mit dem Begriff *„Bruch“* verbinden die Schüler vor allem Vorstellungen zu gemeinen Brüchen. Ein Dezimalbruch hat in ihrer Vorstellung sehr wenig mit einem Bruch zu tun, man kann höchstens beide z. T. ineinander umformen. Es ist also aus Sicht der Vorstellungen der Schüler nicht sinnvoll, die Bezeichnung „Bruch“ als Oberbegriff für gemeine Brüche und Dezimalbrüche zu verwenden, obwohl dies sprachlich naheliegend ist.
Ein weiteres Argument gegen eine solche Begriffsbildung ist die Erweiterung des Inhalts des Dezimalbruchbegriffs in späteren Klassen; ein unendlicher nichtperiodischer Dezimalbruch lässt sich gerade nicht als Bruch darstellen.

Diese schwierigen begrifflichen Zusammenhänge sollten *nicht* mit den Schülern erörtert werden. Sie können sich Vorstellungen zum Begriff der gebrochenen Zahl durch den Umgang mit diesem Begriff aneignen. Eine Möglichkeit, dies in Anwendungszusammenhängen zu tun, ist die Betrachtung von Vor- und Nachteilen der Bruch- bzw. Dezimalbruchschreibweise bei realen Sachverhalten.

Verwendung von gemischten Zahlen und Dezimalbrüchen beim Arbeiten mit Brüchen

Die Darstellung unechter Brüche als gemischte Zahlen sollte sparsam und keineswegs konsequent erfolgen. Im späteren Unterricht und bei Anwendungen spielen gemischte Zahlen eine untergeordnete Rolle. Die Schüler sollten aber mit dieser Darstellung vertraut sein und sie als Summe aus einer natürlichen Zahl und einem (echten) Bruch deuten. Bei Umwandlungen kann dann das Verfahren der Addition von Brüchen angewendet werden.

Zu den sicheren Kenntnissen, die auch beim Arbeiten mit Brüchen gefestigt werden sollten, gehört die Kenntnis von Zuordnungen bestimmter Brüche zu Dezimalbrüchen. Die Schüler sollten bestimmte Zuordnungen sicher beherrschen. Diese Beziehungen können beim Vergleichen sowie den Rechenoperationen mit Brüchen oft zum vorteilhaften Rechnen verwendet werden. Sie spielen weiterhin eine wichtige Rolle in der Prozentrechnung.

Entwicklung von Fertigkeiten im Gleichnamigmachen von Brüchen

Das Gleichnamigmachen von Brüchen setzt das Können im Bestimmen des kgV von Zahlen voraus. Bei der Teilbarkeit sollte deshalb die Entwicklung von entsprechenden Fertigkeiten erfolgen, wobei auf das Verfahren der Vervielfachung der größten Zahl orientiert werden sollte.

Die Spezialfälle (Nenner teilerfremd bzw. ein Nenner ist Teiler des anderen) brauchen nicht als Extraverfahren angeeignet werden. Sie sind im Verfahren der Vervielfachung enthalten und können als Rechenvorteil behandelt werden (Erst denken, dann rechnen!).

Vergleichen und Ordnen von Brüchen

Das Vergleichen und Ordnen von ungleichnamigen Brüchen sollte vor allem zur Festigung des Gleichnamigmachens erfolgen. Das Verfahren des „Überkreuz-Multiplizierens“ ist zwar eine rationelle Methode zum Vergleichen zweier Brüche, es ist aber nicht erforderlich und wird im späteren Unterricht kaum benötigt, da Verhältnisgleichungen nur noch eine geringe Rolle spielen.

Verständnis der Rechenverfahren

Für viele Schüler bleibt das Rechnen mit Brüchen ein verständnisloses und ausschließlich formales Hantieren mit Gebilden, die aus Zähler, Bruchstrich und Nenner bestehen. Während jedes Verfahren bei seiner isolierten Übung durchaus beherrscht werden kann, werden bei gemischten Aufgaben oder Wiederholungen häufig die einzelnen Verfahrenselemente durcheinander gebracht und sinnlos miteinander verknüpft.

Grundlage für ein inhaltliches Verständnis der Rechenverfahren sind die inhaltlichen Vorstellungen zu den einzelnen Aspekten des Bruchbegriffs. Sie werden bei den verschiedenen Rechenverfahren in unterschiedlicher Weise angesprochen.

Ein inhaltliches Verständnis der Rechenverfahren ist sowohl für die aktuelle Beherrschung als auch für die Bewältigung komplexer Anforderungen sowie bei den selbstständigen Reaktivierungen von Bedeutung. Ein Verständnis der Verfahren trägt zur Motivierung und zu einem planvolleren Vorgehen der Schüler bei.

Ein inhaltliches Verständnis kann oft auf verschiedenen Wegen erreicht werden. Eine gute und effektive Möglichkeit sind einprägsame, möglichst visualisierte Beispiele, die zusammen mit den allgemeinen Verfahrensschritten abgespeichert werden können. Der Schüler kann sich an diesen Beispielen die Sinnhaftigkeit des Verfahrens selbst verdeutlichen und bei späteren Wiederholungen sogar das Verfahren aus dem Beispiel rekapitulieren.

Spezialfälle der Rechenverfahren

Bei allen Rechenoperationen treten gewisse *Spezialfälle* auf, die meist mit dem Auftreten natürlicher Zahlen verbunden sind. Es wird angesichts der knappen Zeit und der ohnehin schon großen Vielfalt der anzueignenden Verfahren nicht für sinnvoll gehalten, diese Spezialfälle gleichberechtigt bei der Einführung des Verfahrens zu behandeln und spezielle Schrittfolgen zu vermitteln. Die Schüler sollten daran gewöhnt werden, in solchen Fällen die Aufgabe als Problem anzusehen und unter Verwendung heuristischer Verfahrenskenntnisse zu lösen. Meist ist die Anwendung des Rückführungsprinzips möglich.

Addition und Subtraktion von ungleichnamigen Brüchen

Beim Addieren und Subtrahieren von Brüchen werden die Vorstellungen von Brüchen als *Teile eines Ganzen* für das inhaltliche Verständnis benötigt.

Als *einprägsames Beispiel* kann die Aufgabe $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ gewählt werden, die sich durch ein Zusammenfügen zweier Teile derselben Einheit (z.B. Füllvorgang) visualisieren lässt.

Als *Spezialfälle* des Verfahrens sollten die Addition bzw. Subtraktion einer natürlichen Zahl und die Umwandlung gemischter Zahlen in unechte Brüche und umgekehrt behandelt werden.

Multiplikation von Brüchen

Die Multiplikation kann aus der Verwendung von Brüchen zur *Angabe von Bruchteilen einer Größe* abgeleitet werden.

Als *Musterbeispiel* ist die Aufgabe $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$ geeignet, die als Bestimmen der Hälfte von einem Viertel gedeutet werden kann.

Das *Kürzen* der Zähler und Nenner vor dem Multiplizieren sollte als Teilschritt sofort direkt in das Verfahren einbezogen werden, wenn auch bei den ersten Übungen noch nicht gekürzt zu werden braucht und aus Sicht der mathematischen Definition der Multiplikation ein Kürzen nicht erforderlich ist.

Als *Spezialfälle* sollten die Multiplikation mit natürlichen Zahlen (Vervielfachen von Brüchen) sowie das Bestimmen von Bruchteilen einer Größe behandelt werden.

Division durch einen Bruch

Zum weiteren Verständnis des Rechenverfahrens und zur Festigung der Aspekte der Division sollten folgende Situationen betrachtet werden:

- Verteilsituationen bzw. Aufteilsituationen (Eine bestimmte Menge auf eine bestimmte Anzahl von Personen oder Objekten verteilen bzw. in gleich große kleinere Teile aufteilen), z. B.:
  - 1 Liter Saft auf Viertellitergefäße verteilen
  - ein 1 m langes Band in Stücke zu ¼ m aufteilen (zerschneiden)

  Die Aufgaben sind anschaulich lösbar, wenn sich die Größe vollständig in die kleineren Teile teilen lässt und sich damit als Ergebnis eine natürliche Zahl ergibt.
  Als *Musterbeispiel* sind die Aufgaben 1 : ¼ = 4 oder 1 : ½ = 2 geeignet.

- Verhältnis (Quotient) zweier Größen als Normierung (Bezug) der einen Größe (Dividend) auf eine Einheit der anderen Größe (Divisor), z.B.:
  - ½ kg Fleisch kostet 3,96 €. Was kostet 1 kg?
  - Für 45 km braucht Mario 3/2 Liter Benzin. Wie weit kann er mit 1 Liter fahren?

Als *Spezialfälle* sollten die Division von und durch natürliche Zahlen behandelt werden.

Division von Dezimalbrüchen

Im Unterschied zum Rechnen mit Brüchen ist es sinnvoll, das Dividieren durch eine natürliche Zahl gesondert zu behandeln, da dieses Verfahren ein Bestandteil des allgemeinen Verfahrens ist.

Inhaltliches Verständnis für das Verfahren der Division durch eine natürliche Zahl kann beim Dividieren von Größenangaben durch Umrechnen in kleinere Einheiten erreicht werden. Das Verschieben des Kommas beim Dividieren durch einen Dezimalbruch kann durch den Übergang zur Bruchschreibweise der Divisionsaufgabe und geeignetes Erweitern verständlich gemacht werden. Als Musteraufgaben wären 0,4 m : 2 = 0,2 m und 0,4 l : 0,2 l = 2 geeignet.

