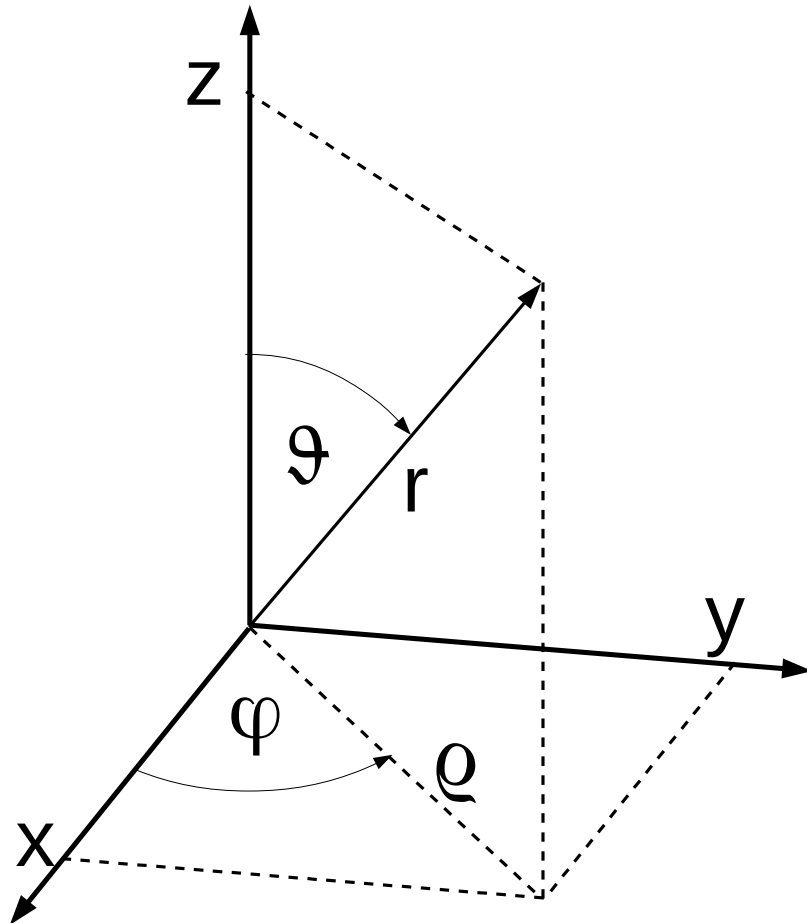
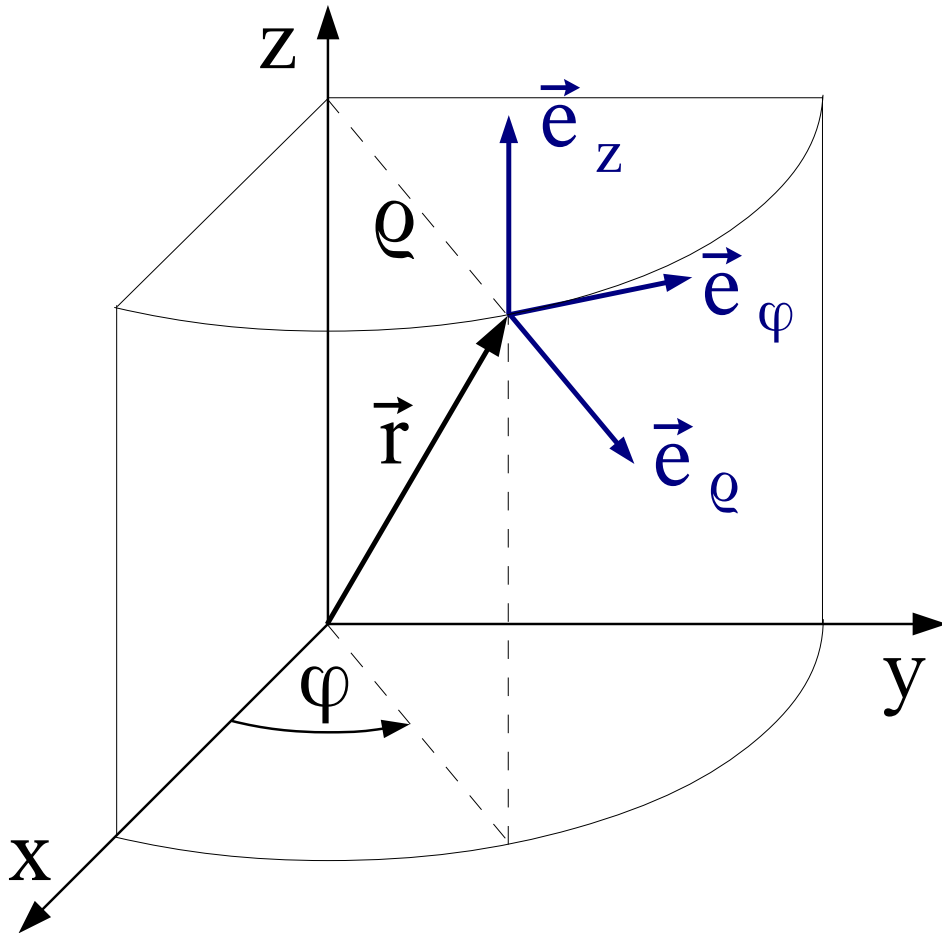


