Fourierreihe und Fouriertransformation

Fourierreihen mit reellen Koeffizienten

Grundlegende Begriffe: Das Funktionensystem

Im Definitionsbereich $D = [-\pi, +\pi]$ bilden folgende Funktionen ein vollständiges orthonormiertes Funktionensystem:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx) \quad \text{mit} \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \infty$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx) \quad \text{mit} \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \infty$$

Orthogonalität

Für zwei verschiedene Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ des Funktionensystems gilt:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \;=\; 0$$

Normierung

Für jede Funktion $f(x)$ des Funktionensystems gilt:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) f(x) \, \mathrm{d}x = 1$$

Fourierreihen mit reellen Koeffizienten

Wenn eine Funktion $f(x)$ im Bereich $[-\pi, +\pi]$ durch ein trigonometrisches Polynom der Form

$$s_n(x) \;=\; \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right]$$

approximiert wird, dann ist das Integral über die Quadrate der Abweichungen,

$$\delta^2 \;=\; \int_{-\pi}^{+\pi} \left[f(x) - s_n(x)\right]^2 \mathrm{d}x \,,$$

genau dann minimal, wenn a_k und b_k die sogenannten Fourierkoeffizienten sind.

Die Fourierkoeffizienten a_k und b_k der Funktion $f(x)$ lauten:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos(kx)\,\mathrm{d}x \quad \text{mit} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin(kx)\,\mathrm{d}x \quad \text{mit} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Fourierreihen mit reellen Koeffizienten

Der Satz von Dirichlet

Die Funktion $f(x)$ genüge im Bereich $[-\pi, +\pi]$ den sogenannten Dirichlet'schen Bedingungen:

(a) Das Intervall $[-\pi, +\pi]$ lässt sich in endlich viele Teilintervalle zerlegen, in denen $f(x)$ stetig und monoton ist.

(b) Ist x_0 eine Unstetigkeitsstelle von $f(x)$, so existieren $f(x_0 + 0)$ und $f(x_0 - 0)$.

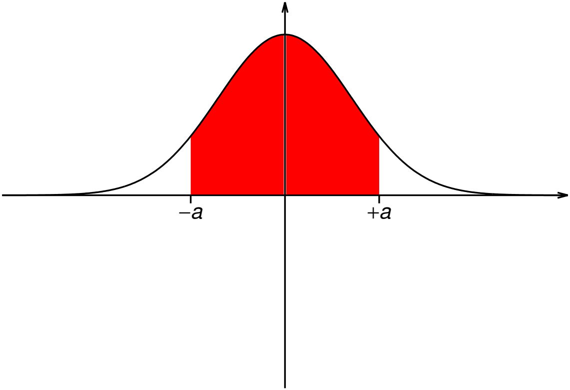
Dann konvergiert die Fourierreihe von $f(x)$ und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left[a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\right]\right\}$$

$$=\begin{cases} f(x)\,, & \text{falls } f \text{ stetig in } x \text{ ist.} \\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\,, & \text{falls } f \text{ nicht stetig in } x \text{ ist.} \end{cases}$$

Fourierreihen mit reellen Koeffizienten

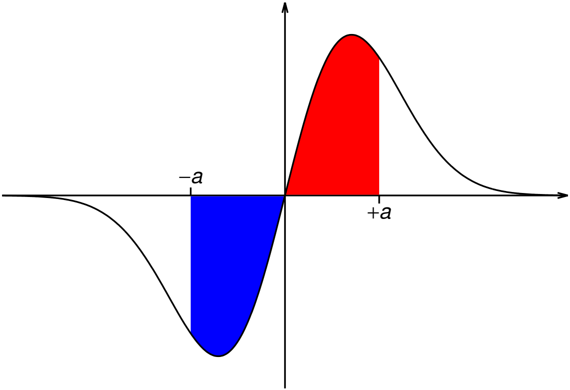
Fourierkoeffizienten symmetrischer Funktionen



$$g(-x) = +g(x) \quad \Rightarrow \quad \int_{-a}^{+a} g(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{+a} g(x)\,\mathrm{d}x$$

Fourierreihen mit reellen Koeffizienten

Fourierkoeffizienten symmetrischer Funktionen



$$u(-x) = -u(x) \quad \Rightarrow \quad \int_{-a}^{+a} u(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Fourierreihen mit reellen Koeffizienten

