

Vorlesungskript Theoretische Elektrotechnik

Prof. Dr. Ursula van Rienen
Universität Rostock
Fachbereich Elektrotechnik und
Informationstechnik
Institut für Allgemeine Elektrotechnik

12. März 2007

Vorbemerkung

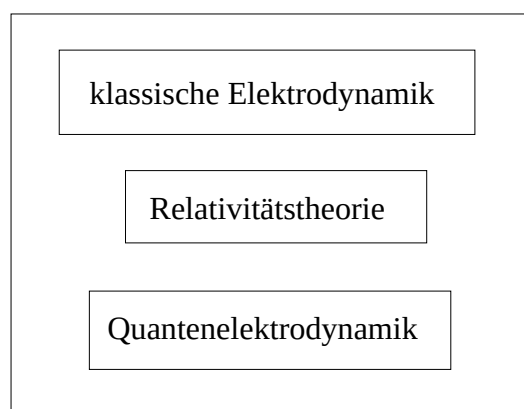
Prolog

Die theoretische Elektrotechnik behandelt makroskopische, elektrische und magnetische Phänomene. Diese wurden von James Clark Maxwell (1831-1879) in den Maxwell'schen Gleichungen formal beschrieben. Zeitlich veränderliche elektrische Felder verursachen magnetische Felder und umgekehrt. Daher wird übergreifend von elektromagnetischen Feldern gesprochen. Die Maxwell'schen Gleichungen stellen analog zu den Newtonschen Axiomen für die Mechanik die axiomatische Grundlage der Elektrodynamik dar. Aus diesem Grund werden wir sie auch ganz an den Anfang unserer Vorlesung stellen.

Wir werden sehen, daß eine Einteilung elektromagnetischer Felder in einige wenige Problemklassen vorgenommen werden kann: Entsprechend dem zeitlichen Verhalten der Feldgrößen erfolgt eine Einteilung in statische, stationäre, quasistatische und schnell veränderliche Felder.

Die Theorie elektrischer und magnetischer Felder wird jeweils anschaulich an den Anwendungsbeispielen erläutert werden. Für den Fall einfacher geometrischer Strukturen werden analytische Lösungswege erarbeitet.

Zur richtigen Einordnung der theoretischen Elektrotechnik, die in weiten Bereichen mehr oder weniger „deckungsgleich“ mit der klassischen Elektrodynamik ist, ist es wichtig, sie in Zusammenhang mit Erweiterungen unseres Jahrhunderts zu sehen:



bilden *ein* Ganzes.

Litertur

1. Zur Einführung

- (a) G. Strassacker
Rotation, Divergenz und das Drumherum
Teubner Studienskripten
3. Auflage 1992
26,80 DM
- (b) A. J. Schwab
Begriffswelt der Feldtheorie
Springer Verlag
4. Auflage 1992
58,00 DM

2. Lehrbücher

- (a) G. Lehner
Elektromagnetische Feldtheorie
für Ingenieure und Physiker
Springer Verlag
3. Auflage 1995
68,00 DM
- (b) S. Blume
Theorie elektromagnetischer Felder
Hüthig Verlag
4. Auflage 1995
64,00 DM
- (c) K. Küpfmüller
Einführung in die theoretische Elektrotechnik
Springer Verlag
13. Auflage 1990
78,00 DM
- (d) G. Strassacker, P. Strassacker
Analytische und numerische Methoden der Feldberechnung
Teubner Verlag 1993
28,00 DM

3. Weiterführende Literatur

- (a) J. D. Jackson
Klassische Elektrodynamik
- (b) R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands
The Feynman lectures on physics, Vol.II
Addison-Wesley
6. Auflage
- (c) K. Simonyi
Theoretische Elektrotechnik
VEB 1997

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	9
1.1	Skalar- und Vektorfelder	9
1.2	Die Maxwell'schen Gleichungen	11
1.3	Einteilung elektromagnetischer Felder	13
2	Elektrostatik	15
2.1	Grundlagen	15
2.1.1	Die Potentialfunktion	16
2.1.2	Physikalische Bedeutung der Potentialfunktion	19
2.1.3	Die Potentialgleichung	20
2.1.4	Die Spiegelungsmethode	31
2.1.5	Randbedingungen des elektrischen Feldes an der Grenzfläche homogener Medien	37
2.2	Formale Lösungsmethoden	42
2.2.1	Orthogonale krummlinige Koordinaten	42
2.2.2	Vektoranalysis für orthogonale krummlinige Koordinaten	44
2.2.3	Einige wichtige Koordinatensysteme	47
2.2.4	Eigenschaften der Potentialgleichung (Potentialtheorie)	49
2.2.5	Analytische Lösung der Potentialgleichung in kartesischen Koordinaten (Separationsansatz)	55
2.2.6	Allgemeine Potentialgleichung in Zylinderkoordinaten	59
2.2.7	Allgemeine Lösung der Potentialgleichung in Kugelkoordinaten	65
2.3	Energie im elektrostatischen Feld	65
2.3.1	Energieerhaltung eines Plattenkondensators	67
2.4	Kapazität im Mehrleitersystem	68
3	Magnetostatik	71
3.1	Das magnetostatische Vektorpotential	72
3.2	Das Gesetz von Biot-Savart	74
3.3	Skalares magnetisches Potential	76
3.4	Randbedingungen an Grenzflächen	77
3.5	Beispiele	79
3.5.1	Unendlich langer Leiter in der Grenzfläche zwischen zwei Medien	79
3.5.2	Kreisförmige Scheibe in homogenem magnetischen Feld	81
3.6	Energie im magnetostatischen Feld	82
3.7	Beispiele zur Elektro- und Magnetostatik	83
4	Stationäre Strömungsfelder	85
4.1	Ohmscher Widerstand	86
4.2	Randbedingungen an Materialgrenzen	87
4.3	Formale Analogie zwischen $\vec{D}$ und $\vec{J}$	88