Der Zusammenhang zwischen kartesischen, Kreiszyylinder- und Kugelkoordinaten

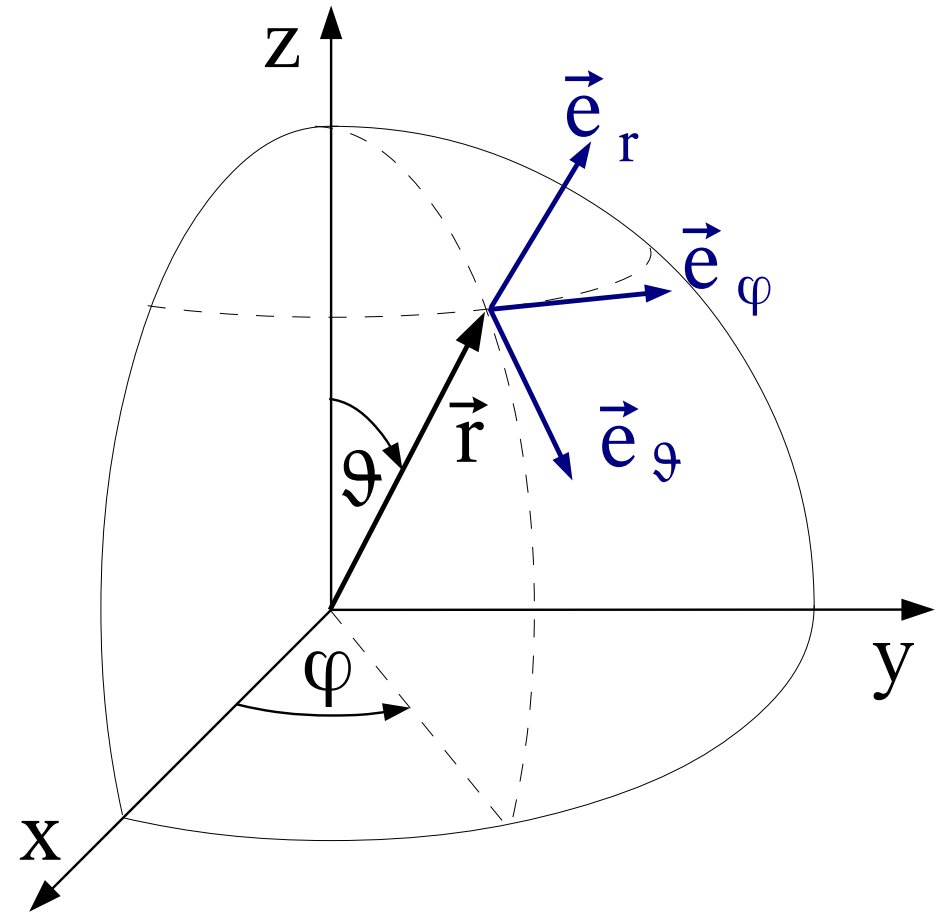


Kartesische Koordinaten	Zylinderkoordinaten	Kugelkoordinaten
x	$\rho \cos \varphi$	$r \sin \vartheta \cos \varphi$
y	$\rho \sin \varphi$	$r \sin \vartheta \sin \varphi$
z	z	$r \cos \vartheta$
$\sqrt{x^2 + y^2}$	ρ	$r \sin \vartheta$
$\arctan \frac{y}{x}$	φ	φ
z	z	$r \cos \vartheta$
$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$\sqrt{\rho^2 + z^2}$	r
$\arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$	$\arctan \frac{\rho}{z}$	ϑ
$\arctan \frac{y}{x}$	φ	φ

Kreiszylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten



Zylinderkoordinaten: ρ, φ, z



Kugelkoordinaten: r, ϑ, φ

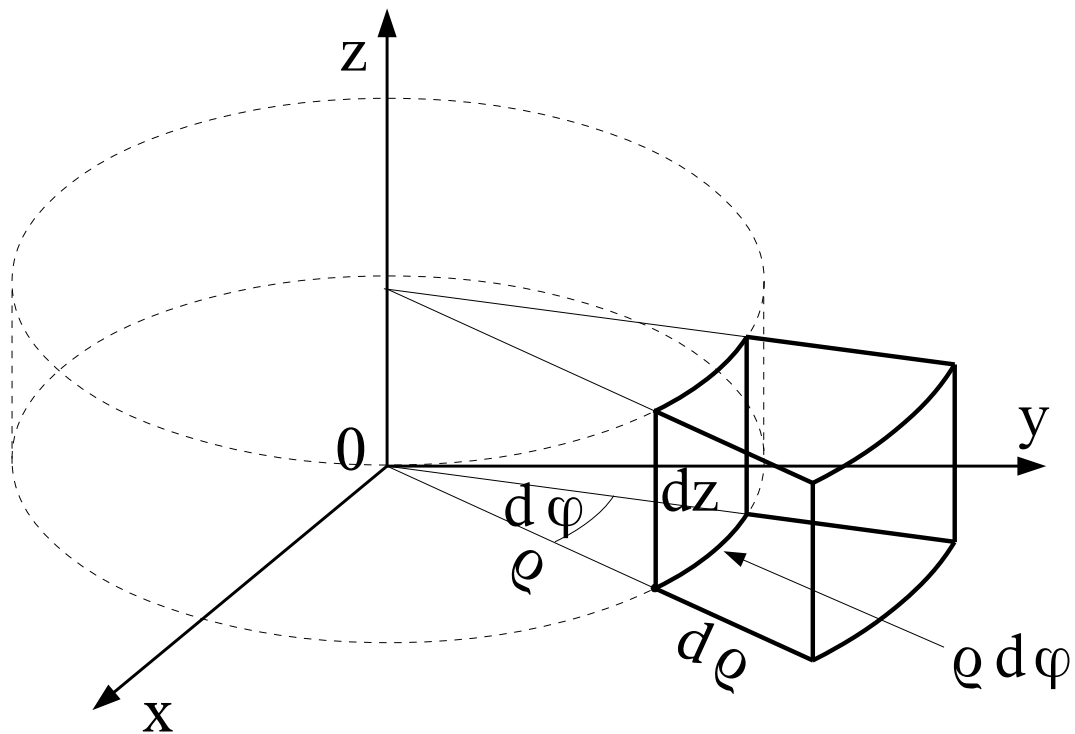
Die Einheitsvektoren zeigen in Richtung wachsender Koordinaten.

Der Zusammenhang zwischen den Vektorkomponenten in verschiedenen Koordinatensystemen