Behandlung der Rechengesetze

Die Rechengesetze sollten vor allem unter dem Aspekt ihrer Anwendung zum vorteilhaften Rechnen behandelt werden. Ihre explizite Formulierung und Benennung ist nicht erforderlich.

Von den im Zusammenhang mit dem mündlichen Rechnen behandelten Rechenvorteilen sollten das geeignete Vertauschen der Reihenfolge, das Zerlegen von Zahlen in der Nähe von Vielfachen von 10 und das Multiplizieren bzw. Dividieren mit 5 und 25 verwendet werden.

Diese Rechenvorteile werden als *Linienführung* bis zur Klasse 10 immer wieder aufgegriffen, um die Schüler an ein überlegtes und effizientes Aufgabenlösen zu gewöhnen und die Kopfrechenfertigkeiten zu bewahren.

4 Rechnen mit rationalen Zahlen

Zur Bildung des Begriffs der rationalen Zahlen

Die Schüler haben negative Zahlen in verschiedenen Erfahrungsbereichen, darunter auch beim Rechnen mit natürlichen Zahlen kennen gelernt und können einfache Berechnungen mit ihnen durchführen. Ein Ziel der Einführung der rationalen Zahlen und der Rechenopera-tionen ist es deshalb, an diese Vorerfahrungen der Schüler anzuknüpfen, die intuitiven Vorstellungen aufzugreifen und weiterzuentwickeln.

Ein wesentliches Ziel des Stoffgebietes ist es, reichhaltige Vorstellungen zum Begriff „negative Zahlen", d.h. vor allem zu den Anwendungsaspekten, zu vermitteln. Das sollte bei der Einführung beginnen, sich aber über das ganze Stoffgebiet erstrecken. Alle wesentlichen Anwendungen negativer Zahlen sollten dabei angesprochen werden.

Bei der Betrachtung der Anwendungen sollte der Schwerpunkt auf die Bedeutung der negativen Zahlen als dem eigentlich Neuen für die Schüler gelegt werden. Es sollte nach Möglichkeit auf das Vorzeichen bei den positiven Zahlen von Anfang an verzichtet werden, um der Art der Begriffsbildung zu entsprechen.

Der Aspekt der Beschreibung von Richtungen durch negative oder positive Zahlen kann bei der Behandlung des Eintragens von Punkten in ein Koordinatensystem verdeutlicht werden.

Als mathematischer Hintergrund des Weges der Zahlenbereichserweiterung ist der Anbau eines neuen Zahlenbereiches an den Bereich der gebrochenen bzw. der natürlichen Zahlen geeignet. Es wird zu jeder gebrochenen (bzw. natürlichen Zahl) eine neue Zahl konstruiert. Die neuen Zahlen heißen negative Zahlen und bilden zusammen mit den gebrochenen (bzw. natürlichen Zahlen) den Bereich der rationalen (bzw. ganzen) Zahlen. Dieser Weg hat folgende Vorteile:

- Die gebrochenen bzw. natürlichen Zahlen bleiben was sie sind und brauchen nicht künstlich als neue (positive rationale oder positive gebrochene) Zahlen angesehen zu werden.
- Es sind keine Überlegungen zur isomorphen Einbettung erforderlich.
- Der Weg entspricht der historischen Vorgehensweise.
- Bei der Erarbeitung der Rechenoperationen kann ausgehend vom Bekannten sofort das Neue (Rechnen mit den negativen Zahlen) betrachtet werden.

Als Gegenstand der Betrachtungen zur Begriffsbildung wird die Zahlengerade als geeignetes Modell zwischen reiner Anwendung (Temperaturskala) und reiner Theorie (Zahl als mathematisches Objekt) verwendet. Damit wird

- die schrittweise Erforschung der Zahlengerade als roter Faden der Zahlenbereichserweiterung fortgesetzt,
- das Ordnen vorbereitet,
- die Erarbeitung der Regeln zur Addition und Subtraktion vorbereitet.

Zur Behandlung ganzer Zahlen

Eine vollständige Aneignung der Regeln zum Rechnen mit rationalen Zahlen ist bereits unter alleiniger Verwendung der ganzen Zahlen möglich, da die Regeln lediglich Vorzeichenregeln sind. Die eigentlichen numerischen Rechnungen mit den Beträgen der rationalen Zahlen werden mit den Regeln zum Rechnen mit natürlichen Zahlen, Brüchen oder Dezimalbrüchen durchgeführt.

Es ist aus mathematischer und inhaltlicher Sicht nicht notwendig, zuerst nur ganze Zahlen einzuführen, da sämtliche Betrachtungen und Regeln identisch sind. Es sollte sofort der Bereich der rationalen Zahlen eingeführt werden. Bei der Einführung werden der Teilbereich der ganzen Zahlen und seine Anwendungen mit erarbeitet. Bei der anschließenden Behandlung des Koordinatensystems, der Ordnung und der Rechenoperationen sollten dann allerdings in der überwiegenden Mehrzahl solche Aufgaben gestellt werden, die im Kopf lösbar sind, d.h. die vor allem ganze Zahlen enthalten.

Mit der Betonung der Kopfrechenaufgaben sollte auch einem Einsatz des Taschenrechners entgegengewirkt werden, auf den in diesem Stoffgebiet (mit Ausnahme der Behandlung der Quadratwurzel) verzichtet werden kann.

Behandlung des Betrages einer rationalen Zahl

Der Begriff des Betrages einer rationalen Zahl kann inhaltlich in zweifacher Weise erklärt werden:

- Der Betrag einer rationalen Zahl ist ihr Abstand vom Nullpunkt.
- Eine rationale Zahl besteht aus einem Vorzeichen und dem Betrag. Der Betrag einer negativen Zahl ist also die Zahl ohne ihr Vorzeichen und damit die zu ihr entgegengesetzte gebrochene Zahl. Der Betrag einer gebrochenen Zahl ist die Zahl selbst.

Mit der ersten Bedeutung wird ein neuer Aspekt angesprochen, der langfristig von großer Bedeutung ist, nämlich die Beschreibung von Abständen, also geometrischen Zusammenhängen, durch Zahlen.

Die zweite Auffassung ist eine rein syntaktische, die das Arbeiten mit dem Betragsbegriff beim Rechnen mit rationalen Zahlen sehr vereinfacht.

Die Begriffserklärungen haben den Nachteil, dass sie nicht vollständig mit dem mathematischen Begriffsinhalt übereinstimmen, wonach der Betrag einer rationalen Zahl auch wiederum eine rationale Zahl ist. Im Sinne der gewählten Fassung des Begriffes rationale Zahl ist dies jedoch zu vertreten, da der so erklärte Betrag einer rationalen Zahl als gebrochene Zahl ebenfalls zu den rationalen Zahlen gehört.

Die beiden inhaltlichen Vorstellungen besitzen folgende Vorzüge:

- Bei einer Definition im mathematischen Sinne unter Verwendung von Variablen erhöht sich enorm das Anforderungsniveau, da erstmalig Variable für negative Zahlen auftreten und so z.B. – a auch eine positive Zahl sein kann. Dies muss von den Schülern zwar im Laufe des Unterrichts ohnehin erfasst werden, lässt sich aber besser bei den konzentrierten Betrachtungen zum Arbeiten mit Variablen einordnen. Die Definition ist für die im folgenden genannten wichtigen Anwendungen des Betrages sehr umständlich zu handhaben.
- Wird bei den Regeln zum Rechnen mit rationalen Zahlen mit dem Betrag gearbeitet, ist die Auffassung vom Betrag als Zahl ohne Vorzeichen völlig ausreichend und effektiv.
- Zum Lösen von Gleichungen und Ungleichungen mit Beträgen ist die Auffassung vom Betrag als Abstand vom Nullpunkt hilfreich und effektiv. Es wird auf ein grafisches und inhaltliches Lösen orientiert, das die Schüler leicht zu folgenden Zusammenhängen führt:
  $|z| = a$ heißt $z = a$ oder $z = -a$; $|z| < a$ heißt $-a < z < a$; $|z| > a$ heißt $z > a$ oder $z < -a$

Vergleichen und Ordnen rationaler Zahlen

Beim Vergleichen ganzer bzw. rationaler Zahlen sollte zwischen dem Vergleichen einer positiven mit einer negativen Zahl und dem Vergleichen zweier negativer Zahlen unter-schieden werden. Der erste Fall kann sowohl inhaltlich als auch am Zahlenstrahl leicht verständlich gemacht werden.

Beim Vergleichen zweier negativer Zahlen sind Orientierungen an Anwendungskontexten wenig hilfreich. Der Vergleich auf der Sachebene fällt den Schülern sicher nicht schwer, daraus kann aber nicht unmittelbar auf die richtige mathematische Darstellung geschlossen werden. Dagegen liegt sogar in vielen Fällen genau die umgekehrte Relation inhaltlich viel näher (3000 Euro Schulden sind mehr als 2000 Euro Schulden, 4°C Frost sind mehr als 3°C Frost; 5 m unter NN ist tiefer als 2 m unter NN; usw.).

Es ist nicht erforderlich, dass die Schüler zu Bearbeitung der Anwendungsprobleme auf die formale Ebene der Arbeit mit negativen Zahlen wechseln müssen, da auf der Sachverhalts-ebene die Lösung dieser Aufgaben meist leicht möglich ist. Deshalb können schon vor der formalen Behandlung des Vergleichens rationaler Zahlen Aufgaben zum Vergleichen und Ordnen gestellt werden. Die Sachverhaltsbetrachtungen können zum Begründen der formalen Regel verwendet werden.