5	Quasistationäre Felder	91
5.1	Darstellung durch komplexe Feldgrößen	91
5.2	Elektro-Quasistatik	92
5.2.1	Die grundlegenden Gleichungen	92
5.2.2	Komplexes skalares Potential	93
5.3	Magneto-Quasistatik	93
5.4	Bedingungen an quasistatische Felder	94
5.5	Die Induktionsgleichung	96
5.5.1	Induktion durch zeitliche Änderung von $\vec{B}$	96
5.5.2	Induktion durch Bewegung des Leiters	97
5.5.3	Induktion durch gleichzeitige Änderung von $\vec{B}$ und Ort des Leiters	100
5.6	Die Diffusion von elektromagnetischen Feldern	101
5.6.1	Die Diffusionsgleichungen für $\vec{E}$, $\vec{J}$, $\vec{B}$ und $\vec{A}$	101
5.6.2	Typeneinteilung partieller Differentialgleichungen	103
5.6.3	Felddiffusion im Halbraum; Eindringtiefe	103
5.7	Energiedichte und Energieströmung	108
5.7.1	Der Poynting-Vektor	108
5.7.2	Der komplexe Poynting-Vektor	112
5.7.3	Strom- und Feldverdrängung	115
6	Ebene Wellen	123
6.1	Die Wellengleichungen	123
6.1.1	Ebene Wellen im Isolator	124
6.1.2	Zeitharmonische ebene Wellen	128
6.1.3	Polarisation und Wellenform	131
6.1.4	Ebene Wellen mit beliebiger Ausbreitungsrichtung	132
6.1.5	Stehende Wellen	133
6.1.6	TE-Wellen und TM-Wellen	134
6.2	Ebene zeitharmonische Wellen in verlustbehafteten Medien	137
6.3	Reflexion ebener Wellen	137
6.3.1	Reflexion an einem unendlichen Halbraum	137
6.3.2	Reflexion an dielektrischer Platte	138
6.3.3	Reflexion ebener Wellen bei schiefem Einfall auf eine Grenzfläche	141
7	Wellen in Hohlleitern und Resonatoren	147
7.1	Die Wellengleichungen des Vektorpotentials	148
7.2	Lösung der Helmholtzgleichung	150
7.3	Wellenmoden in verlustlosen Rechteckhohlleitern	152
7.3.1	Feldlinienbild des Grundmodes	155
7.4	Hohlraumresonatoren und Filter	156
8	Das kartesische Dreischichtenproblem	159
9	Wellen in kreiszylindrischen Strukturen	161
9.1	Lösung der Wellengleichung	161
9.1.1	Die Zylinderfunktionen	163
9.1.2	Geeignete Auswahl der Zylinderfunktionen	165
9.2	Wellentypen in einem Rundhohlleiter	166
9.2.1	Herleitung des Vektorpotentials	166
9.2.2	$\text{TM}_{z\,mn}$ -Wellen	167
9.2.3	$\text{TE}_{z\,mn}$ -Wellen	169
9.3	Kreiszylindrische Resonatoren	171
9.3.1	TM_{010} -Mode als einfachstes Beispiel	171
9.4	Die Koaxialleitung	172

10 Das kreiszylindrische Zweischichtenproblem	177
11 Die Power-Loss-Methode	179
11.1 Dämpfung der Leitungswelle einer Bandleitung	180
11.2 Anwendbarkeit der Power-Loss-Methode	181
11.2.1 Bandleitung	182
11.2.2 Rechteckhohlleiter	183
11.2.3 Rundhohlleiter	184
12 Antennen	187
12.1 Herleitung der Wellengleichung	187
12.1.1 Vektorpotential für $\vec{H}$ (E-Wellen)	187
12.1.2 Vektorpotential für $\vec{E}$ (H-Wellen)	188
12.1.3 Kugelwellen	189
12.1.4 Analogien zwischen statischen und retardierten Potentialen	191
12.2 Elementardipole	191
12.2.1 Elektrischer Elementardipol (Dipolantenne)	192
12.2.2 Magnetischer Elementardipol (Rahmenantenne)	194
12.2.3 Nahfeld-Näherung	195
12.2.4 Fernfeld-Näherung	196
12.3 Richtcharakteristik	196
12.3.1 Beispiele	197
12.4 Das Äquivalenztheorem und die Abstrahlung vom Hohlleiter	200
12.4.1 Das Äquivalenztheorem	201
12.4.2 Abstrahlung vom Hohlleiter	202
13 Numerische Methoden zur Berechnung elektromagnetischer Felder	205
13.1 Das finite Differenzenverfahren	207
13.1.1 Differenzenquotienten für skalare Felder	207
13.1.2 Differenzenquotienten für vektorielle Felder	211
13.2 Die Methode der Finiten Integration (FIT)	212
A Die Telegraphengleichung	213
B Finite Integrations Technik	217
B.1 FIT-Diskretisierung der Maxwell'schen Gleichungen	217
B.1.1 Das FIT-Gitter	218
B.1.2 Die Gitter-Maxwell-Gleichungen	222
B.1.3 Approximation der Materialeigenschaften	224
B.1.4 Diskretisierung der Integrale	225
B.1.5 Spezielle Eigenschaften dual-orthogonaler FIT-Gitter	225
B.2 Stationäre Felder	227
B.2.1 Magnetostatik	227
B.2.2 Elektrostatik	228
B.2.3 Stationäre Strömungsfelder	228
B.2.4 Stationäre Temperaturfelder	229
B.3 Quasistatische Felder	229
B.3.1 Elektro-Quasistatik	229
B.3.2 Magneto-Quasistatik	230
B.4 Allgemein zeitabhängige Felder und elektromagnetische Wellen	230
B.4.1 Allgemein zeitabhängige Felder	230
B.4.2 Harmonische Schwingungen	231

Kapitel 1

Einführung

1.1 Skalar- und Vektorfelder

Die durch die Maxwell'schen Gleichungen beschriebenen elektrischen und magnetischen Wechselwirkungen werden durch Felder beschrieben. Unter einem Feld kann je nach Zusammenhang Verschiedenes verstanden werden. Wir werden aber zunächst im wesentlichen mit Skalar- und Vektorfeldern konfrontiert sein. Ist die betrachtete physikalische Größe φ eine skalare Funktion des Ortes, also

$$\varphi : (x, y, z) \longrightarrow \varphi(x, y, z)$$

So definiert die Funktion φ ein räumliches **Skalarfeld**.

- Beispiele:
- Temperaturverteilung $T(x, y, z)$ im Hörsaal
 - Potential $\varphi(x, y, z)$ im Raum zwischen zwei geladenen Elektroden

Ist andererseits jedem Punkt im Raum ein Vektor

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} v_x(x, y, z) \\ v_y(x, y, z) \\ v_z(x, y, z) \end{pmatrix}$$

zugeordnet, so liegt ein **Vektorfeld** vor.

- Beispiele:
- Strömungsgeschwindigkeit $\vec{v}(x, y, z)$ im Kielwasser eines Segelbootes
 - magnetische Feldstärke $\vec{H}(x, y, z)$ in Umgebung eines stromführenden Leiters

Im allgemeinen hängen die Felder neben dem Ort auch von der Zeit ab:

- Beispiele:
- elektrische Raumladungsdichte $\rho(\vec{r}, t) \Rightarrow$ Skalarfeld
 - elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r}, t) \Rightarrow$ Vektorfeld

Mögliche Darstellung von Skalar- und Vektorfeldern:

a) Skalarfelder

- **Äquipotentiallinien**¹ $\Rightarrow$ "Höhenlinien"
 - bei Querschnitten durch ein räumliches Gebiet $\rightarrow$ Abb. 1.1

¹Begriff für alle Skalarfelder üblich; nicht nur Potentialfelder

- auch für Absolutwerte eines Vektorfeldes
- **Äquipotentialflächen** $\Rightarrow$ Flächen mit gleichem Wert $\rightarrow$ Abb. 1.3

b) Vektorfelder

- Pfeile
 - Größe und Richtung geben den Wert des Vektorfeldes im Ansatzpunkt des Pfeils an $\rightarrow$ Abb. 1.2, 1.4
- Feldlinien
 - Tangenten der Richtungen des Feldvektors in jedem Punkt (Liniendichte $\Rightarrow$ Größe des Feldvektors)