Fourierkoeffizienten symmetrischer Funktionen

$$g(-x) = +g(x) \quad \text{für} \quad -\pi \le x \le +\pi$$

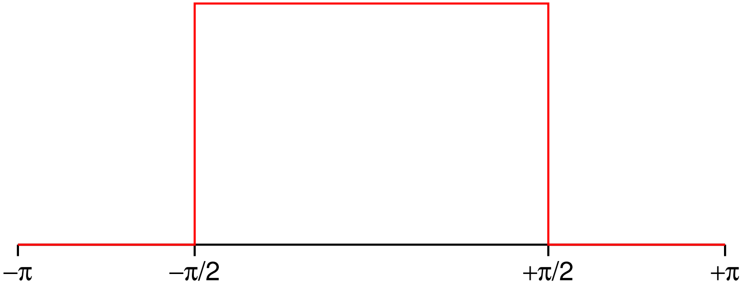
$$\Rightarrow \quad \begin{cases} a_k = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{+\pi} g(x) \cos(kx) \, \mathrm{d}x \\ b_k = 0 \end{cases}$$

$$u(-x) = -u(x) \quad \text{für} \quad -\pi \le x \le +\pi$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} a_k = 0 \\ b_k = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{+\pi} u(x) \sin(kx) \, \mathrm{d}x \end{cases}$$

Fourierreihen mit reellen Koeffizienten

Beispiel: Die Rechteckfunktion



$$f(x) = \begin{cases} \pi & \text{für} \quad |x| < \pi/2 \\ \pi/2 & \text{für} \quad |x| = \pi/2 \\ 0 & \text{für} \quad |x| > \pi/2 \end{cases}$$

Fourierreihen mit reellen Koeffizienten

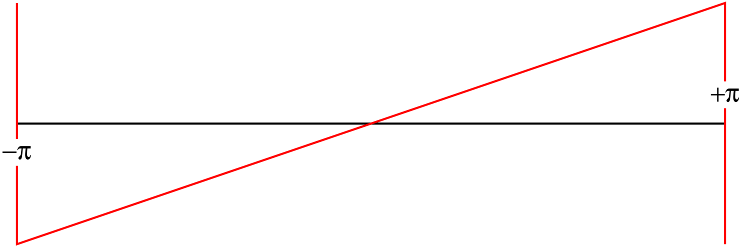
Beispiel: Die Rechteckfunktion

$$a_k = \begin{cases} \pi & \text{für} \quad k = 0 \\ (-1)^{(k-1)/2}\,\dfrac{2}{k} & \text{für} \quad k = 1, 3, 5, \ldots \\ 0 & \text{für} \quad k = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$$

$$b_k = 0$$

Fourierreihen mit reellen Koeffizienten

Beispiel: Die Sägezahnfunktion



$$f(x) = x$$

Fourierreihen mit reellen Koeffizienten

Beispiel: Die Sägezahnfunktion

$$a_k = 0$$

$$b_k = (-1)^{(k-1)} \frac{2}{k}$$

Fourierreihen mit reellen Koeffizienten

Mathematische Formulierung der Fourierreihe für $D = [-L, +L]$

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right]$$

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \mathrm{d}x \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \mathrm{d}x \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Fourierreihen mit reellen Koeffizienten

Mathematische Formulierung der Fourierreihe für $D = [-T, +T]$

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi t}{T}\right) \right]$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} f(t) \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right) \mathrm{d}t \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} f(t) \sin\left(\frac{k\pi t}{T}\right) \mathrm{d}t \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Fourierreihen mit komplexen Koeffizienten

Zusammenhang zwischen reellen und komplexen Funktionen bzw. Koeffizienten

Euler-Relation: $\exp(i\varphi) = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$

$$
\begin{aligned}
& \exp(+ikx) &=& \cos(kx) + i\sin(kx) \\
\wedge\ & \exp(-ikx) &=& \cos(kx) - i\sin(kx) \\
& &\Downarrow& \\
& \cos(kx) &=& \tfrac{1}{2}[\exp(+ikx) + \exp(-ikx)] \\
\wedge\ & \sin(kx) &=& \tfrac{1}{2i}[\exp(+ikx) - \exp(-ikx)] \\
& &=& -\tfrac{i}{2}[\exp(+ikx) - \exp(-ikx)]
\end{aligned}
$$

Fourierreihen mit komplexen Koeffizienten

Zusammenhang zwischen reellen und komplexen Funktionen bzw. Koeffizienten

$$\begin{aligned} s(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2} [\exp(+ikx) + \exp(-ikx)] \\ &\quad - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ib_k}{2} [\exp(+ikx) - \exp(-ikx)] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - ib_k}{2} \exp(+ikx) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k + ib_k}{2} \exp(-ikx) \end{aligned}$$

Fourierreihen mit komplexen Koeffizienten

Zusammenhang zwischen reellen und komplexen Funktionen bzw. Koeffizienten

$$
\begin{aligned}
s(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - ib_k}{2} \exp(+ikx) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k + ib_k}{2} \exp(-ikx) \\
&= \frac{a_0}{2} \exp(+i0x) + \sum_{k=+1}^{+\infty} \frac{a_{+k} - ib_{+k}}{2} \exp(+ikx) \\
&\qquad + \sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} \exp(+ikx) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \exp(+ikx)
\end{aligned}
$$