Es sollte eine Orientierungsgrundlage für das Lösen formaler Aufgaben vermittelt werden, die auf der Betrachtung der Lage der Zahlen auf der Zahlengeraden basiert: Von zwei Zahlen ist diejenige kleiner, die auf der Zahlengeraden weiter links liegt.

In dem Stoffabschnitt sollte das stellenweise Vergleichen von Dezimalbrüchen nicht wiederholt und gefestigt werden. Das Verfahren lässt sich nicht in gleicher Weise auch für negative Zahlen anwenden, da die Richtung der Ordnungsrelation nicht mehr der Größe der Stellenwerte entspricht. (-3,7 < -3,6, da 7 > 6). Da außerdem negative gebrochen rationale Zahlen bei Anwendungen kaum vorkommen, sind Übungen zum Vergleichen negativer Dezimalbrüche nicht erforderlich.

Beim Runden negativer Zahlen wird in die betragsmäßig entgegengesetzte Richtung gerundet, wodurch sich die Sprechweise und bei der Endziffer 5 auch das betragsmäßige Runden umkehrt: z.B. -3,76 wird auf -3,8 abgerundet; -3,72 wird auf -3,7 aufgerundet, -3,5 wird auf -3 aufgerundet. Auf Grund dieser Schwierigkeiten und der wiederum aus der Sicht der Anwendungen nicht gegebenen Notwendigkeit sollten ebenfalls keine Übungen zum Runden negativer Zahlen vorgesehen werden.

Behandlung der Addition und Subtraktion

Das Anliegen der im Folgenden geäußerten Gedanken ist es,

- den gewählten Weg der Zahlenbereichserweiterung konsequent weiter zu beschreiten,
- zu einer bedeutenden Vereinfachung und Verkürzung der Behandlung der Addition und Subtraktion rationaler Zahlen zu gelangen
- die Behandlung der Rechenoperationen stärker als sonst üblich bereits an den späteren Anforderungen zu orientieren und
- an das intuitive Können der Schüler im Rechnen mit negativen Zahlen anzuknüpfen.

Die den Schülern bisher als gebrochene Zahlen bekannten positiven rationalen Zahlen sollten von Anfang an wie bisher behandelt und bezeichnet werden, d.h. es wird auf das Vorzeichen „+“ sofort verzichtet. Damit entfällt die umständliche und gekünstelte ausführliche Schreibweise mit Klammern und der spätere Verzicht auf diese.

Die Rechenoperationen Addition und Subtraktion sollten wie bei den natürlichen und gebrochenen Zahlen parallel behandelt werden. Die Subtraktion wird also nicht erst nach der ausführlichen Beschäftigung mit der Addition als Rückführung auf die Addition eingeordnet.

Die Behandlung kann in drei Schritten erfolgen:

1. Addieren oder Subtrahieren einer positiven Zahl durch Schreiten auf der Zahlengeraden
2. Addieren oder Subtrahieren einer negativen Zahl durch Auflösen von Klammern und Rückführung auf Punkt 1
3. Formale Zeichen-Betrags-Regeln

zu 1. Es wird die Zahlengerade als Ausgangsmodell und Orientierungsgrundlage für die Rechenregeln verwendet, d.h. nicht mit der Ebene des formalen Arbeitens mit Beträgen begonnen. Die auszulösenden und zu verinnerlichenden Rechenhandlungen sind nach Abschluss des Aneignungsprozesses zwar die gleichen, aber die inhaltliche Orientierung an der Zahlengeraden ermöglicht bei auftretenden Problemen durch die größere Anschaulichkeit und geringere Begrifflichkeit viel eher ein Zurückgehen auf entfaltete Denkhandlungen. Außerdem entfällt die Notwendigkeit einer vollständigen und damit mathematisch exakten Formulierung der Vorzeichen-Betrags-Regeln.

Die Operationen Addieren und Subtrahieren werden durch Schreiten nach rechts bzw. nach links modelliert, d.h. auch bei der Subtraktion wird von dem ersten Operanden (dem Minuenden) ausgegangen. Diese Vorstellung knüpft an das Vorgehen bei den natürlichen Zahlen und an die intuitiven Lösungsverfahren der Schüler an.
Die Erarbeitung der Regeln kann mithilfe kleiner ganzer Zahlen und einer Veranschaulichung mit einer Zahlengeraden bzw. mit einem Additionsrechenstab erfolgen. Beim Rechnen mit größeren Zahlen orientiert sich der Schüler weiterhin an dem Schreiten auf der Zahlengeraden. Aus dieser Vorstellung heraus können dann ebenfalls die entsprechenden Rechenhandlungen abgeleitet werden.
Bei dieser Gruppe von Aufgaben sind keine Klammern erforderlich.

zu 2. Als Ziel der Erarbeitung wird nicht das Finden neuer Regeln, sondern die Rückführung auf Bekanntes angegeben. Dazu müssen die Klammern aufgelöst werden. Zur Erarbeitung der Klammerauflösungsregeln kann nicht das bisher verwendete Modell des Schreitens auf der Zahlengeraden herangezogen werden, da es nur für positive Zahlen als zweiten Operanden eingeführt wurde. Eine Erweiterung wäre zwar möglich, dies würde aber die aufgebaute Orientierungsgrundlage erheblich beschädigen, da die Schüler nun zwischen mehreren Betrachtungen wechseln müssten. Es geht zudem um ein anderes Anliegen als bei den Aufgaben vom Typ 1, nämlich um das Arbeiten mit Klammern.

Als Mittel zur Erklärung der Klammerauflösungsregeln kann die Interpretation der negativen bzw. positiven Zahlen als Plus bzw. Minuspunkte verwendet werden. Eine Arbeit mit Guthaben und Schulden wird nicht empfohlen, da die Betrachtungen zur Modellierung sehr schwierig sind (Es gibt kein negatives Geld!).

Es sollten Kurzformen der Regeln verwendet werden (z. B. „Plus Minus ergibt Minus“ und „Minus Minus ergibt Plus“), die den Kurzformen der Regeln zur Multiplikation und Division rationaler Zahlen entsprechen. Die Vorgehensweise entspricht der Orientierung beim Lösen von Gleichungen: Zuerst die Klammern beseitigen!

zu 3. In Verallgemeinerung der inhaltlichen Vorgehensweise unter 1. werden formale Regeln erarbeitet, die eine zunehmende Automatisierung der Handlungen ermöglichen sollen. Vor Anwendung der Regeln müssen alle Klammern um Zahlen entsprechend der formalen Regeln in 2. aufgelöst sein. Eine Unterscheidung von Vorzeichen und Rechenzeichen ist nicht erforderlich, es sollte deshalb allgemein von „Zeichen“ vor den Zahlen gesprochen werden. Die Regeln können in folgender Weise formuliert werden:

1. Steht vor beiden Zahlen ein Plus-Zeichen oder ein Minus-Zeichen, werden die Beträge addiert. Das Ergebnis erhält ein Plus- bzw. ein Minus-Zeichen.
2. Steht vor einer Zahl ein Plus-Zeichen und vor der anderen ein Minus-Zeichen, wird der kleiner Betrag vom größeren Betrag subtrahiert. Das Ergebnis erhält das Zeichen vor der Zahl mit dem größeren Betrag.

Kurzform der Regeln: Gleiche Zeichen – Beträge addieren
Verschiedene Zeichen – Beträge subtrahieren

Die inhaltliche Orientierung durch Schreiten auf der Zahlengeraden sollte als Kontrolle der formalen Vorgehensweise verwendet werden.

Behandlung mehrgliedriger Summen

Es ist für das Berechnen mehrgliedriger Summen bzw. für das spätere Zusammenfassen von Termen effektiv, die Ausdrücke als Summen anzusehen. Damit ist eine entsprechende Interpretation der auftretenden Zeichen verbunden, indem sie als Vorzeichen gedeutet werden und damit untrennbar zu den Zahlen gehören. Dies beugt späteren Fehlern im Umgang mit dem Minuszeichen vor.

Diese neue Teilhandlung kann gleich als Zusammenfassen bezeichnet werden. Damit wird ihre besondere Stellung und die neue Interpretation der Zeichen im Unterschied zu den Summen und Differenzen aus zwei Zahlen unterstrichen. Ziel des Zusammenfassens ist es unter Ausnutzung des Kommutativgesetzes entweder alle Zahlen mit gleichem Vorzeichen oder gleiche bzw. dicht bei einander liegende Zahlen zusammenzufassen. Zur Entwicklung der Handlung sind Übungen im Einkringeln von Vorzeichen und Zahl sinnvoll.

Behandlung der Multiplikation und Division

Es wird entsprechend dem bisherigen Vorgehen sofort das Vorzeichen „+“ weggelassen.