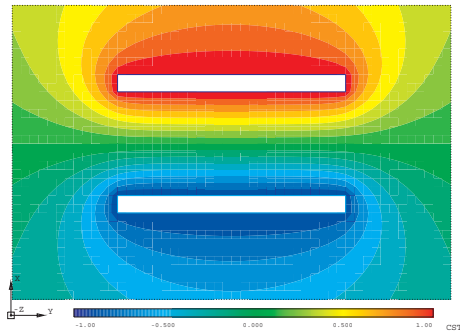


Abbildung 1.1: Potentialfeld

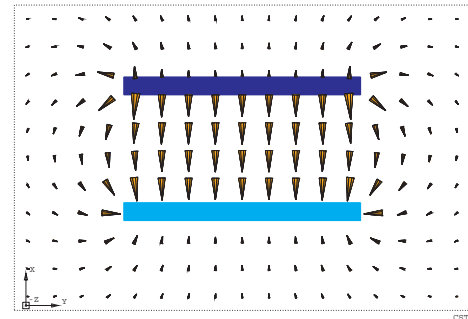


Abbildung 1.2: Vektorfeld

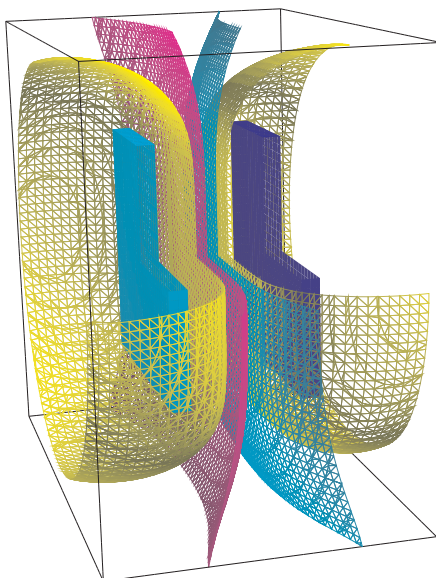


Abbildung 1.3: Potentialfeld

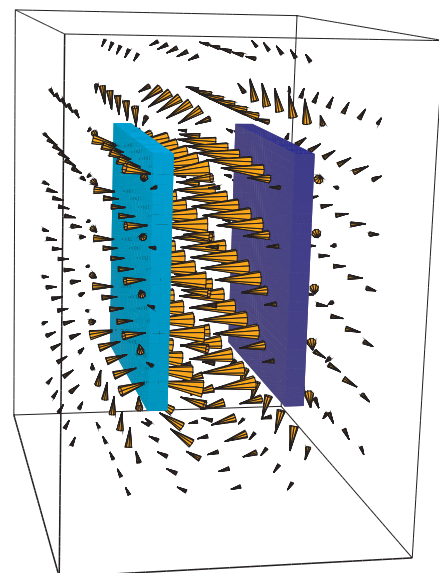


Abbildung 1.4: Vektorfeld

1.2 Die Maxwellschen Gleichungen

Die vier Maxwellschen Gleichungen, die von James Clark Maxwell im Jahre 1873 formuliert wurden, sind das wesentliche Thema der theoretischen Elektrotechnik. Sie fassen alle Erfahrungen über die makroskopischen Erscheinungen der Elektrizität in Systemen von Differentialgleichungen bzw. Integralgleichungen zusammen. Die Maxwellschen Gleichungen geben die Zusammenhänge zwischen den vier charakteristischen physikalischen Größen des elektromagnetischen Feldes wieder.

$\vec{E}$	$\left[\frac{\text{V}}{\text{m}}\right]$	elektrische Feldstärke
$\vec{H}$	$\left[\frac{\text{A}}{\text{m}}\right]$	magnetische Feldstärke
$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$	$\left[\frac{\text{C}}{\text{m}^2}\right]$	elektrische Flußdichte (Verschiebung)
$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$	$\left[\text{T} = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}\right]$	magnetische Flußdichte (Induktion)
$\vec{J}$	$\left[\frac{\text{A}}{\text{m}^2}\right]$	elektrische Stromdichte

wichtige Konstanten:

$\varepsilon_0 = 8.854187 \cdot 10^{-12}$	$\frac{\text{As}}{\text{Vm}}$	Dielektrizitätskonstante des Vakuums
$\mu_0 = 1.256 \cdot 10^{-6}$	$\frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$	Permeabilitätskonstante des Vakuums

Bevor wir nun die Maxwellschen Gleichungen in Differentialform angehen, wiederholen wir die Definition einiger mathematischen Operatoren.

Gradient:

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{e}_z$$

Divergenz:

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Rotation:

$$\text{rot } \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

Merkregel für die Rotation²:

$$\text{rot } \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

Die Maxwellschen Gleichungen in differentieller und integraler Form für ruhende Medien lauten:

$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_{\partial A} \vec{E} d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_{\partial V} \vec{B} d\vec{A}$	Induktionsgesetz ³
$\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}$	$\oint_{\partial A} \vec{H} d\vec{s} = \iint_{\partial V} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \right) d\vec{A}$	Durchflutungsgesetz ⁴
$\text{div } \vec{D} = \rho$	$\oiint_{\partial V} \vec{D} d\vec{A} = \iiint_V \rho dV$	Quellenergiebigkeit ⁵
$\text{div } \vec{B} = 0$	$\oiint_{\partial V} \vec{B} d\vec{A} = 0$	Quellenergiebigkeit ⁶

² gilt nur für kartesische Koordinaten

Im Fall des Vakuums *ohne Ladungen und ohne Ströme* weisen die Maxwell'schen Gleichungen eine besonders hohes Maß an Symmetrie auf. Ein sich änderndes elektrisches Feld ($\partial \vec{D}/\partial t$) erzeugt ein magnetisches Wirbelfeld ($\text{rot} \vec{H}$). Dieses ist selbst zeitlich veränderlich ($\partial \vec{B}/\partial t$) und erzeugt dadurch ein elektrisches Wirbelfeld ($\text{rot} \vec{E}$) etc. . . Das ist der Mechanismus der Entstehung und Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen, dem Radiowellen, Licht, Wärmestrahlen usw. ihre Existenz verdanken.

Integralsätze

Satz von Gauß

Das Volumenintegral über die Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r})$ ist gleich dem Fluß durch die geschlossene Oberfläche des Volumens.

$$\iiint_V \text{div} \vec{A}(\vec{r}) dV = \oint_{\partial V} \vec{A}(\vec{r}) d\vec{A}$$

Satz von Stokes

Das Flächenintegral über die Komponente von $\text{rot} \vec{A}(\vec{r})$ in Richtung der Flächennormalen ist gleich dem Linienintegral längs des Randes der Fläche über die Komponente von $\vec{A}(\vec{r})$ in Richtung des Linienelements.

$$\iint_A \text{rot} \vec{A}(\vec{r}) d\vec{A} = \oint_{\partial A} \vec{A}(\vec{r}) d\vec{s}$$

Flüsse und Spannungen

Durch Integralbildung (Flächenintegral) erhalten wir aus der elektrischen und magnetischen Flußdichte den Verschiebungsfluß und den Induktionsfluß:

$$\begin{aligned} \Psi &= \iint_A \vec{D} d\vec{A} & [\text{As}] & \quad \text{Verschiebungsfluß} \\ \Phi &= \iint_A \vec{B} d\vec{A} & [\text{Vs}] & \quad \text{Induktionsfluß} \end{aligned}$$