Fourierreihen mit komplexen Koeffizienten

Zusammenhang zwischen reellen und komplexen Funktionen bzw. Koeffizienten

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2} a_0 & \text{für} \quad k = 0 \\ \frac{1}{2}(a_{+k} - i b_{+k}) & \text{für} \quad k > 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + i b_{-k}) & \text{für} \quad k < 0 \end{cases}$$

Fourierreihen mit komplexen Koeffizienten

Zusammenhang zwischen reellen und komplexen Funktionen bzw. Koeffizienten

$$
\begin{aligned}
c_{k=0} &= \frac{a_0}{2} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \exp(-i0x) \, \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Fourierreihen mit komplexen Koeffizienten

Zusammenhang zwischen reellen und komplexen Funktionen bzw. Koeffizienten

$$
\begin{aligned}
c_{k>0} &= \frac{a_{+k} - ib_{+k}}{2} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos(+kx) \, \mathrm{d}x - \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin(+kx) \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) [\cos(kx) - i \sin(kx)] \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \exp(-ikx) \, \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Fourierreihen mit komplexen Koeffizienten

Zusammenhang zwischen reellen und komplexen Funktionen bzw. Koeffizienten

$$
\begin{aligned}
c_{k<0} &= \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos(-kx) \, \mathrm{d}x + \frac{i}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin(-kx) \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x) [\cos(kx) - i \sin(kx)] \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x) \exp(-ikx) \, \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Fourierreihen mit komplexen Koeffizienten

Mathematische Formulierung der Fourierreihe

$$s(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \exp(+ikx)$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \exp(-ikx)\,\mathrm{d}x$$

Fourierreihen mit komplexen Koeffizienten

Mathematische Formulierung der Fourierreihe für $D = [-L, +L]$

$$s(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \exp\left(+\frac{ik\pi x}{L}\right)$$

$$c_k = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} f(x) \exp\left(-\frac{ik\pi x}{L}\right) \mathrm{d}x$$

Fourierreihen mit komplexen Koeffizienten

Mathematische Formulierung der Fourierreihe für $D = [-T, +T]$

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \exp\left(+\frac{ik\pi t}{T}\right)$$

$$c_k = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t) \exp\left(-\frac{ik\pi t}{T}\right) \,\mathrm{d}t$$

Fourierreihen mit komplexen Koeffizienten

Fourierkoeffizienten symmetrischer Funktionen

$$
\begin{aligned}
g(-t) &= +g(t) \quad \text{für} \quad -T \leq t \leq +T \\
\Rightarrow \quad c_k &= \frac{1}{T} \int\limits_0^{+T} g(t) \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right) \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

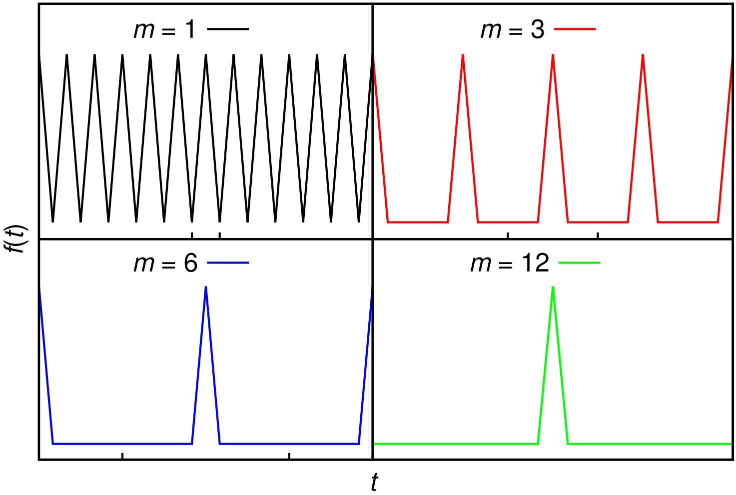
$$
\begin{aligned}
u(-t) &= -u(t) \quad \text{für} \quad -T \leq t \leq +T \\
\Rightarrow \quad c_k &= -i\,\frac{1}{T} \int\limits_0^{+T} u(t) \sin\left(\frac{k\pi t}{T}\right) \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Betrachtung des Einflusses des Signalabstands am Beispiel der folgenden periodisch fortgesetzten Funktion:

$$f(t) \ = \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{T} & \text{für} \qquad |t| \leq T \\[2ex] 0 & \text{für} \quad T < |t| \leq mT \end{cases}$$

Der Übergang Fourierreihe $\longrightarrow$ Fouriertransformation

Einfluss des Signalabstands auf die Fourierkoeffizienten



Der Übergang Fourierreihe $\longrightarrow$ Fouriertransformation

Einfluss des Signalabstands auf die Fourierkoeffizienten

Darstellung der Funktion $f(t)$ als komplexe Fourierreihe:

$$f(t) \quad = \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \exp\left(+\frac{ik\pi t}{mT}\right)$$

$$\text{mit} \quad c_k \quad = \quad \frac{1}{2mT} \int\limits_{-mT}^{+mT} f(t) \exp\left(-\frac{ik\pi t}{mT}\right) \mathrm{d}t$$