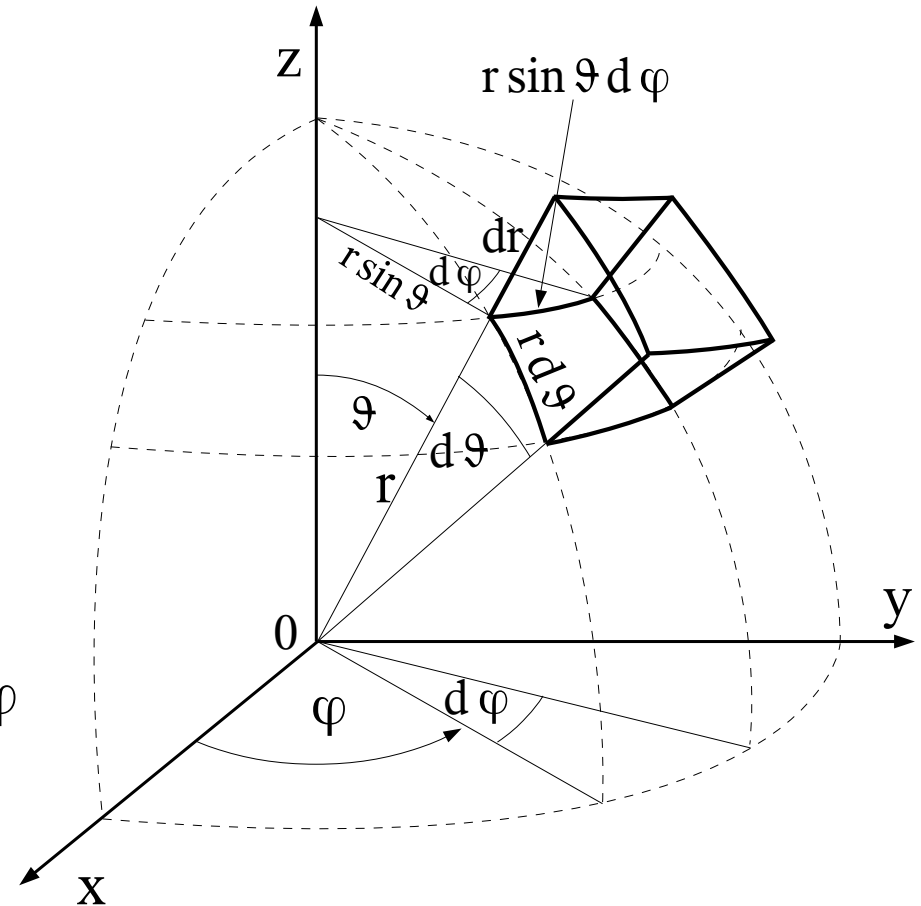
Kartesische Koordinaten	Zylinderkoordinaten	Kugelkoordinaten
A_x	$A_\varrho \cos \varphi - A_\varphi \sin \varphi$	$A_r \sin \vartheta \cos \varphi + A_\vartheta \cos \vartheta \cos \varphi - A_\varphi \sin \varphi$
A_y	$A_\varrho \sin \varphi + A_\varphi \cos \varphi$	$A_r \sin \vartheta \sin \varphi + A_\vartheta \cos \vartheta \sin \varphi + A_\varphi \sin \varphi$
A_z	A_z	$A_r \cos \vartheta - A_\vartheta \sin \vartheta$
$A_x \cos \varphi + A_y \sin \varphi$	A_ϱ	$A_r \sin \vartheta + A_\vartheta \cos \vartheta$
$-A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi$	A_φ	A_φ
A_z	A_z	$A_r \cos \vartheta - A_\vartheta \sin \vartheta$
$A_x \sin \vartheta \cos \varphi + A_y \sin \vartheta \sin \varphi + A_z \cos \vartheta$	$A_\varrho \sin \vartheta + A_z \cos \vartheta$	A_r
$A_x \cos \vartheta \cos \varphi + A_y \cos \vartheta \sin \varphi - A_z \sin \vartheta$	$A_\varrho \cos \vartheta - A_z \sin \vartheta$	A_ϑ
$-A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi$	A_φ	A_φ

Setzt man an Stelle der Vektorkomponenten die Einheitsvektoren ein, so erhält man den Zusammenhang zwischen den Einheitsvektoren in den verschiedenen Koordinatensystemen.