Durch ein Wegintegral erhalten wir aus dem elektrischen und magnetischen Feld die elektrische und magnetische Spannung:

$$\begin{aligned} U_e &= \int_S \vec{E} d\vec{s} & [\text{V}] & \quad \text{elektrische Spannung} \\ U_m &= \int_S \vec{H} d\vec{s} & [\text{A}] & \quad \text{magnetische Spannung} \end{aligned}$$

Den Strom I durch eine Fläche A erhalten wir aus der Stromdichte $\vec{J}$ gemäß:

$$I = \iint_A \vec{J} d\vec{A} \quad [\text{A}] \quad \text{elektrischer Strom}$$

³ Wirbeldichte des elektrischen Feldes = Induktionsflußdichte

⁴ Wirbeldichte des magnetischen Feldes = Verschiebungsstromdichte + Stromdichte

⁵ $\text{div} \vec{D} = \rho \rightarrow$ spez. Ergiebigkeit der Verschiebungsdichte = elektrische Raumladungsdichte

⁶ $\text{div} \vec{B} = 0 \rightarrow$ spez. Ergiebigkeit der Induktionsflußdichte ist immer *Null*; es gibt keine magnetischen Ladungen (Einzelpole)

1.3 Einteilung elektromagnetischer Felder

Stationäre Felder		
Elektrostatik	Magnetostatik	Strömungsfelder

Quasistationäre Felder	
Elektrostatik $\partial \vec{D}/\partial t \simeq 0$	Magnetostatik $\partial \vec{B}/\partial t \simeq 0$

Allg. zeitabh. Felder und elektromagn. Wellen	
Harmonische Schwingungen	Allgemeiner Fall

Stationäre Felder

- zeitunabhängige elektromagnetische Felder $\vec{E}, \vec{H}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{J}$, rein ortsabhängige Feldgrößen
- Ursache: ruhende oder gleichförmig bewegte Ladungen
- magnetisches und elektrisches Feld sind entkoppelt $\Rightarrow$ unabhängige Systeme von Differentialgleichungen

Maxwellsche Gleichungen im stationären Fall

$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= 0 \\ \text{rot } \vec{H} &= \vec{J}_E \\ \text{div } \vec{D} &= \rho \\ \text{div } \vec{B} &= 0 \end{aligned}$

$\Rightarrow$ zwei unabhängige Systeme mit je zwei Differentialgleichungen

Kapitel 2

Elektrostatik

2.1 Grundlagen

Die Stromdichte $\vec{J}$ in den Maxwellschen Gleichungen ist eine zusammengesetzte Größe:

$$\vec{J} = \vec{J}_L + \vec{J}_E + \vec{J}_K$$

- $\vec{J}_L = \kappa \vec{E} \rightarrow$ Leitungsstromdichte; Medium mit elektrischer Leitfähigkeit κ ($1/\Omega\text{m}$); entsteht durch die im Medium bestehende Feldstärke
- $\vec{J}_E \rightarrow$ eingeprägte Stromdichte; unabhängig von allen Feldkräften
- $\vec{J}_K = \delta \text{grad} \varrho \rightarrow$ Konvektionsstromdichte; Dichte eines Stroms freier elektrischer Ladungen mit den elektrischen Ladungsdichten ϱ (As/m^3); Proportionalitätskonstante $\delta =$ „Diffusionskonstante“

Elektrostatische Felder existieren nur in nichtleitenden Gebieten:

$\kappa = 0 \rightarrow \vec{J}_L = \kappa \vec{E} = 0$; $\vec{J}_L = \vec{J}_K = 0 \rightarrow$ elektrisches und magnetisches Feld sind entkoppelt

$\begin{aligned}\text{rot } \vec{E} &= \vec{0} \\ \text{div } \vec{D} &= \varrho\end{aligned}$
--

Materialgleichungen:

- lineare Medien: $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$; $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$
- allgemein: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ mit $\vec{P} =$ Polarisationsdichte $\rightarrow$ makroskopische gemittelte Dipoldichte des Materiesystems (auf das Volumen bezogene Vektorsumme aller Dipole bei Anwesenheit äußerer Felder)

Anmerkung:

- $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ gilt auch bei permanent polarisierten Medien.
- Viele Dielektrika sind nicht isotrop, d. h. die Polarisierung ist abhängig von der Richtung des angelegten Feldes – bezogen auf die Vorzugsrichtung des Dielektrikums. Die Permittivität ε ist dann ein symmetrischer Tensor 2. Stufe.

2.1.1 Die Potentialfunktion

Ein Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$, dessen Rotation verschwindet, wird als **wirbelfrei** bezeichnet. Im elektrostatischen Fall ist $\vec{E}(\vec{r})$ wirbelfrei:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad \xLeftrightarrow{\text{Satz v. Stokes}} \oint_C \vec{E} d\vec{s} = 0$$

Wir werden nun zeigen, daß sich das elektrostatische Feld durch eine eindeutige skalare Funktion darstellen läßt. Seien P_1 und P_2 zwei beliebige Punkte im Raum, die wir durch eine beliebige geschlossene Kurve $C = \{C_1, C_2\}$ miteinander verbinden. Im Raum herrsche die zeitunabhängige Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ ($\rightarrow$ Abb. 2.1). Nun bilden wir das Linienintegral der elektrischen Feldstärke auf dem geschlossenen Weg C .

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{E}(\vec{r}) d\vec{s} &= \int_{C_1} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{s} + \int_{C_2} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{s} = 0 \\ \Rightarrow \int_{C_1} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{s} &= - \int_{C_2} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{s} = \int_{-C_2} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{s} \end{aligned}$$

Da dies für beliebige Wege C_1 und C_2 zwischen den Punkten P_1 und P_2 gilt, folgt somit die **Wegunabhängigkeit** des Integrals $\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{s}$. Deshalb können wir eine **Potentialfunktion** (kurz: ein Potential) φ des elektrostatischen Feldes definieren:

$$\varphi(\vec{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{s} \quad (2.1)$$

$\varphi(\vec{r})$ heißt **Potentialfunktion** des elektrostatischen Feldes. Jedem Punkt im Raum kann somit ein skalares Potential zugeordnet werden. Wie aus der Definitionsgleichung ersichtlich, ist die Potentialfunktion nur bis auf eine additive Konstante $\varphi(\vec{r}_0)$, das sogenannte **Bezugspotential**, bestimmt. Das Bezugspotential ist frei wählbar, beeinflusst aber den Wert sämtlicher Potentiale im Raum. Üblich ist die Wahl von $\varphi(\vec{r}_0) = 0$.

Die Bedeutung des Bezugspotentials ist ohnehin untergeordnet, da es im Grunde nur auf **Potentialdifferenzen**, die sogenannten **elektrischen Spannungen**, ankommt. Demnach ist die

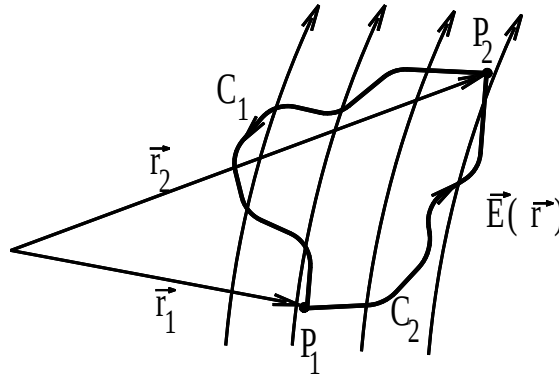


Abbildung 2.1: Zwei Punkte im Vektorfeld $\vec{E}(\vec{r})$.