Die Regel zur Multiplikation zweier negativer Zahlen sollte auf mehreren Wegen einsichtig gemacht werden, da verbreitet ein Unverständnis für die Regel vorhanden ist. Verständnis kann in folgender Weise erreicht werden:

- Anwendung des Permanenzprinzips bei Aufgabenfolgen:
  $(-3) \cdot 2 = -6$ $(-3) \cdot 1 = -3$ $(-3) \cdot 0 = 0$
  Das Ergebnis erhöht sich immer um 3, also muss $(-3) \cdot (-1) = 3$ und $(-3) \cdot (-1) = 6$ sein.
- Überlegungen zur Bedeutung der Multiplikation mit -1:
  $3 \cdot (-1) = (-1) + (-1) + (-1) = -3$, also ist $-3 = (-1) \cdot 3$, d.h. „$(-1) \cdot$“ bedeutet: Bilde die entgegengesetzte Zahl. Also ist $(- 3) \cdot (-4) = (-1) \cdot 3 \cdot (-4) = (-1) \cdot (-12) = -(-12) = 12$
- Verbindung zum Klammernauflösen: Minus Minus ergibt Plus: $-(-3) = 3$
- Allegorien: doppelte Verneinung ist Bejahung; Negation der Negation

Die Regeln zur Division sollten nicht inhaltlich erklärt, sondern aus der Umkehreigenschaft formal abgeleitet werden.

Quadrieren und Wurzelziehen sowie der Ausblick auf irrationale Zahlen

Mit dem Quadratwurzelziehen lernen die Schüler eine neue Rechenoperation kennen, die einige Besonderheiten im Vergleich zu den bisher bekannten aufweist:

- Es ist nicht ersichtlich, dass es eine Operation ist, da im Unterschied zum Quadrieren ein Operand (der Wurzelexponent) bei der Quadratwurzel nicht geschrieben wird. Da außer der Quadratwurzel keine weiteren behandelt werden, kann dies auch kaum verständlich gemacht werden. Hinzukommt, dass auf dem Taschenrechner auch nur eine Zahl und das Operationszeichen eingegeben wird und dann sofort das Ergebnis erscheint.
- Im Unterschied zu den Operationen Quadrieren und Potenzieren, bei denen die Operation durch das Hochstellen eines Operanden ausgedrückt wird, wird beim Wurzelziehen ein neues Operationszeichen verwendet.

- Im Unterschied zum Quadrieren und Potenzieren (mit natürlichen Exponenten) kann die Quadratwurzel nicht mithilfe der Grundrechenoperationen durch ein entsprechendes Rechenverfahren berechnet werden. Es ist nur durch Probieren eine Zerlegung in zwei gleiche Faktoren möglich. Ansonsten kann das Ergebnis nur durch schrittweise Näherung bestimmt werden.
- Erstmalig kann ein Rechenergebnis nie vollständig, sondern nur mit einer bestimmten Genauigkeit angegeben werden. Eine (explizite oder implizite) Genauigkeitsforderung ist damit ein notwendiger Bestandteil der Aufgabenstellung.

Weiterhin sollte das Quadrieren und die Beherrschung der Quadratzahlen bis 20 wiederholt und durch die Betrachtung der Umkehraufgaben gefestigt und vertieft werden.
Hauptziel des Stoffabschnittes im Hinblick auf die Zahlenbereichserweiterung ist es, die Schüler zu der Einsicht zu führen, dass es außer den rationalen Zahlen noch weitere Zahlen gibt. Dies ist verbunden mit der Ergänzung des in der Kl. 6 angeeigneten Begriffsystems zu den Arten von Dezimalbrüchen, das bei dieser Gelegenheit wiederholt wird. Im Zusammenhang mit der Erweiterung des Dezimalbruchbegriffes auf unendliche nichtperiodische Dezimalbrüche sollten die Schüler erkennen, dass sich jeder Bruch in einen Dezimalbruch aber nicht jeder Dezimalbruch in einen Bruch verwandeln lässt. Die Brüche sind also nur eine Teilmenge der Dezimalbrüche.

Beitrag historischer Betrachtungen zum Verständnis negativer Zahlen

Mit historischen Betrachtungen kann verdeutlicht werden, dass man durchaus mit Guthaben und Schulden und auch weiteren Anwendungen der negativen Zahlen umgehen kann, ohne den Begriff der negativen Zahlen als mathematisches Objekt und spezielle Regeln zum Rechnen mit negativen Zahlen zu verwenden. Die Akzeptanz der negativen Zahlen und des Rechnens mit ihnen ist vor allem ein innermathematisches Problem.

Es kann verdeutlicht werden, dass es viele Sachsituationen gibt, in denen negative Zahlen keinen Sinn ergeben; z.B. von 0 Stück Schokolade kann man nicht 4 wegnehmen, eine Strecke von 4 cm kann man nicht um 10 cm verkürzen.

Diese Betrachtungen können die Schüler darauf vorbereiten, bei der Lösung von Sachaufgaben die eventuell auf innermathematischem Weg erhaltenen negativen Lösungen (z.B. bei quadratischen Gleichungen) am Sachverhalt auf Existenzmöglichkeit zu überprüfen.

5 Prozentrechnung

Bedeutung und Aspekte des Prozentbegriffes

Infolge der großen Bedeutung und vielfachen, z. T. auch missbräuchlichen Verwendung von Prozentangaben im Alltag sollten *reichhaltige Vorstellungen* zum Prozentbegriff entwickelt werden. Die Schüler müssen in der Lage sein, mit Prozentangaben im täglichen Leben auf Anhieb sicher umzugehen und die Bedeutungen sowie fehlerhafte Verwendungen sicher erkennen zu können. Im Unterschied zu vielen anderen Gebieten der Mathematik sollte man im Interesse eines lebensverbundenen Mathematikunterrichts auf die im gesellschaftlichen Leben üblichen Bezeichnungen und Betrachtungsweisen Rücksicht nehmen.
Neben Aufgaben zur Berechnung von Prozentwerten, Prozentsätzen und Grundwerten, die sicher dominieren müssen, sollten mit Blick auf die Praxis auch vielfältige Aufgaben zur Interpretation von Prozentangaben und den daraus gezogenen Schlussfolgerungen angeboten werden. Insbesondere sind fehlerhafte Interpretationen und Schlussweisen zum Gegenstand der Untersuchungen zu machen. Auf Grund der Gemeinsamkeiten mit stochastischen Betrachtungen und Denkweisen wird damit auch ein Beitrag zur Entwicklung des stochastischen Könnens geleistet.

Man kann drei verschiedene *Sachsituationen* unterscheiden, in denen der Prozentbegriff verwendet wird.

a) Es wird der Anteil einer Größe betrachtet (prozentualer Anteil, Quote, Rate).
b) Es werden Vergleiche von Anteilen vorgenommen, die sich auf verschiedene Bezugsgrößen beziehen.
c) Es werden Veränderungen betrachtet (Steigerung, Senkung um ... auf, prozentuale Veränderung, Wachstumsrate).

Die *Bezeichnung "Prozent"* besitzt im Zusammenhang mit Aufgabenstellungen zwei inhaltlich unterschiedliche Bedeutungen:

a) eine Aufforderung zum Rechnen (Rechenvorschrift, Prozentoperator), meist mit dem Wort „von“ verbunden (z.B. 10 % von 180 €),
b) die Angabe eines Rechenergebnisses bzw. Beschreibung einer Situation (Prozentangabe, Prozentzahl, Prozente), meist mit der Angabe der Bezugsgröße verbunden (z.B. 20 % der Schüler).

Die Bedeutungen stehen in enger Beziehung zueinander. Welcher Aspekt dominiert, wird oft erst aus dem Kontext klar. Der erste Aspekt steht in engem Zusammenhang mit der Berechnung von Prozentwerten und der zweite mit der Ermittlung von Prozentsätzen. Bei der Angabe statistischer Daten (prozentuale Häufigkeiten) wird oft von der Prozentschreibweise im Sinne des Aspektes b) Gebrauch gemacht. Beim Auftreten des Prozentzeichens im Alltag handelt es sich deshalb meist um Prozentangaben.

Eine Zahl mit einem Prozentzeichen *für sich* (z.B. nur „1 %“ ohne weitere Zusätze und Kontexte) ist mit Ausnahme der Bedeutung als Wahrscheinlichkeit inhaltlich ohne Sinn, da nicht erkenntlich wird, ob es sich um eine Rechenvorschrift handelt bzw. worauf sich diese Prozentangabe bezieht. Zur vollständigen Angabe einer Rechenvorschrift gehört die Angabe der Größe, von welcher der Prozentsatz bestimmt werden soll. Handelt es sich um eine Prozentangabe, muss zumindest aus dem Kontext hervorgehen, auf welche Größenangabe (Grundwert) sich die Prozentangabe bezieht.

Handelt es sich um eine *Wahrscheinlichkeitsangabe*, so liegt lediglich eine Transformation des Intervalls <0; 1> auf das Intervall <0; 100> vor. Es soll weder ein Prozentwert berechnet noch ein Anteil zum Ausdruck gebracht werden. Man nutzt die Prozentschreibweise, um sich die Größe der Wahrscheinlichkeiten besser vorstellen zu können. Aus mathematischer Sicht ist diese Schreibweise sogar nicht korrekt, da Wahrscheinlichkeiten i. A. keine Verhältnisse und außerdem als Zahlen zwischen 0 und 1 definiert sind.

Die Verwendung der Prozentschreibweise zur Angabe von Wahrscheinlichkeiten sollte in der Prozentrechnung nicht behandelt werden, um die Schüler nicht unnötig zu verwirren.
Man kann allerdings auch die Wahrscheinlichkeitsangabe auf einen „Grundwert", nämlich die Sicherheit (100%ige Sicherheit) beziehen. Die Angabe der Wahrscheinlichkeit drückt dann den Grad der Sicherheit aus. Möglich ist weiterhin eine fiktive Zahl von Wiederholungen des Vorgangs (Fälle), z.B. p = 30 % heißt: in 30% aller Fälle tritt das Ereignis ein.