Der Übergang Fourierreihe $\longrightarrow$ Fouriertransformation

Einfluss des Signalabstands auf die Fourierkoeffizienten

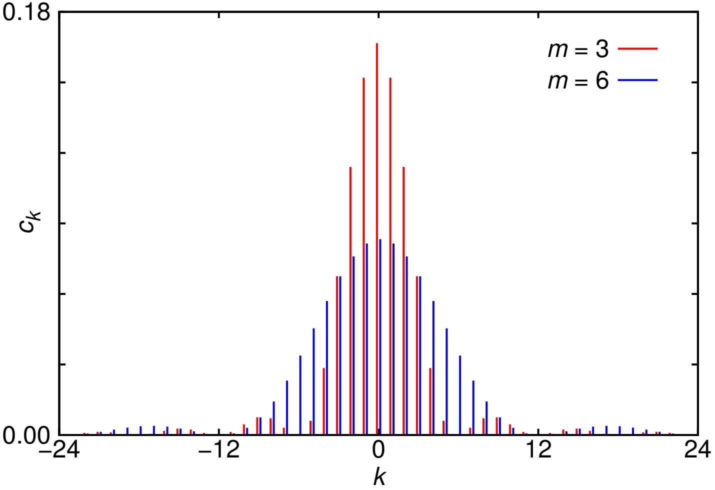
Berechnung der Fourierkoeffizienten der Funktion $f(t)$:

$$
\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2mT} \int\limits_{-mT}^{+mT} f(t) \exp\left(-\frac{ik\pi t}{mT}\right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{mT} \int\limits_{0}^{T} \left(1 - \frac{t}{T}\right) \cos\left(\frac{k\pi t}{mT}\right) \mathrm{d}t \\
&= \begin{cases} \dfrac{m}{(k\pi)^2}\left[1 - \cos\left(\dfrac{k\pi}{m}\right)\right] & \text{für} \quad k \neq 0 \\ \dfrac{1}{2m} & \text{für} \quad k = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Der Übergang Fourierreihe $\longrightarrow$ Fouriertransformation

Einfluss des Signalabstands auf die Fourierkoeffizienten

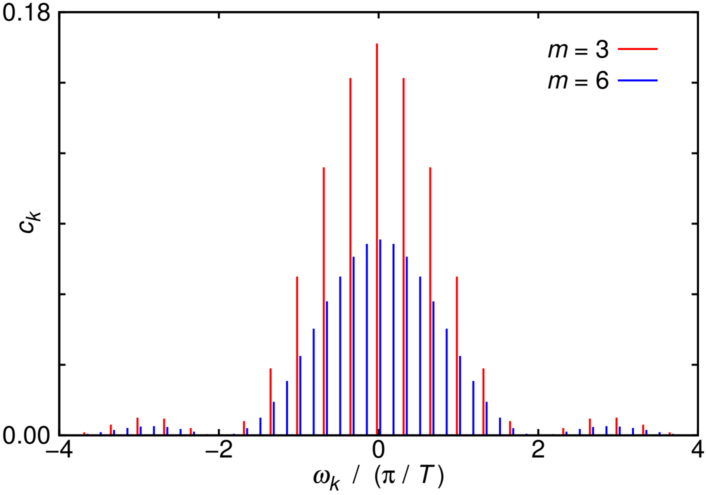
c_k als Funktion von k



Der Übergang Fourierreihe $\longrightarrow$ Fouriertransformation

Einfluss des Signalabstands auf die Fourierkoeffizienten

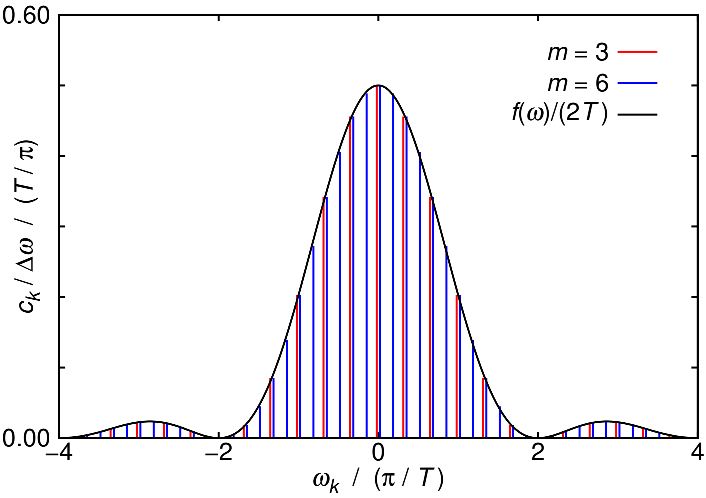
c_k als Funktion von $\omega_k = k \times \Delta\omega = k \times (\pi/mT)$