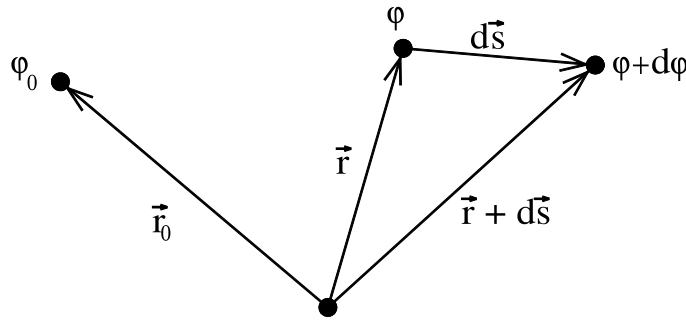


Abbildung 2.2: Zwei Punkte Potentialfeld.

Spannung zwischen zwei Punkten $P_2(\vec{r}_2)$ und $P_1(\vec{r}_1)$ gegeben durch:

$$\begin{aligned}
 U_{21} &= \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1) \\
 &= \varphi(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{s} - \varphi(\vec{r}_0) + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{s} \\
 &= - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{s} = \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{s}
 \end{aligned}$$

U_{21} ist die Arbeit, die pro Ladung gewonnen wird, wenn man sie von P_2 nach P_1 verschiebt. Dementsprechend ist die Einheit von U_{21} $\frac{\text{Energie}}{\text{Ladung}}$. Nun betrachten wir zwei benachbarte Punkte ($\rightarrow$ Abb. 2.2). Für $d\varphi$ ergibt sich dann aus der Definitionsgleichung (2.1) des Potentials:

$$\begin{aligned}
 d\varphi(\vec{r}) &= -\vec{E}(\vec{r}) d\vec{s} \\
 &= -(E_x dx + E_y dy + E_z dz)
 \end{aligned}$$

Andererseits gilt für das vollständige Differential von $\varphi(\vec{r})$:

$$d\varphi(\vec{r}) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right)$$

woraus folgendes für die Komponenten des elektrischen Feldes folgt:

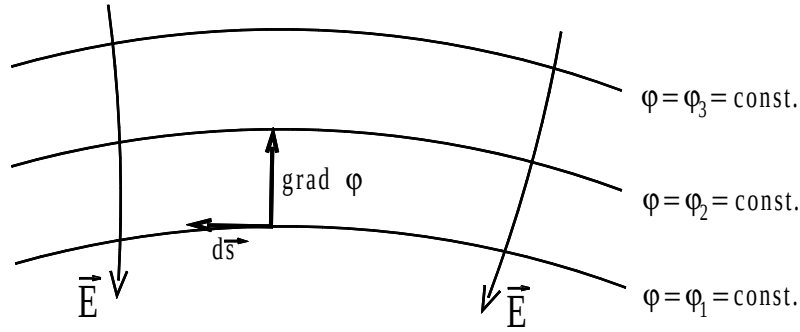
$$\begin{aligned}
 E_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\
 E_y &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\
 E_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z}
 \end{aligned}$$

Eine koordinatenfreie Darstellung läßt sich nun durch den Gradienten-Operator (Vektoranalysis) erreichen. Der **Gradient** einer Funktion f ist folgender Vektor:

$$\text{grad } f(\vec{r}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \nabla f$$

Hiermit ergibt sich

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } \varphi(\vec{r})$$

Abbildung 2.3: Wegelement $d\vec{s}$ im Potentialfeld.

Die **skalare Funktion** φ liefert eine **vollständige Beschreibung des elektrischen Feldes**, da aus ihr sämtliche Feldkomponenten durch Gradientenbildung gewonnen werden. In der Praxis wird diese Beschreibung des Feldes bevorzugt, da es – sowohl analytisch als auch numerisch – einfacher bzw. vorteilhafter (Speicherplatz) ist, zunächst das Potential φ zu berechnen und anschließend das elektrische Feld durch Gradientenbildung zu bestimmen. Selbstverständlich gilt

$$\boxed{\text{rot grad } \varphi = 0} \quad \Rightarrow \quad \text{rot } \vec{E} = 0 \text{ ist erfüllt.}$$

Dies gilt für jede beliebige Funktion φ . Zu jedem Potential gibt es ein Vektorfeld, aber nicht zu jedem Vektorfeld existiert ein eindeutiges Potential.

Oben wurde bereits kurz der Nabla-Operator ∇ eingeführt. Seine Verwendung erleichtert die Auswertung komplizierter vektoralgebraischer Ausdrücke. Man beachte, daß der ∇ -Operator Vektorcharakter hat **und** Differentiationsvorschriften ausgibt. In kartesischen Koordinaten gilt:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Flächen gleichen Potentials werden als **Äquipotentialflächen** bezeichnet. Durch $\varphi(\vec{r}) = \text{const.}$ ist die Gleichung einer Äquipotentialfläche in impliziter Form gegeben. Schreitet man im Feld um ein Wegelement $d\vec{s}$ fort ($\rightarrow$ Abb. 2.3), so ändert sich das Potential um

$$\begin{aligned} d\varphi &= \varphi(\vec{r} + d\vec{s}) - \varphi(\vec{r}) = \text{grad } \varphi d\vec{s} \\ &= |\text{grad } \varphi| |d\vec{s}| \cos(\angle \text{grad } \varphi, d\vec{s}) \\ d\varphi &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \quad ; \quad d\vec{s} = (dx, dy, dz) \\ &= \text{grad } \varphi d\vec{s} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Wählen wir nun $d\vec{s}$ gerade in Richtung der Tangente an eine Äquipotentiallinie, so muß definitionsgemäß das zugehörige $d\varphi$ verschwinden (innerhalb einer Äquipotentiallinie ist $\varphi = \text{const.}$). Durch Einsetzen in (2.2) ergibt sich $0 = \text{grad } \varphi d\vec{s}$, d. h. die beiden Vektoren $\text{grad } \varphi$ und $d\vec{s}$ stehen senkrecht aufeinander. Hieraus folgt, daß $\text{grad } \varphi$ stets senkrecht auf Äquipotentiallinien und -flächen steht. Damit gilt also:

Die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ steht senkrecht auf den Äquipotentialflächen $\varphi(\vec{r}) = \text{const.}$.