Linien-, Flächen- und Volumenelemente in Kreiszylinder- und Kugelkoordinaten



$$dV = d\rho \cdot \rho d\varphi \cdot dz$$



$$dV = dr \cdot r \sin \vartheta d\varphi \cdot r d\vartheta$$

Vektoranalytische Ausdrücke in verschiedenen Koordinatensystemen

	Kartesische Koordinaten	Zylinderkoordinaten	Kugelkoordinaten
$\text{grad } \Phi$	$\vec{e}_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z}$	$\vec{e}_\varrho \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z}$	$\vec{e}_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$
$\text{div } \vec{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho A_\varrho) + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (A_\vartheta \sin \vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$
$\text{rot } \vec{A}$	$\vec{e}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) +$ $+ \vec{e}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) +$ $+ \vec{e}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$	$\vec{e}_\varrho \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) +$ $+ \vec{e}_\varphi \left(\frac{\partial A_\varrho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \varrho} \right) +$ $+ \vec{e}_z \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho A_\varphi) - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial A_\varrho}{\partial \varphi} \right)$	$\vec{e}_r \frac{1}{r \sin \vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} (A_\varphi \sin \vartheta) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi} \right) +$ $+ \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) +$ $+ \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\vartheta) - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right)$
$\Delta \Phi$	$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}$
$\vec{ds}$	$\vec{e}_x dx + \vec{e}_y dy + \vec{e}_z dz$	$\vec{e}_\varrho d\varrho + \vec{e}_\varphi \varrho d\varphi + \vec{e}_z dz$	$\vec{e}_r dr + \vec{e}_\vartheta r d\vartheta + \vec{e}_\varphi r \sin \vartheta d\varphi$

Formeln zur Vektoralgebra und Vektoranalysis

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$\text{grad}(\Phi + \Psi) = \text{grad} \Phi + \text{grad} \Psi$$

$$\text{grad}(c \Phi) = c \text{grad} \Phi \quad c = \text{const.}$$

$$\text{grad}(\Phi \Psi) = \Phi \text{grad} \Psi + \Psi \text{grad} \Phi$$

$$\text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \text{grad}) \vec{B} + (\vec{B} \text{grad}) \vec{A} + \vec{A} \times \text{rot} \vec{B} + \vec{B} \times \text{rot} \vec{A}$$

$$\text{grad} r = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{e}_r \quad \text{mit} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\text{grad} \Phi(r) = \Phi'(r) \vec{e}_r$$

$$\text{grad} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{1}{r^2} \vec{e}_r \quad ; \quad \text{grad} [\ln(r)] = \frac{\vec{r}}{r^2} = \frac{1}{r} \vec{e}_r$$

$$\text{div}(\vec{A} + \vec{B}) = \text{div} \vec{A} + \text{div} \vec{B} \quad ; \quad \text{div}(c \vec{A}) = c \text{div} \vec{A} \quad c = \text{const.}$$

$$\text{div}(\Phi \vec{A}) = \Phi \text{div} \vec{A} + \vec{A} \text{grad} \Phi$$

$$\text{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \text{rot} \vec{A} - \vec{A} \text{rot} \vec{B}$$

$$\text{div} \vec{e}_r = \frac{2}{r} \quad ; \quad \text{div} \vec{r} = 3 \quad \text{mit} \quad \vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

$$\text{div}[\Phi(r) \vec{r}] = \text{div} \vec{r} \cdot \Phi(r) + r \cdot \Phi'(r) \quad ; \quad \text{div} \text{rot} \vec{A} = 0$$

$$\text{rot}(\vec{A} + \vec{B}) = \text{rot} \vec{A} + \text{rot} \vec{B} \quad ; \quad \text{rot}(c \vec{A}) = c \text{rot} \vec{A}$$

$$\text{rot}(\Phi \vec{A}) = \Phi \text{rot} \vec{A} + \text{grad} \Phi \times \vec{A}$$

$$\text{rot}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \text{div} \vec{B} - \vec{B} \text{div} \vec{A} + (\vec{B} \text{grad}) \vec{A} - (\vec{A} \text{grad}) \vec{B}$$

$$\text{rot} \text{rot} \vec{A} = \text{grad} \text{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}$$

$$\text{rot}[\Phi(r) \vec{r} = \vec{0}] \quad ; \quad \text{rot}(\text{grad} \Phi) = \vec{0}$$

$$(\vec{A} \text{grad}) \vec{B} = (\vec{A} \text{grad} B_x) \vec{e}_x + (\vec{A} \text{grad} B_y) \vec{e}_y + (\vec{A} \text{grad} B_z) \vec{e}_z$$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{A} &= \Delta A_x \vec{e}_x + \Delta A_y \vec{e}_y + \Delta A_z \vec{e}_z = \\ &= \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right) \vec{e}_y + \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$\text{STOKESScher Integralsatz: } \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint \text{rot} \vec{H} d\vec{A}$$

$$\text{GAUSSscher Integralsatz: } \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = \iiint \text{div} \vec{B} dV$$