Für das *formale Rechnen* mit bzw. das Berechnen von Prozentangaben ist die Gleichsetzung von Prozentangaben mit den zugeordneten Dezimalbrüchen bzw. Hundertstelbrüchen von Vorteil, z.B.: 1 % = $\frac{1}{100}$ = 0,01; 17,3 % = $\frac{17,3}{100} = 0{,}173$. Diese Gleichsetzung sollte deshalb bei bestimmten Rechnungen vorgenommen werden, auch wenn dies inhaltlich nicht gerechtfertigt ist. Bei der Erklärung des Prozentbegriffes und bei den ersten Übungen zum Prozentbegriff (d.h. zum Verwenden von Prozentangaben) sollte diese Gleichsetzung noch vermieden werden, um die Ausbildung der inhaltlichen Vorstellungen nicht zu behindern. Es ist ausreichend, die Gleichsetzung erst bei der Behandlung der Grundaufgaben der Prozentrechnung zu verwenden und auf die inhaltliche Problematik kurz hinzuweisen.

Zur Einführung des Prozentbegriffes

Bei der Einführung sollten folgende *Aspekte* des Prozentbegriffes beachtet werden:

- Die Bezeichnung „Prozent" (d.h. ohne gleichzeitige Verwendung einer Zahl, einer Variablen oder weiterer Zusätze) kann synonym zu den Sprechweisen *„pro hundert"* oder *„von hundert"* aufgefasst werden und ist in etwa in der Bedeutung des Prozentzeichens enthalten.
- Zu einer Prozentangabe gehört immer die Angabe einer *Bezugsgröße*.
- Hinter einer einzelnen Prozentangabe versteckt sich das *Verhältnis* zweier absoluter Zahlen, die Werte der Bezugsgröße und der Größe, die in Bezug gesetzt wird. Dieselbe Prozentangabe kann in den Dimensionen völlig unterschiedliche absolute Zahlen verbergen, z.B. kann „50 % der Schüler" sowohl 2 von 4 Schülern als auch 3746 von 7492 Schülern bedeuten.
  Eine Prozentangabe ist also eine spezielle Form eines Verhältnisses.
- Mit Prozentangaben können *Anteile*, die sich auf unterschiedliche Bezugsgrößen (Grundwerte) beziehen, *verglichen* werden.
- Eine Prozentangabe kann einen Anteil bezeichnen; dann ist sie kleiner als 100 %. Ist die in Bezug gesetzte Größe größer als die Bezugsgröße, so ist die Prozentangabe größer als 100 % und es wird eine Vervielfachung der Bezugsgröße zum Ausdruck gebracht.
- Prozentangaben bis 100 % liegen als Zahlenwerte zwischen 0 und 1. Man hat sie zur besseren Vorstellung auf den Bereich 0 bis 100 abgebildet (gestreckt, vergrößert).

Der Prozentbegriff kann mit der Erklärung von 1 % als „einer von hundert" verbunden werden. Damit wird ein Bild für die Angabe „1 %" aufgebaut, das inhaltlich richtig orientiert und auch praktisch oft verwendbar ist:

- Ich nehme an, es wären 100 Personen (oder auch Stück).
- Ich stelle mir davon eine Person (oder ein Stück) vor.

Ein Nachteil ist allerdings, dass mit dieser Erklärung nur ganzzahlige Prozentangaben anschaulich erfasst werden können.

Der Prozentbegriff kann nicht behandelt werden, ohne zumindest Aufgaben zur Bestimmung von Prozentsätzen und Prozentwerten zu lösen. Die Lösung dieser Aufgaben sollte mit der anschließenden Behandlung der Grundaufgaben abgestimmt sein, ohne die Verfahren erst ausführlich behandeln zu müssen. Der Einführung wird deshalb folgende *Konzeption* zu Grunde gelegt:

- Es erfolgt eine Beschränkung auf das *Rechnen mit bequemen Prozentsätzen*. Damit wird eine Vereinfachung der Rechnungen erreicht und so eine Konzentration auf das inhaltliche Verständnis gefördert. Bequeme Prozentsätze müssen ohnehin laut Rahmenplan behandelt werden.
- Mit den bequemen Prozentsätzen werden Aufgaben zu allen Grundtypen gelöst. Damit wird die anschließende Behandlung vorbereitet.
- Die Lösung der Grundaufgaben mit bequemen Prozentsätzen wird auf das *Rechnen mit Brüchen* zurückgeführt. Dies sollte den Schülern vertraut sein (in der Bruchrechnung vorbereitet, Wiederholung sicher notwendig), sodass keine lange Erarbeitung von Verfahren erfolgen muss.
- Bei der ausführlichen und separaten Behandlung der Grundaufgaben wird auf diese Vorgehensweise aufgebaut.

Vorstellungen zu den Begriffen Prozentsatz, Prozentwert und Grundwert

Die Begriffe Grundwert, Prozentsatz und Prozentwert werden im täglichen Leben mit Ausnahme des Begriffs Prozentsatz und des analogen Begriffs Zinssatz kaum verwendet. Zum Lösen von Prozentaufgaben ist die Verwendung dieser Begriffe letztlich *nicht* erforderlich.
Ihre Einführung und ihr sicherer Gebrauch sollte deshalb nur eine Zwischenstufe bei der Entwicklung des Könnens im Lösen von Prozentaufgaben sein. Entscheidend ist, dass bei den Schülern klare inhaltliche Vorstellungen ausgebildet werden, sodass sie später auch ohne bewusste Verwendung dieser Bezeichnungen entsprechende Aufgaben lösen können.
Spätestens in den gemischten Übungen sollte auf ein formales Aufschreiben dieser Begriffe als Bezeichnung der gegebenen und gesuchten Größen verzichtet werden.

Bereits in den speziellen Übungen zu den Grundaufgaben sollten *vielfältige sprachliche Varianten* der Begriffe bei Aufgabenstellungen verwendet werden.

Der *Grundwert G* ist die Bezugsgröße für die Prozentangabe. Häufige Bezeichnungen für Bezugsgrößen sind die Begriffe Gesamtgröße, Gesamtzahl, Gesamtwert, Gesamtheit, Gesamtmenge u. a. Diese Begriffe stehen damit in enger begrifflicher Beziehung zu „Grundwert“ und sollten als Bezeichnungen für Grundwerte verwendet werden.

Die Bezeichnung Vergleichsgröße für den Grundwert ist nicht günstig, da „Vergleichen“ im Denken der Schüler auf Grund des bisherigen Unterrichts und des Alltagsgebrauches mit der Untersuchung der Ordnungsrelation (größer, kleiner oder gleich) gekoppelt ist, während hier das Vergleichen im Bilden eines Verhältnisses besteht.

Der Begriff *Prozentsatz* (und vor allem Zinssatz) wird im Alltag meist als Bezeichnung für eine vollständige Prozentangabe verwendet (Der Zinssatz beträgt 4 %.), während in der Mathematik meist nur die Zahl vor dem Prozentzeichen gemeint ist (Der Prozentsatz/Zinssatz p ist 4.)
Im Interesse einer Übereinstimmung der Begrifflichkeit sollten im Mathematikunterricht die Begriffe Prozentsatz und Zinssatz wie im täglichen Leben verwendet und auch von dem Prozentsatz 4 % gesprochen werden.
Mit Blick auf die Formeln der Zinsrechnung wird als Formelsymbol für den Prozentsatz die Bezeichnung p % verwendet, obwohl eine solche Notation den Gepflogenheiten im Umgang mit Termen nicht entspricht (% ist kein selbstständiges mathematisches Zeichen und keine Einheit).

Für den *Prozentwert* wird die Bezeichnung W verwendet. Die Bezeichnung P für Prozentwert entspricht zwar der Konvention der Verwendung des ersten Buchstabens für eine Abkürzung, es können aber Verwechslungen mit p auftreten, obwohl diese Gefahr durch die Verwendung von p % für den Prozentsatz geringer sein dürfte. Für die Bezeichnung W im Sinne von Wert spricht jedoch auch, dass eine damit verbundene inhaltliche Kopplung mit dem Grundwert G den Zusammenhängen besser entspricht als die Kopplung mit „Prozent“.

Die Begriffe Prozentsatz, Prozentwert und Grundwert werden bereits bei der Einführung des Prozentbegriffes benötigt.

Orientierungen zum Lösen der Grundaufgaben der Prozentrechnung

Bekannte Verfahren

In Schulbüchern und der Literatur gibt u. a. folgende Verfahren zum Lösen der drei Grundaufgaben:

a) Verwenden einer einheitlichen Formel (Verwenden einer Verhältnisgleichung oder Verwenden der Formel zur Berechnung von Prozentwerten) für alle Grundaufgaben, jeweils Umstellen der Grundformel bei jeder Grundaufgabe
b) Verwenden eines einheitlichen Operatormodells (z.B. $G \xrightarrow{\cdot \frac{p}{100}} W$) zum Lösen jeder Grundaufgabe
c) Verwenden einer speziellen Formel für jede Grundaufgabe
d) Lösen aller Grundaufgaben durch Rückführung auf 1 %
e) Lösen aller Grundaufgaben durch Arbeiten mit dem Dreisatz
f) Rückführung des Lösens aller Grundaufgaben auf das Rechnen mit Brüchen, insbesondere bei bequemen Prozentsätzen
g) Verwenden je eines TR-Algorithmus unter Benutzung der Prozenttaste

Das Verfahren a) ist für den sicheren und unvorbereiteten Umgang mit Prozentangaben im Beruf und Alltag wenig geeignet, da zu viele Kenntnisse und Teilhandlungen zum Lösen einer einzelnen Aufgabe erforderlich sind. Es müssen jeweils die Begriffe Prozentwert, Prozentsatz und Grundwert beherrscht und in dem vorliegenden Sachverhalt identifiziert werden, die Verhältnisgleichung bekannt sein sowie das Umstellen der Verhältnisgleichung nach der gesuchten und das Einsetzen der gegebenen Größen beherrscht werden. Zum Lösen einer Aufgabe sind in der Regel schriftliche Arbeiten erforderlich. Auch die praktizierte Verwendung von Tabellen verringert die Anforderungen nicht entscheidend, es muss dann auch immer etwas aufgeschrieben werden. Weiterhin wurden mit diesem Vorgehen kaum inhaltliche Vorstellungen entwickelt, sondern ein rein formales Arbeiten begünstigt.