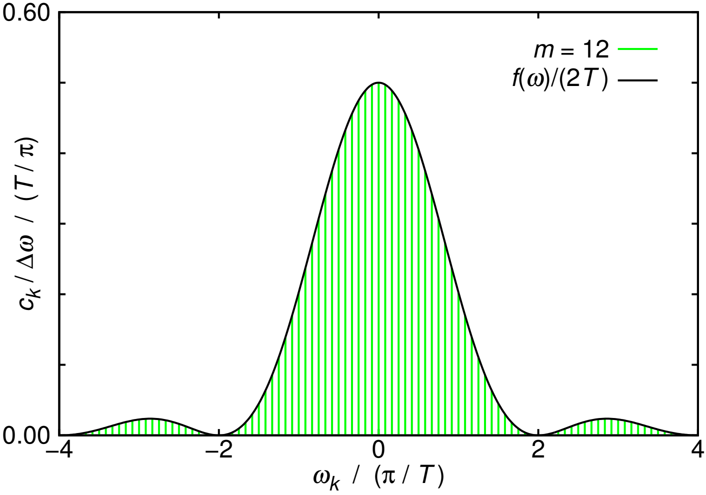
Der Übergang Fourierreihe $\longrightarrow$ Fouriertransformation

Einfluss des Signalabstands auf die Fourierkoeffizienten

$c_k/\Delta\omega$ als Funktion von $\omega_k = k \times \Delta\omega = k \times (\pi/mT)$



$c_k/\Delta\omega$ als Funktion von $\omega_k = k \times \Delta\omega = k \times (\pi/mT)$



Behauptung:

$f(\omega)$ ergibt sich durch Fouriertransformation der folgenden *nichtperiodischen* Funktion:

$$f(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{T} & \text{für} \quad |t| \leq T \\ 0 & \text{für} \quad |t| > T \end{cases}$$

Die Fouriertransformation ist eine Integraltransformation der Form

$$f(\omega) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\exp(-i\omega t)\,\mathrm{d}t$$

mit

$$f(t) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)\,\exp(+i\omega t)\,\mathrm{d}\omega$$

Der Übergang Fourierreihe $\longrightarrow$ Fouriertransformation

Mathematische Formulierung der Fouriertransformation (nach Weaver)

Die Fouriertransformation ist eine Integraltransformation der Form

$$f(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-i2\pi\nu t)\,\mathrm{d}t$$

mit

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\nu) \exp(+i2\pi\nu t)\,\mathrm{d}\nu$$

Berechnung von $f(\omega)$ durch Fouriertransformation von $f(t)$:

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-i\omega t)\, \mathrm{d}t \\ &= 2\int_{0}^{T} \left(1 - \frac{t}{T}\right) \cos(\omega t)\, \mathrm{d}t \\ &= \begin{cases} \dfrac{2}{\omega^2 T}\left[1 - \cos(\omega T)\right] & \text{für} \quad \omega \neq 0 \\ T & \text{für} \quad \omega = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Darstellung der periodischen Funktion $f(t)$ in Form einer Summe:

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{m}{(k\pi)^2}\left[1-\cos\left(\frac{k\pi}{m}\right)\right]}_{c_k} \exp\left(+\frac{ik\pi t}{mT}\right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{m}{(k\pi)^2}\frac{2\pi m T^2}{2\pi m T^2}}_{\frac{1}{2\pi}\left(\frac{mT}{k\pi}\right)^2 \frac{2}{T}\times\frac{\pi}{mT}} \left[1-\cos\underbrace{\left(\frac{k\pi}{m}\frac{T}{T}\right)}_{\left(\frac{k\pi}{mT}T\right)}\right] \exp\underbrace{\left(+\frac{ik\pi t}{mT}\right)}_{\left(+i\frac{k\pi}{mT}t\right)}
\end{aligned}
$$

Darstellung der periodischen Funktion $f(t)$ in Form einer Summe:

$$\omega_k = k \times \Delta\omega = k \times \frac{\pi}{mT}$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\omega_k^2 T} \left[1 - \cos(\omega_k T)\right] \exp(+i\omega_k t)\, \Delta\omega$$

Darstellung der nichtperiodischen Funktion $f(t)$ in Form eines Integrals:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{2}{\omega^2 T} [1 - \cos(\omega T)]}_{f(\omega)} \exp(+i\omega t)\, \mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{m\to\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\omega_k^2 T} [1 - \cos(\omega_k T)] \exp(+i\omega_k t)\, \Delta\omega$$