2.1.2 Physikalische Bedeutung der Potentialfunktion

Nun möchten wir noch einige weitere Betrachtungen zur **physikalischen Bedeutung des Potentials** anstellen: Betrachten wir eine Punktladung Q in einem vorgegebenen äußeren elektrostatischen Feld $\vec{E}$. Auf die Punktladung wirkt dann die Kraft $\vec{F}_e = Q \vec{E}(\vec{r})$. Befindet sich die Ladung im Kräftegleichgewicht, so heißt dies, daß an der Ladung gleichzeitig eine externe mechanische Kraft $\vec{F}_{mech}$ gleicher Größe aber entgegengesetzter Richtung angreift:

$$\vec{F}_e + \vec{F}_{mech} = 0$$

Nun bewegen wir die Ladung Q im Feld $\vec{E}(\vec{r})$ hinreichend langsam von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$ längs eines beliebigen Weges ($\rightarrow$ Abb. 2.4). Unter diesen Voraussetzungen können wir die **reversible Arbeit** im thermodynamischen Sinne berechnen, die von der externen mechanischen Kraft aufgewendet werden muß. Sie ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \Delta A &= \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}_{mech} d\vec{s} \\ &= - \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}_e d\vec{s} \\ &= -Q \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} d\vec{s} \\ &= Q \int_{P_1}^{P_2} \text{grad } \varphi d\vec{s} \\ &= Q (\varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1)). \end{aligned}$$

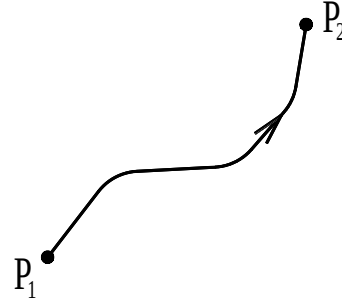


Abbildung 2.4: Beliebiger Weg zwischen zwei Punkten

Unter den obigen Annahmen können wir diese **Arbeit** ΔA mit der **Änderung der potentiellen Energie** ΔW_e der Punktladung Q im elektrostatischen Potentialfeld $\varphi(\vec{r})$ gleichsetzen:

$$\Delta A = \Delta W_e = Q\varphi(\vec{r}_2) - Q\varphi(\vec{r}_1).$$

Damit ist die Änderung ΔW_e unabhängig von einer additiven Konstante in $\varphi(\vec{r})$ und wir setzen

$$\Delta W_e = W_e(\vec{r}_2) - W_e(\vec{r}_1)$$

und definieren die **potentielle Energie** $W_e(\vec{r})$ einer Punktladung Q in einem elektrostatischen Potentialfeld $\varphi(\vec{r})$ am Ort $\vec{r}$ durch

$$W_e(\vec{r}) = Q\varphi(\vec{r}).$$

(Analog zur Definition des Potentials φ könnte hier eine additive Konstante hinzugefügt werden, ohne daß sich ΔW_e ändert.)

Kurz: $Q\varphi(\vec{r})$ ist als potentielle Energie (Arbeitsfähigkeit) der Punktladung Q im elektrostatischen Potentialfeld $\varphi(\vec{r})$ zu bezeichnen – in Analogie zur potentiellen Energie einer Punktmasse in der Mechanik. Die Potentialfunktion $\varphi(\vec{r})$ kann man also auch einführen als die an der Punktladung Q aufzubringende Arbeit, wenn man die Punktladung Q in einem Potentialfeld, das im Unendlichen verschwindet, aus dem Unendlichen ($\vec{r}_1$) an den Raumpunkt $\vec{r}_2 = \vec{r}$ bringt.

Aus obiger Überlegung ergibt sich noch folgende wichtige Schlussfolgerung: Zwischen der differentiellen Änderung dW_e der potentiellen Energie $W_e(\vec{r})$ und der diese Änderung bewirkenden Kraft $\vec{F}_e$ längs des Wegelements $d\vec{s}$ besteht offenbar der Zusammenhang

$$dW_e = -\vec{F}_e d\vec{s}.$$

Vergleichen wir dies mit $dW_e = \text{grad } W_e d\vec{s}$, so folgt

$$\vec{F}_e = -\text{grad } W_e.$$

Dies gibt uns den Zusammenhang zwischen Kraft und potentieller Energie im elektrostatischen Feld.

2.1.3 Die Potentialgleichung

Mit der Herleitung der Potentialgleichung lernen wir den ersten analytischen Lösungsansatz zur Lösung der Maxwell'schen Gleichungen kennen. Voraussetzung für das Weitere ist die Annahme, daß ε, μ, κ jeweils konstant seien.

Der Potentialansatz ist ein häufig verwendeter analytischer Lösungsansatz, der besonders im Fall stationärer Felder von großer Bedeutung ist.

Wir haben gesehen, daß wir das elektrostatische Feld wegen seiner Wirbelfreiheit ($\text{rot } \vec{E} = 0$) auch durch eine skalare Potentialfunktion beschreiben können:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } \varphi(\vec{r}) = -\nabla\varphi.$$

Für ein lineares, isotropes Medium gilt

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}.$$

Für ein homogenes Material ($\varepsilon = \text{const.}$) folgt dann durch Einsetzen in die Divergenzgleichung

$$\text{div } \vec{D} = \varrho$$

schließlich die **Poisson-Gleichung**, auch **Potentialgleichung**

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{D} &= \text{div } \varepsilon \vec{E} \\ &= -\text{div } \varepsilon \text{grad } \varphi \\ &= \varrho \\ \implies \text{div } \varepsilon \text{grad } \varphi &= -\varrho \end{aligned}$$

$$\varepsilon = \text{const.} \implies \boxed{\text{div grad } \varphi = -\frac{\varrho}{\varepsilon}}$$

Mit dem Laplace-Operator $\Delta\varphi := \text{div grad}$ schreibt sich die Poisson-Gleichung kurz als

$$\boxed{\Delta\varphi = -\frac{\varrho}{\varepsilon}} \tag{2.3}$$

Im ladungsfreien Raum ist $\varrho = 0$ und das Potential genügt der **Laplace-Gleichung**

$$\boxed{\Delta\varphi = 0.} \tag{2.4}$$

Für kartesische Koordinaten gilt $\Delta\varphi = \nabla^2\varphi$. Die Potentialgleichung ist eine elliptische Differentialgleichung. Mit Hilfe der Poisson- bzw. der Laplace-Gleichung (bei inhomogenen Medien der allg. Potentialgleichung) können wir für konkrete Problemstellungen die Potentialfunktionen und damit die elektrischen Felder bestimmen.

2.1.3.1 Potential einer Punktladung

Dem Problem angepaßt wählen wir Kugelkoordinaten mit Ursprung im Ort der Punktladung. In Kugelkoordinaten ist der Laplace-Operator gegeben durch

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\vartheta^2}$$

Da die Raumladungsverteilung Kugelsymmetrie besitzt, ist auch ein kugelsymmetrisches Potential zu erwarten:

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(r) \quad \implies \quad \frac{\partial}{\partial\theta} = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial\vartheta} = 0$$

Außerhalb der Punktladung ist der Raum ladungsfrei, d. h. $\varrho(\vec{r}) = 0$. $\rightarrow$ Laplace-Gleichung $\Delta\varphi = 0$ ist zu lösen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) &= 0 && | \cdot r^2 \\ \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) &= 0 && | \text{Integration} \\ r^2 \frac{d\varphi}{dr} &= C_1 && | : r^2 \\ \frac{d\varphi}{dr} &= \frac{C_1}{r^2} && | \text{Integration} \\ \varphi(r) &= -C_1 \frac{1}{r} + C_2 \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Konstanten C_1 und C_2 müssen die Randbedingungen des elektrostatischen Feldes benutzt werden. Zusätzlich sind Überlegungen zur Struktur des sich einstellenden Feldes notwendig.