Mit dem *Operatormodell b)* wird die Beziehung zur Bruchrechnung gut hergestellt. Es bewegt sich aber auch auf einer formalen Ebene, benötigt Begriffe und Symbole sowie Kenntnisse im Arbeiten mit Pfeilbildern.

Das Verfahren c) führt sicher am schnellsten zum Erfolg, da nach Identifizierung des Aufgabentyps nur in eine fertige Formel eingesetzt werden muss. Es setzt jedoch voraus, dass die Begriffe und Formeln sicher beherrscht werden.

Das Verfahren d) unterscheidet sich in der Vorgehensweise bei den Überlegungen und schriftlichen Darstellungen für die Berechnung von Prozentwerten und Grundwerten nicht vom Dreisatz. Bei der Berechnung von Prozentsätzen gibt es Unterschiede.

Die Verfahren d) und e) benötigen keine Kenntnis von Formeln und Begriffen und sind deshalb für ein inhaltliches Arbeiten gut geeignet.

Das Verfahren f) setzt voraus, dass die Schüler in der Bruchrechnung mit entsprechenden Aufgabentypen sicher vertraut gemacht wurden:

Das Verfahren g) ist rein formal und an eine Prozenttaste auf einem TR gebunden

Allen Verfahren ist gemeinsam, dass alle drei Grundaufgaben in (im Prinzip) gleicher Weise gelöst werden sollen. Dies entspricht jedoch *nicht* den inhaltlichen Zusammenhängen. Während die Berechnung von Prozentwerten und Grundwerten einen gemeinsamen Denkrahmen haben (Es soll jeweils der Wert einer Größe ermittelt werden, der einem bestimmten Prozentsatz entspricht.), läuft die Berechnung von Prozentsätzen auf prinzipiell andere Überlegungen hinaus: Es ist das Verhältnis zweier Werte einer Größe zu bestimmen.

Wegen der Bedeutung der Prozentrechnung und der damit verbundenen Notwendigkeit einer ständigen Verfügbarkeit des Könnens im Umgang mit Prozentangaben sollten inhaltlich orientierte Verfahren, die ohne Begriffe und Formeln auskommen, im Mittelpunkt stehen.

Neuer Vorschlag

Es können zwei *Aufgabentypen* unterschieden werden:

a) Es ist eine Prozentangabe gegeben (Berechnung von Prozentwerten und Grundwerten).
b) Es ist eine Prozentangabe gesucht (Berechnung von Prozentsätzen).

Entsprechend diesen Aufgabentypen sollten *zwei Verfahren* behandelt werden. Beim Rechnen mit bequemen Prozentsätzen werden die Aufgaben auf das Rechnen mit Brüchen zurückgeführt.

Typ A: Eine Prozentangabe ist gegeben.

Die Aufgabe wird durch Rückführung auf 1 % bzw. mit dem Dreisatz gelöst.

Typ B: Eine Prozentangabe ist gesucht.

1. Es ist der Wert (die Bezugsgröße) zu bestimmen, auf den sich die Prozentangabe beziehen soll.
2. Es wird der Quotient aus dem gegebenem Wert und der Bezugsgröße gebildet und als Dezimalbruch dargestellt.
3. Dem Dezimalbruch wird der entsprechende Prozentsatz zugeordnet.

Die Rückführung auf ein 1% bzw. der Dreisatz brauchen als Verfahren nicht bezeichnet und schematisiert zu werden.

Weitere Bemerkungen

Das Rechnen mit beliebigen Prozentsätzen kann analog zur Arbeit mit bequemen Prozentsätzen auch durch Rückführung auf die Bruchrechnung erfolgen.

Beispiel 7,8 % von 632 € heißt $\frac{7,8}{100}$ von 632 € = $\frac{7,8}{100} \cdot 632€$.

Es sollten als Ergänzungen auch *Formeln* verwendet werden, wenn die Schüler die inhaltlichen Verfahren sicher beherrschen, da damit

- die Zusammenhänge und Begriffe gut dargestellt und gefestigt,
- funktionale Betrachtungen vorgenommen und
- die Schüler auf das Arbeiten mit Variablen und Gleichungen vorbereitet werden können.

Es sollte eine *Grundformel* angegeben und die anderen Formeln jeweils daraus hergeleitet werden. Da die Schüler die Umformungsregeln für Gleichungen erst in Klasse 8 kennen lernen, können die

Umformungen nur inhaltlich erfolgen.
Um das Umstellen sowie das Arbeiten mit den Formeln zu vereinfachen, sollte die folgende Form gewählt werden:

in Worten:	Prozentwert = Prozentsatz mal Grundwert
mit Variablen:	$W = p\,\% \cdot G$

Eine besondere Schwierigkeit sowohl in der Prozentrechnung als auch in der Bruchrechnung ist die unterschiedliche Verwendung des *Wortes „von".*

a) „von" als Multiplikation: z.B. 3 % von 20 m; $\frac{3}{10}$ von 18 kg; die Hälfte von 3 €

b) „von" als Division: z.B. 3 m von 20 m; 0,3 kg von 18 kg; 0,5 € von 3 €

Bei a) geht es um die Berechnung eines Prozentwertes. Vor dem „von" steht eine Prozentangabe oder ein Bruch. Beides ist als Operator aufzufassen.
Bei b) soll ein Verhältnis berechnet werden. Vor und hinter dem „von" stehen Größen der gleichen Art.
Diese Unterschiede sollten nicht explizit verdeutlicht, aber bei der Bildung der Aufgaben beachtet werden.

Es sollten keine Verfahren zur Verwendung einer *Prozenttaste auf einem TR* angegeben werden. Der TR sollte nur als Hilfsmittel zur Lösung der sich durch die Überlegungen ergebenden Rechenaufgaben genutzt werden.

6 Arbeiten mit Hilfsmitteln

Zur Einführung eines Taschenrechners

Die Befähigung der Schüler zum sicheren und sachgerechten Umgang mit einem Taschenrechner sollte nicht dem Selbstlauf überlassen werden, sondern erfordert eine bewusste, zielgerichtete und kontinuierliche Einbeziehung entsprechender Inhalte in den Mathematikunterricht. Dazu sind entsprechende Zeiten für spezielle Unterrichtssequenzen einzuplanen und es sollten aufeinander abgestimmte Aufgabengruppen bereitgestellt werden.

Die Befähigung zum Gebrauch des Taschenrechners sollte nicht auf Vorrat erfolgen, sondern an den Stellen, an denen Bezüge zum gerade behandelten Stoff bestehen und eine unmittelbare Anwendung des Gelernten sinnvoll ist. Bei der erstmaligen Bekanntschaft sollte allerdings zusammenhängend auf mehrere Probleme eingegangen werden.

Der Taschenrechner wird als Rechenhilfsmittel angesehen, das nach eigener Entscheidung des Schülers bzw. nach Anweisung des Lehrers verwendet werden kann.

Der Taschenrechner wird auch als Mittel zur Realisierung anderer Ziele des Mathematikunterrichts eingesetzt, z.B. zur Entwicklung des Könnens im Arbeiten mit Termen, im Umgang mit Zehnerpotenzen oder zur Auflockerung des Unterrichts.