Fouriertransformationspaare

Rechteckfunktion & Sinus cardinalis

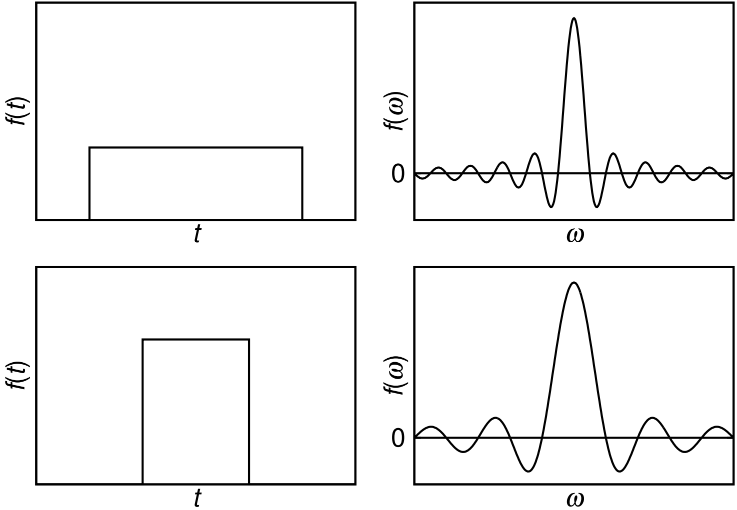
$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2T} & \text{für} \quad |t| < T \\[2ex] \dfrac{1}{4T} & \text{für} \quad |t| = T \\[2ex] 0 & \text{für} \quad |t| > T \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-i\omega t) \,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\sin(\omega T)}{\omega T} = \mathrm{si}(\omega T)$$

Fouriertransformationspaare

Rechteckfunktion & Sinus cardinalis



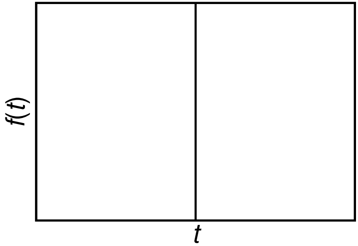
Fouriertransformationspaare

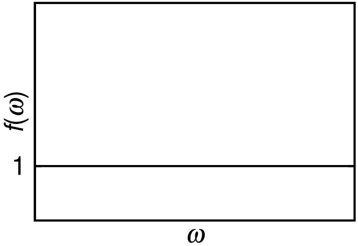
δ-Funktion & konstante Funktion

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \delta(t) \\
\Rightarrow \quad f(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-i\omega t)\,\mathrm{d}t \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Fouriertransformationspaare

δ-Funktion & konstante Funktion





Fouriertransformationspaare

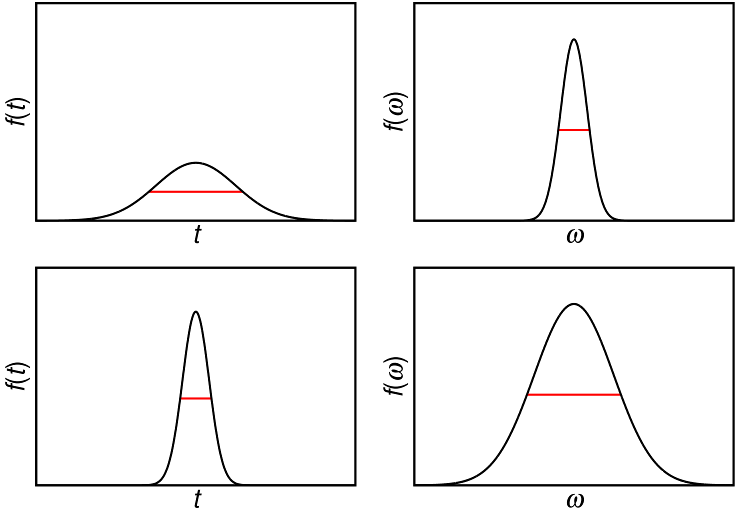
Gauß-Funktion & Gauß-Funktion

$$f(t) = \frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\tau^2}\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad f(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-i\omega t)\, \mathrm{d}t \\ &= \exp\left(-\frac{\tau^2\omega^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Fouriertransformationspaare