1. Zunächst wählen wir den Bezugspunkt so, daß

$$\begin{aligned} \varphi(r = \infty) &= 0 \\ \implies C_2 &= 0 \end{aligned}$$

2. Die Ladung im Nullpunkt ($r = 0$) hat die Größe Q . Nutze die 3 Maxwellschen Gleichungen in Integralform:

$$\begin{aligned} \oint\limits_{\text{Hüllkugel}} \vec{D} d\vec{A} &= Q \quad \vec{E} = -\text{grad } \varphi, \quad \vec{E} = (E_r, 0, 0) \\ \implies \oint\limits_{\text{Hüllkugel}} \varepsilon \vec{E} d\vec{A} &= -\varepsilon 4\pi r^2 \frac{C_1}{r^2} = Q \\ \implies C_1 &= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon} \end{aligned}$$

$\begin{aligned} \varphi(r) &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon r} \\ \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \vec{e}_r \end{aligned}$	$\implies$ bekanntes Resultat aus Grundlagenvorlesung
--	--

In analoger Weise kann das Potential von Flächen- und Linienladungen bestimmt werden.

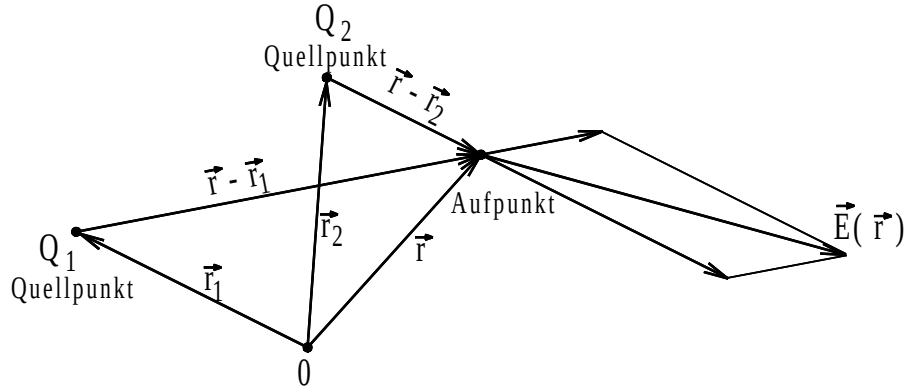


Abbildung 2.5: Vektorielle Überlagerung der Feldstärke zweier Punktladungen.

2.1.3.2 Das Superpositionsprinzip

In vielen Fällen kann die Lösung der Potentialgleichung aus der Überlagerung der Wirkungen einzelner Ladungen abgeleitet werden, indem das Superpositionsprinzip benutzt wird.

Etwas allgemeiner als vorher betrachten wir zunächst eine Punktladung Q_1 am Ort $\vec{r}_1$. Sie verursacht im Punkt $\vec{r}$ des freien Raums das elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}, \quad (2.5)$$

das auch als **Coulombfeld** bezeichnet wird. Der Ort der felderzeugenden Ladung wird als **Quellpunkt**, der Punkt, an dem man das Feld beobachtet, als **Aufpunkt** bezeichnet ($\rightarrow$ Abb. 2.5). Das Feld, das von N Punktladungen Q_i mit den Quellpunkten $\vec{r}_i$ im Aufpunkt $\vec{r}$ erzeugt wird, erhält man durch Superposition (vektorielle Addition der Feldstärken) zu

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N Q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}.} \quad (2.6)$$

Vereinbaren wir, daß in $\text{grad}[f(\vec{r}, \vec{r}_i)]$ die Gradientenbildung bezüglich der Aufpunktskoordinaten $\vec{r}$ durchzuführen ist, so können wir wegen

$$\text{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} = - \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

obige Gleichung auch als

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= -\text{grad} \varphi(\vec{r}) \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N Q_i \text{grad} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right) \\ &= -\text{grad} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right) \end{aligned}$$

schreiben. Hieraus erhalten wir für das Potential von N Punktladungen

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}. \quad (2.7)$$

Es ergibt sich somit durch Summation über die Potentiale der einzelnen Ladungen.

Beachte: An den Orten der Punktladungen (Quellpunkten) werden Potential und Feldstärke singulär. Das Potential ist so normiert, daß es für $r \rightarrow \infty$ verschwindet.

2.1.3.3 Potential einer Raumladungsverteilung

Wir betrachten nun ein am Quellpunkt $\vec{r}_i$ gelegenes infinitesimales Ladungselement $dQ_i = \varrho(\vec{r}_i) dV_i$ ($\rightarrow$ Abb. 2.6). Dieses erzeugt im Aufpunkt $\vec{r}$ ein Feldbetrag $d\vec{E}(\vec{r})$ gemäß:

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \varrho(\vec{r}_i) dV_i.$$

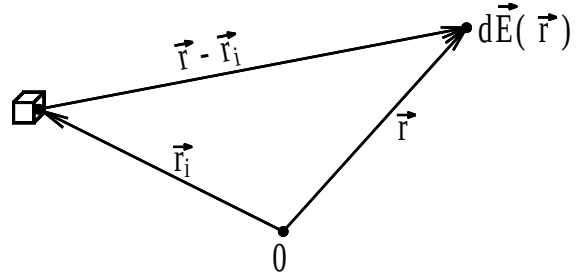


Abbildung 2.6: Infinitesimales Ladungselement.

Durch Superposition der Beträge aller infinitesimalen Ladungselemente erhalten wir das resultierende Feld im Aufpunkt $\vec{r}$. Dazu müssen wir eine Volumenintegration bezüglich der Quellpunktskoordinaten über den gesamten von Raumladung erfüllten Bereich durchführen:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\varrho(\vec{r}_i)(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} dV_i \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \varrho(\vec{r}_i) \operatorname{grad} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right) dV_i \\ &= -\operatorname{grad} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\varrho(\vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} dV_i \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

(2.8) $\rightarrow$ Gradientenbildung bezüglich des Aufpunktes

Das Potential einer Raumladungsverteilung $\varrho(\vec{r})$ ist durch das **Coulombintegral**

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\varrho(\vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} dV_i \quad (2.9)$$

gegeben.

Für ganz im Endlichen gelegene Raumladungsverteilungen $\varrho(\vec{r})$ liefert das Coulombintegral ein Potential, das für $r \rightarrow \infty$ verschwindet, d. h. für derartige Ladungsverteilungen beinhaltet obige Gleichung bereits eine Festlegung des Bezugspotentials.

Es läßt sich zeigen, daß das obige Potential bei überall endlicher Raumladungsdichte ($|\varrho| \leq \varrho_{max}$) und einer ganz im Endlichen liegenden Ladungsverteilung beschränkt ist:

$$|\varrho(\vec{r})| = \frac{\varrho_{max} \vec{r}_{max}^2}{2\varepsilon_0}$$

2.1.3.4 Das Coulombintegral für spezielle Ladungsverteilungen

1. **Oberflächenladungsdichte** $\varrho_F(\vec{r})$ auf geladener Fläche F

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_F \frac{\varrho_F(\vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} df_i \quad (2.10)$$

2. **Linienladung** $\varrho_S(\vec{r})$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{\varrho_S(\vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} ds_i \quad (2.11)$$

→ logarithmische Singularität auf der ladungstragenden Linie!