Es sollten folgende allgemeine Hinweise zur Arbeit mit dem Taschenrechner erfolgen:

- Blickkontrolle nach Eingabe von Zahlen
- Löschen aller Speicher, wenn neuer Aufgabentyp vorliegt oder man sich vertippt hat
- Weglassen von Nullen vor Komma möglich

Es sollte auf folgende Bedienungselemente eingegangen werden:

- Unterschiede in der Notation der Operationszeichen und des Kommazeichens
- Ablesen von Zahlen in Exponentendarstellung, auch negative Exponenten, als Verschieben des Kommas deuten
- Möglichkeit der unterschiedlichen Reihenfolge von Zahl und Vorzeichen- bzw. Funktionstasten
- Bedeutung der Löschtasten (auch Bedeutung der Abkürzungen)
- Arbeit mit Vorrangautomatik
- Arbeit mit dem Speicher

Es sollten folgende Aufgabentypen bei der Einführung in das Arbeiten mit dem Taschenrechner berücksichtigt werden:

- Aufgaben zur Beherrschung folgender Grundelemente:
    - Aufgaben mit einer Rechenoperation
    - Aufgaben zur Division durch Null
    - Aufgaben zur Vorrangautomatik
    - Aufgaben zur Arbeit mit Klammern
    - Aufgaben zur Arbeit mit dem Speicher
- Aufgaben zum Einsatz von Kontrollen
    - Wiederholung der Rechnung als Hauptmethode
    - Durchführung eines anderen Rechenweges
    - Verwenden des Ergebnisses durch Rechnen von Umkehraufgaben

- Blickkontrollen bei Summen mit vielen Summanden
- Überschlag bei überschaubaren Zahlen

– Aufgaben zur Überwindung der Rechnergläubigkeit
  - Berechnung von Termen der Form $\frac{a}{b \cdot c}$, $\frac{a}{b+c}$ $(a + b) \cdot c$ und andere
  - Aufgaben zur beschränkten Rechnergenauigkeit z.B. $\left(\frac{1}{3}\right)^3 - \frac{1}{27}$

– Aufgaben zum Kennenlernen der Besonderheiten des Taschenrechners
  - Erkunden der maximal angezeigten Stellenzahl
  - Suche nach versteckten Ziffern
  - Tippen mehrerer Operationstasten nacheinander

– Aufgaben zur Entwicklung der Entscheidungsfähigkeit zum Rechnereinsatz
  - Wettkampf Kopf gegen Rechner
  - Aufgaben, bei denen Rechner wenig nützt (Zerlegen von Zahlen, Zusammenfassen von Termen)

Weitere Ziele, die mit einem Taschenrechner verbunden werden können

Neben dem Ziel einer sicheren Beherrschung des Taschenrechners als Rechenhilfsmittel kann mit seinem Einsatz auch zur Realisierung folgender Ziele beigetragen werden:

– Entwicklung einer forschenden Haltung, Spaß am Experimentieren und Probieren
– Entwicklung des Konzentrationsvermögens
– Einsicht, dass bei Arbeit mit Rechenhilfsmitteln das Auftreten von Eingabe- oder Bedienungsfehlern trotz aller Bemühungen unvermeidlich ist und Kontrollen unbedingt notwendig sind, Entwicklung einer kritischen Haltung zu den Rechnerergebnissen
– Einsicht, dass Rechner eine zwar große aber beschränkte Genauigkeit haben und dadurch Fehler und Probleme entstehen können, die bei Rechnung mit den exakten Zahlen nicht auftreten
– Entwicklung der Kopfrechenfertigkeiten
– Spaß am Mathematikunterricht

Bei Beschränkung auf ausgewählte Tasten, können Aufgaben zu Tastenfolgen aufgenommen werden. Es sollte der Begriff „Tastenfolge“ und nicht „Rechenablaufplan“ verwendet werden, da er einfacher und aussagekräftiger ist. Aufgaben mit Tastenfolgen dienen vor allem der Untersuchung von Termstrukturen.

7 Näherungswerte und sinnvolle Genauigkeit

Bei der Arbeit mit Näherungswerten und sinnvoller Genauigkeit geht es um zwei Sachverhaltsgruppen:

- das Phänomen der Näherungswerte und
- die Phänomene der Genauigkeit beim Rechnen mit Näherungswerten.

Es muss unterschieden werden zwischen den rein innermathematischen Betrachtungen und den Betrachtungen zum Verhältnis von realen Erscheinungen und ihrer mathematischen Widerspiegelung (Modellierung).

Zum Problem der Näherungswerte

Der Begriff „Näherungswert“ hat folgende ***inhaltliche Aspekte***:

a) innermathematisch

- In der Mathematik kann man alle Zahlenwerte exakt angeben. Auch die Länge von Strecken, der Flächeninhalt und das Volumen von geometrischen Figuren lassen sich genau angeben.
- In einigen Fällen ist es sinnvoll in einigen sogar notwendig, mit Näherungswerten für die Zahlen zu arbeiten.
- Es ist sinnvoll, Näherungswerte zu verwenden, wenn:
  - Wertetabellen aufgestellt werden,
  - Funktionen grafisch dargestellt werden sollen,
  - Lösungen von Gleichungen bzw. Gleichungssystemen angegeben werden,
  - Berechnungen von Streckenlängen, Winkelgrößen, Flächen- und Rauminhalten insbesondere mit der Satzgruppe des Pythagoras oder mit trigonometrischen Mitteln erfolgen.
- Es ist notwendig, Näherungswerte zu verwenden, wenn:
  - ein Überschlag oder eine Abschätzung gemacht werden soll,
  - numerische Ergebnisse einer Rechnung mit periodischen Dezimalbrüchen oder irrationalen Zahlen erhalten werden
- Man kann eine Zahl *runden*. Die gerundete Zahl liegt in der Nähe der genauen Zahl. Eine gerundete Zahl enthält weniger Dezimalstellen oder im Falle einer ganzen Zahl mehr Nullen als letzte Ziffern.
- Bei *Überschlägen* rechnet man mit stark gerundeten Zahlen, so dass die Rechnungen im Kopf lösbar werden.
- Man kann bei Rechnungen auch Zahlen nach oben oder unten *abschätzen*, d.h. Näherungswerte angeben, die bestimmt kleiner oder größer als der Ausgangswert sind, und so eine Abschätzung für das Ergebnis erhalten.

b) als Verhältnis Realität - Modell

- In der Realität ist der wahre Wert einer Größe oft unbekannt und man kennt nur einen Näherungswert. Dies wird jedoch meist nicht explizit hervorgehoben. So wird auch in der Regel ein Gleichheitszeichen zur Angabe der Werte der Größen verwendet.
- Ein Näherungswert kann mehr oder weniger vom wahren Wert abweichen, man sagt, er ist mehr oder weniger *genau*. Die Größe der Abweichung wird als *Genauigkeit* des Näherungswerts bezeichnet. Damit ist in der Regel die absolute Abweichung vom wahren Wert

gemeint. Es ist aus den Zahlenangaben zu einem Sachverhalt jedoch nicht immer erkennbar, welche Genauigkeit die Größenangaben haben.

- Es sind zahlreiche Konventionen und auch Vorschriften zu beachten. Die Genauigkeit kann weit größer (Baumarkt: „Türhöhe 2 m“) oder auch kleiner (Angaben auf Bauzeichnungen meist in Millimeter) sein als durch die angegebenen Ziffern zum Ausdruck gebracht wird, d. h. größer oder kleiner als die Hälfte der letzten Einheit.
- Je mehr Dezimalstellen ein Näherungswert hat, umso genauer ist er.
- Messinstrumente haben nur eine bestimmte Genauigkeit. Alle Messwerte sind deshalb in der Regel mit Fehlern behaftet.
- Beim Schätzen einer Größe erhält man nur einen Näherungswert. Beim Schätzen verwendet man seine Größenvorstellungen.
- Man kann eine Größe auch nach oben oder unten abschätzen und erhält so ebenfalls Näherungswerte.

Das Phänomen „Näherungswert“ kann in Bezug auf seine beiden inhaltlichen Erscheinungsformen in gleicher Weise ***formal mathematisch*** beschrieben werden, wobei auch einige Konventionen zu beachten sind.

- Die Differenz zwischen dem genauen (dem wahren) Wert heißt absoluter Fehler des Näherungswertes. Der absolute Fehler kann positiv oder negativ sein.
- Je kleiner der absolute Fehler ist, umso genauer ist der Näherungswert.
- Das Verhältnis des absoluten Fehlers zum genauen Wert heißt relativer Fehler des Näherungswertes.
- Wird nur vom Fehler eines Näherungswertes gesprochen, ist der absolute Fehler gemeint.
- Die Genauigkeit eines Näherungswertes kann explizit durch ein Intervall oder durch Fehlerschranken angegeben werden.
- Die Genauigkeit kann auch implizit durch die Anzahl der Stellen des Näherungswertes ausgedrückt werden:
  Enthält der Näherungswert Dezimalstellen, so ist die Hälfte der letzten Einheit eine Schranke für den Fehler.
  Ist der Näherungswert eine natürliche Zahl und ein Vielfaches einer Zehnerpotenz, kann in der Regel keine Aussage über die Genauigkeit des Näherungswertes gemacht werden.
  Oft richtet sich die Genauigkeit nach der letzten von Null verschiedenen Stelle.
  Es ist in diesen Fällen üblich, den Näherungswert mit abgetrennten Zehnerpotenzen zu schreiben und durch die Dezimalstellen des Faktors vor der Zehnerpotenz die Genauigkeit anzugeben.
- Eine Ziffer eines Näherungswertes heißt *zuverlässig*, wenn der Fehler kleiner als die Hälfte der Einheit des Stellenwertes der Ziffer ist.
- Ist ein Näherungswert durch richtiges Runden entstanden, sind alle Ziffern zuverlässig.
- Alle zuverlässigen Ziffern außer den Ziffern, die links von der ersten von Null verschiedenen Ziffer stehen, heißen *wesentliche* Ziffern.

Zum Rechnen mit Näherungswerten

Das Rechnen mit Näherungswerten kann auf der ***inhaltlichen Ebene*** wie folgt beschrieben werden.

- Rechnet man mit Näherungswerten, kann das Ergebnis auch nur ein Näherungswert sein.
- Die Genauigkeit des Ergebnisses einer Rechnung hängt ab von
  1. der Güte des verwendeten Modells für einen außermathematischen Sachverhalt,

2. der Genauigkeit der Ausgangswerte,
3. Genauigkeitsforderungen, die sich aus dem Sachverhalt ergeben,
4. der Art und Anzahl der auszuführenden Operationen,
5. den verwendeten Rechenhilfsmitteln,
6. von geltenden Vorschriften oder Konventionen.