Gauß-Funktion & Gauß-Funktion



Fouriertransformationspaare

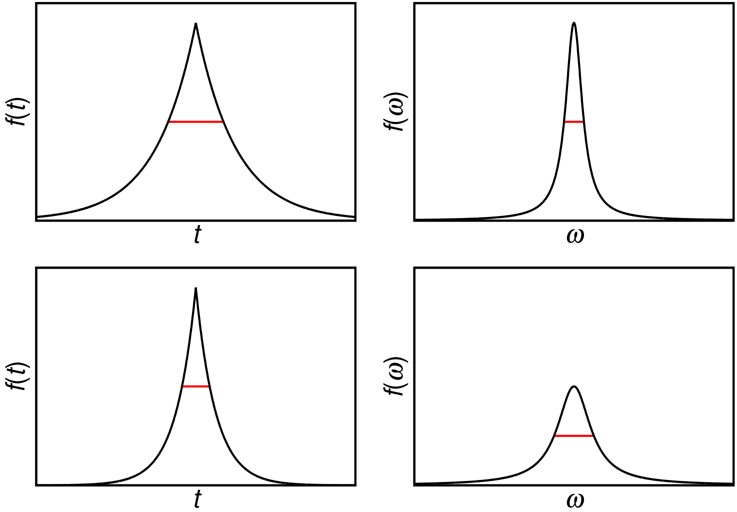
Exponentialfunktion & Lorentz-Funktion

$$f(t) = \exp(-|t|/\tau)$$

$$\Rightarrow \quad f(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-i\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{2\tau}{1+\tau^2\omega^2}$$

Fouriertransformationspaare

Exponentialfunktion & Lorentz-Funktion



Fouriertransformationspaare

Exponentialfunktion & Lorentz-Funktion

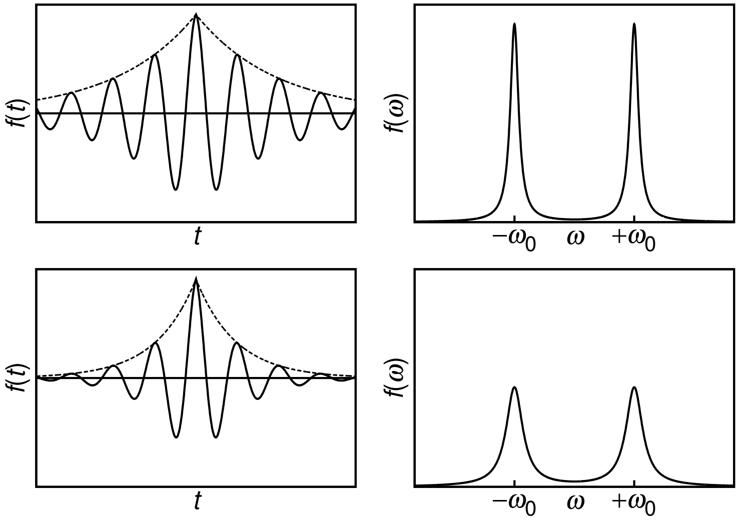
$$f(t) \quad = \quad \exp(-|t|/\tau)\cos(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow \quad f(\omega) \quad = \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-i\omega t)\,\mathrm{d}t$$

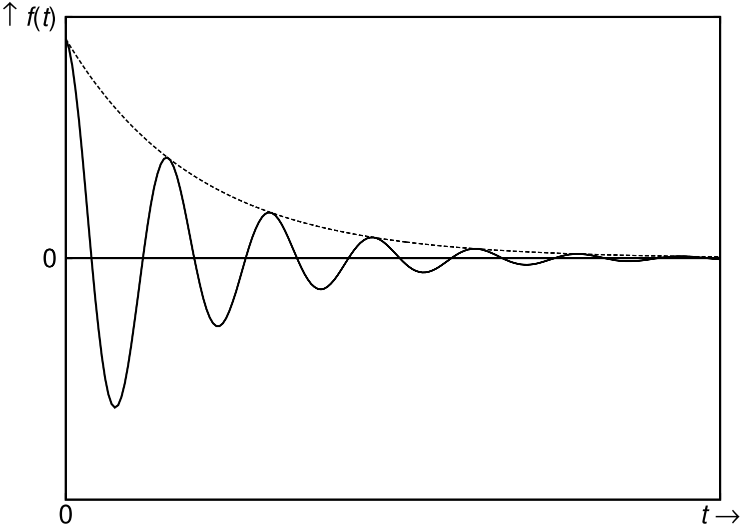
$$= \quad \frac{\tau}{1+\tau^2(\omega-\omega_0)^2} + \frac{\tau}{1+\tau^2(\omega+\omega_0)^2}$$

Fouriertransformationspaare

Exponentialfunktion & Lorentz-Funktion



Anwendung: Fouriertransformation eines FID



$$f(t) = \begin{cases} \exp(-t/T_2)\cos(\omega_0 t) & \text{für} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{für} \quad t < 0 \end{cases}$$