- Man erhält bei Rechnungen mit Näherungswerten, insbesondere, wenn Multiplikationen und Divisionen auftreten, oft mehr Stellen im Ergebnis als sinnvoll sind.
- Wenn es sich bei den Ausgangswerten und den Ergebnissen um verschiedene Größenarten handelt (z.B. Länge und Fläche), kann die Genauigkeit der Ausgangswerte mit der Genauigkeit der Eingangswerte nicht mit Hilfe der Anzahl der Dezimalstellen verglichen werden.
- Man kann bei vergleichbarer Genauigkeit von Ausgangswerten und Ergebnis nicht generell sagen, dass die Genauigkeit des Ergebnisses der Genauigkeit des ungenauesten Ausgangswertes entspricht. Dies trifft lediglich zu, wenn nur Additionen oder Subtraktionen auftreten.
- Bei Multiplikationen ist es oft sinnvoll, im Ergebnis weniger Dezimalstellen als in den Ausgangswerten anzugeben.
- Bei der Division von Näherungswerten kann das Ergebnis mehr Dezimalstellen haben, als der ungenaueste Ausgangswert hat.

Auf der ***formalen mathematischen Ebene*** gibt es folgende Möglichkeiten zur Beschreibung des Arbeitens mit sinnvoller Genauigkeit. Die Beschreibung kann auf verschiedenen Theorieebenen erfolgen.

1. Ebene: Rechnen mit fiktiven Stellen

- Für die unbekannten Stellen werden Variable eingesetzt (z.B. als Fragezeichen), mit denen ein schriftliches Rechenverfahren durchgeführt wird.
- Es lassen sich keine Regeln oder Fehlerschranken gewinnen. Die Unsinnigkeit vieler Ziffern im Ergebnis und die Notwendigkeit einer sinnvollen Genauigkeit kann jedoch gut verdeutlicht werden.

Bsp.: $\underline{3{,}44? \cdot 0{,}78?}$

$$\begin{array}{r} 2408? \\ 2752? \\ \underline{+\quad ????} \\ 2{,}6???? \end{array}$$

2. Ebene: Regeln der Ziffernzählung

- Es erfolgt eine Beschränkung auf zwei Operanden. Lediglich bei ausschließlicher Addition oder Subtraktion sind auch beliebig viele Operanden zugelassen.
- Es werden bei der Addition und Subtraktion die zuverlässigen und bei der Multiplikation und Division die wesentlichen Ziffern der Ausgangswerte berücksichtigt.
- Die Regeln können in folgender Weise formuliert werden:
  (1) Bei der ***Addition und Subtraktion*** von Näherungswerten sind im Resultat nur so viele ***Dezimalstellen*** beizubehalten wie in dem Ausgangswert mit kleinster Anzahl von Dezimalstellen vorhanden sind.

(2) Bei der ***Multiplikation und Division*** von Näherungswerten sind im Resultat nur so viele ***wesentliche Ziffern*** beizubehalten wie in dem Ausgangswert mit kleinster Anzahl von wesentlichen Ziffern vorhanden sind.

Bsp.: $A = 17{,}1\text{ cm} \cdot 24{,}1\text{ cm} = 412{,}11\text{ cm}^2$

Die Ausgangswerte haben drei wesentliche Ziffern, also: $A \approx 412\text{ cm}^2$

- Auf den Begriff wesentliche Ziffer kann in unteren Klassen verzichtet werden, in dem man sagt, dass die Anzahl *aller* Ziffern des Näherungswertes zu berücksichtigen ist, *außer* den Nullen, die links stehen.
- Die Regeln geben die Fehlerschranken des Ergebnisses nicht in jedem Fall richtig an. Sie sind also nur Faustregeln.
- Die Regeln gelten nur für die vier Grundrechenarten, können aber in analoger Weise auch für höhere Rechenarten übernommen werden.

3. Ebene: Wertschrankenbetrachtung

- Es sind auch Betrachtungen von Termen mit mehreren verschiedenen Rechenoperationen möglich.
- Es können auch nichtlineare Bestandteile von Termen (z.B. Winkelfunktionen) auftreten, wenn die Terme in den betrachteten Fehlerintervallen monoton sind.
- Es werden bei einfachen Termstrukturen tatsächliche Schranken für den Fehler des Ergebnisses erhalten.
- Der Rechenaufwand ist erheblich größer als bei der eigentlichen Rechnung. Es müssen teilweise schwierige Monotoniebetrachtungen angestellt werden. Insbesondere, wenn die gleiche Größe mehrfach auftritt, z.B. $A = b \cdot (a - b)$
- Es gibt keine generellen Resultate (Regeln oder Sätze). Es muss in jedem konkreten Fall erneut mit den Wertschranken gerechnet werden.
  Bsp.: $A = a \cdot b$ $\quad A = 17{,}1\text{ cm} \cdot 24{,}1\text{ cm}$ $\quad A = 412{,}11\text{ cm}^2$

  Betrachtung der Wertschranken:

  $17{,}05\text{ cm} \le a \le 17{,}15\text{ cm}$

  $24{,}05\text{ cm} \le b \le 24{,}15\text{ cm}$

  $410{,}0525\text{ cm}^2 \le A \le 414{,}1725\text{ cm}^2$ oder $410\text{ cm}^2 \le A \le 415\text{ cm}^2$

  $A = 412{,}125\text{ cm}^2 \pm 2{,}06\text{ cm}^2$ $\qquad$ oder $A = 412{,}5\text{ cm}^2 \pm 2{,}5\text{ cm}^2$

  $A \approx 412\text{ cm}^2$, d.h. $411{,}5\text{ cm}^2 \le A \le 412{,}5\text{cm}^2$ oder

  $A \approx 410\text{ cm}^2$, d.h. $405\text{ cm}^2 \le A \le 415\text{ cm}^2$

  Antwort: $\quad A \approx 412\text{ cm}^2$

4. Ebene: Fehlerfortpflanzung

- Nur in einfachen Fällen (Grundrechenoperationen) sind Ergebnisse ohne Mittel der höheren Mathematik (Differentialrechnung, Funktionen mit mehreren Variablen) möglich.
- Es werden exakte Fehlergrenzen für Typen von Termen ermittelt.
  Bsp.: Mit einem LKW sollen 35 gleiche Stahlträger, die eine Masse von je 286 kg haben, transportiert werden. Wie groß ist die Masse der Ladung?

  Lösung mit TR: $\quad 35 \cdot 286\text{ kg} = 10010\text{ kg} = 10{,}010\text{ t}$

Fehlerfortpflanzung: $35 \cdot (286 \pm 0{,}5)$ kg = 10010 kg $\pm$ $35 \cdot 0{,}5$ kg = $(10010 \pm 17{,}5)$ kg.

Antwort: m $\approx$10,0 t

Phasen der Entwicklung des Könnens

Es sollte für beide Sachverhaltsgruppen ein dreistufiger Entwicklungsprozess bis Klasse 10 konzipiert werden:

1. Stufe: Klassen 1 - 4:

- Dominanz der inhaltlichen Betrachtungen
- an Beispielen erkennen, dass Messgeräte nur eine bestimmte Genauigkeit haben und Messwerte deshalb immer Näherungswerte sind
- Können im Anwenden der Rundungsregeln für natürliche Zahlen
- Beispiele für unsinnige Genauigkeitsangaben

2. Stufe: Klassen 5 - 8:

- schrittweise Zunahme formaler Betrachtungen bei Beachtung der Wechselverhältnisse von inhaltlichen und formalen Aspekten, Einführung der Regeln der Ziffernzählung
- gründliche separate Beschäftigung mit den einzelnen formalen Aspekten
- Dominanz der Steuerung des Lehrers, auch Verzicht auf Betrachtungen durch Vorgabe der Genauigkeit durch den Lehrer

3. Stufe: Klassen 9, 10:

- Integration und Erweiterung der formalen Betrachtungen
- komplexe Anwendung der inhaltlichen und formalen Aspekte bei Dominanz inhaltlicher Betrachtungen
- vorwiegend selbstständige Entscheidungen des Schülers bei jeder Sachaufgabe

Als mathematische Ebene sollten vorrangig die Regeln der Ziffernzählung behandelt werden. Das Rechnen mit variablen Stellen und die Wertschrankenbetrachtung dienen der Verdeutlichung der Notwendigkeit von Genauigkeitsbetrachtungen und der Grenzen der Regeln der Ziffernzählung.

Auf die Termini *gültige* und *zuverlässige* Ziffer kann verzichtet werden. Die Bezeichnung *wesentliche* Ziffer sollte zur Vereinfachung der Formulierung von Angaben zur geforderten Genauigkeit der Ergebnisse in oberen Klassen eingeführt werden.

Als inhaltliche Vorbereitung der nächsten formalen Ebene können auch Betrachtungen zur Fehlerfortpflanzung in einfachen Fällen (Vervielfachen, Teilen eines Näherungswertes) angestellt werden.

Die Entwicklung des Könnens muss im Rahmen verschiedener Stoffgebiete erfolgen. Dazu gehören alle, in denen numerisch zu lösende Anwendungsaufgaben vorkommen. Neben der impliziten Berücksichtigung müssen explizite Lernphasen vorgesehen werden.

Die Entwicklung im Mathematikunterricht muss mit der Entwicklung in anderen Unterrichtsfächern, insbesondere den naturwissenschaftlichen Fächern abgestimmt werden, da das Ziel das Arbeiten auf inhaltlicher Ebene, also im Sachbereich, ist.