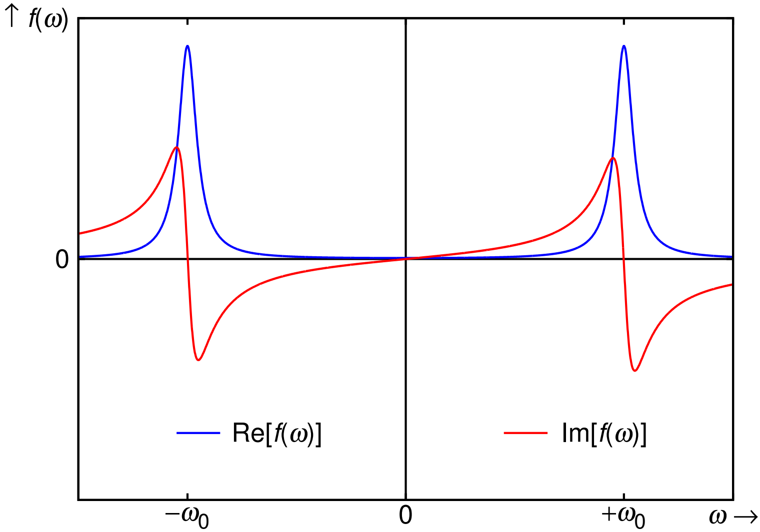
Anwendung: Fouriertransformation eines FID

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-i\omega t)\,\mathrm{d}t$$

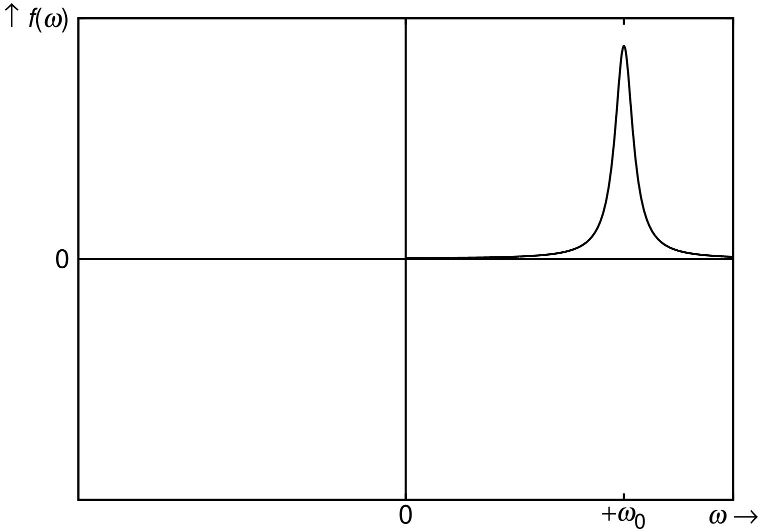
$$= +\frac{1}{2}\left\{\frac{T_2}{1+[(\omega-\omega_0)\,T_2]^2} + \frac{T_2}{1+[(\omega+\omega_0)\,T_2]^2}\right\}$$

$$-\frac{i}{2}\left\{\frac{(\omega-\omega_0)(T_2)^2}{1+[(\omega-\omega_0)\,T_2]^2} + \frac{(\omega+\omega_0)(T_2)^2}{1+[(\omega+\omega_0)\,T_2]^2}\right\}$$

Anwendung: Fouriertransformation eines FID



Anwendung: Fouriertransformation eines FID



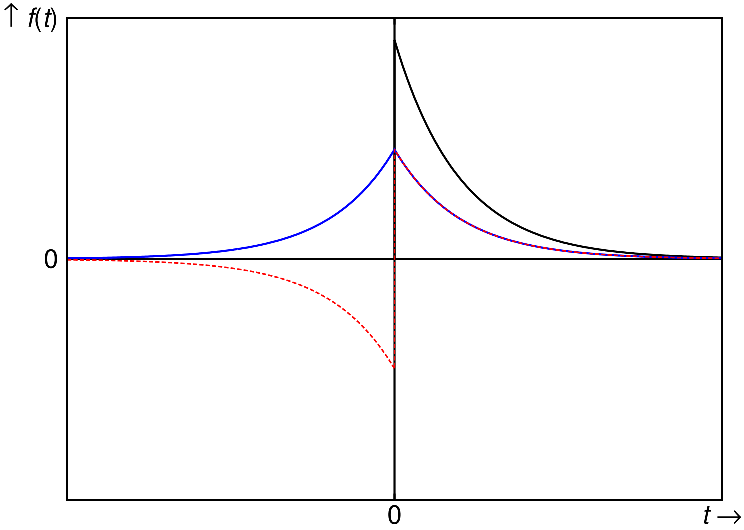
Anwendung: Fouriertransformation eines FID

$$f_{\mathrm{g}}(t) = \begin{cases} f(t)/2 & \text{für} \quad t \geq 0 \\ f(-t)/2 & \text{für} \quad t \leq 0 \end{cases}$$

$$f_{\mathrm{u}}(t) = \begin{cases} f(t)/2 & \text{für} \quad t \geq 0 \\ -f(-t)/2 & \text{für} \quad t \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = f_{\mathrm{g}}(t) + f_{\mathrm{u}}(t)$$

Anwendung: Fouriertransformation eines FID



Anwendung: Fouriertransformation eines FID

$$
\begin{aligned}
f(\omega) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-i\omega t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathrm{g}}(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t \\
&\quad -i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathrm{u}}(t)\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$