2.1.3.5 Beispiel: Der elektrische Dipol

Wir betrachten eine Anordnung aus zwei Punktladungen $+Q$ und $-Q$, die einen Abstand d zueinander haben. Eine solche Anordnung wird als **Dipol** bezeichnet. (→ Abbildung 2.7) Im Aufpunkt

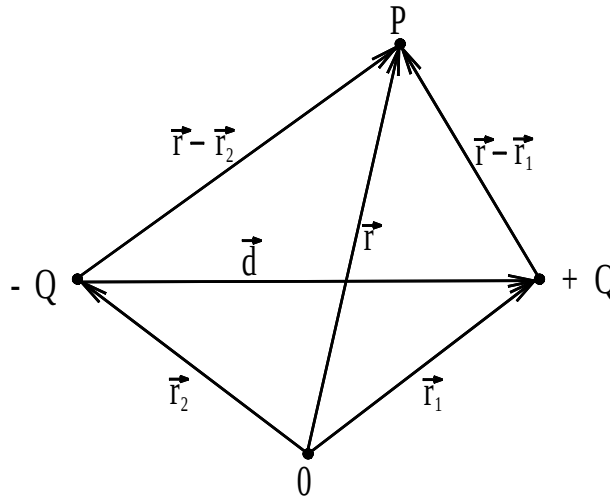


Abbildung 2.7: Prinzip des Dipols.

P erhalten wir das Potential

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} - \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} \right) \quad (2.12)$$

Aus Abbildung 2.7 entnehmen wir

$$\begin{aligned}
 \vec{r} - \vec{r}_2 &= \vec{r} - \vec{r}_1 + \vec{d} \\
 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} &= \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1 + \vec{d}|} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2 + 2\vec{d}(\vec{r} - \vec{r}_1) + |\vec{d}|^2}} \\
 &= \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \frac{1}{\sqrt{1 + 2\frac{\vec{d}(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} + \frac{|\vec{d}|^2}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2}}}
 \end{aligned}$$

Für Aufpunkte mit

$$|\vec{r} - \vec{r}_1| \gg |\vec{d}| \quad \left(\text{Entwicklung von } \frac{1}{\sqrt{1+x}} \right)$$

ergibt sich folgende Entwicklung

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} &= \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2\vec{d}(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} + \frac{|\vec{d}|^2}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{8} \left(\frac{2\vec{d}(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} + \frac{|\vec{d}|^2}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} \right)^2 \mp \dots \right\}.
 \end{aligned}$$

Ordnen wir dies nach Potenzen von $\frac{|\vec{d}|}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^2} &= \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \left\{ 1 - \frac{\vec{d}(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} - \frac{1}{2} \frac{|\vec{d}|^2}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{2} \frac{[\vec{d}(\vec{r} - \vec{r}_1)]^2}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^4} \pm \dots \right\}.
 \end{aligned}$$

Nun setzen wir diese Entwicklung in Gleichung (2.12) ein und erhalten

$$\begin{aligned}
 \varphi(\vec{r}) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\vec{d}(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} + \frac{1}{2} \frac{|\vec{d}|^2}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3}{2} \frac{[\vec{d}(\vec{r} - \vec{r}_1)]^2}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^5} \pm \dots \right\}.
 \end{aligned}$$

Für Aufpunkte im Fernfeld, d. h. wenn

$$|\vec{r} - \vec{r}_1| \gg |\vec{d}|$$

gilt, können wir das Potential dann annähern durch

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{d}(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}.$$

Lassen wir nun $\vec{d} \rightarrow 0$ und gleichzeitig $Q \rightarrow \infty$ streben, und zwar so, daß der Vektor

$$\vec{p} = Q \vec{d}$$

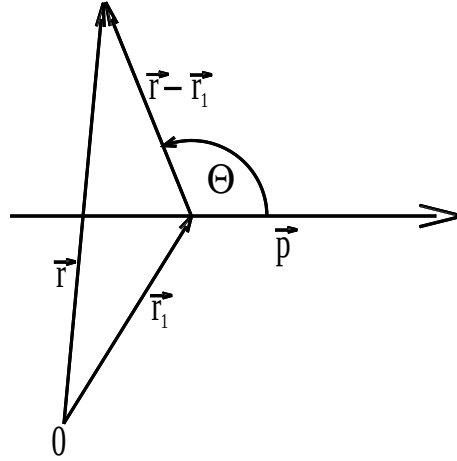


Abbildung 2.8: Definition des Dipolmoments.

der von $-Q$ nach $+Q$ zeigt, konstant und endlich bleibt, so erhalten wir ein Gebilde, das wir in Analogie zur Punktladung als **Punktdipol** bezeichnen wollen. Der Vektor $\vec{p}$ heißt **Dipolmoment** und hat die Einheit [Asm]. (→ Abbildung 2.8)

Das Potential eines Punktdipols mit dem Dipolmoment $\vec{p}$, der sich am Ort $\vec{r}_1$ befindet, ist gegeben durch:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \quad (2.13)$$

Mit dem Winkel θ zwischen $\vec{p}$ und $(\vec{r} - \vec{r}_1)$ können wir auch schreiben:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\vec{p}| \cos \theta}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} \quad (2.14)$$

Der Punktdipol stellt, ebenso wie die Punktladung, eine Idealisierung dar, die in der Praxis nur näherungsweise realisierbar ist.

Die elektrische Feldstärke ergibt sich aus Gleichung (2.13) durch Gradientenbildung. Der Einfachheit halber betrachten wir einen Punktdipol mit Ausrichtung längs zur z-Achse. Weiterhin nehmen wir $\vec{r}_1 = 0$ an, d. h. der Punktdipol befinde sich im Koordinatenursprung. Wir setzen $|\vec{r}| = r$ und $|\vec{p}| = p$. Die z-Komponente des elektrischen Feldes ist dann gegeben durch

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r^3} \right) = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} \right)$$

bzw.

$$E_z = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{r^3}$$

Die x- und y-Komponenten sind gegeben durch:

$$E_x = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3zx}{r^5}$$

$$E_y = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3zy}{r^5}$$

¹ Produktregel $\rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Letztere können wir zu einer Feldkomponente kombinieren, die **senkrecht** zur z-Achse steht und als transversale Komponente $E_{\perp}$ bezeichnet wird:

$$E_{\perp} = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3z}{r^5} \sqrt{x^2 + y^2}$$

bzw.

$$E_{\perp} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3 \cos \theta \sin \theta}{r^3}$$

Die transversale Komponente $E_{\perp}$ liegt in der xy-Ebene und zeigt direkt weg von der Achse des Dipols. Das Gesamtfeld ist

$$E = \sqrt{E_z^2 + E_{\perp}^2}.$$

Das Dipolfeld variiert umgekehrt proportional zur kubischen Wurzel des Abstandes zum Dipol $\rightarrow$ Abb. 2.9 und Abb. 2.10.

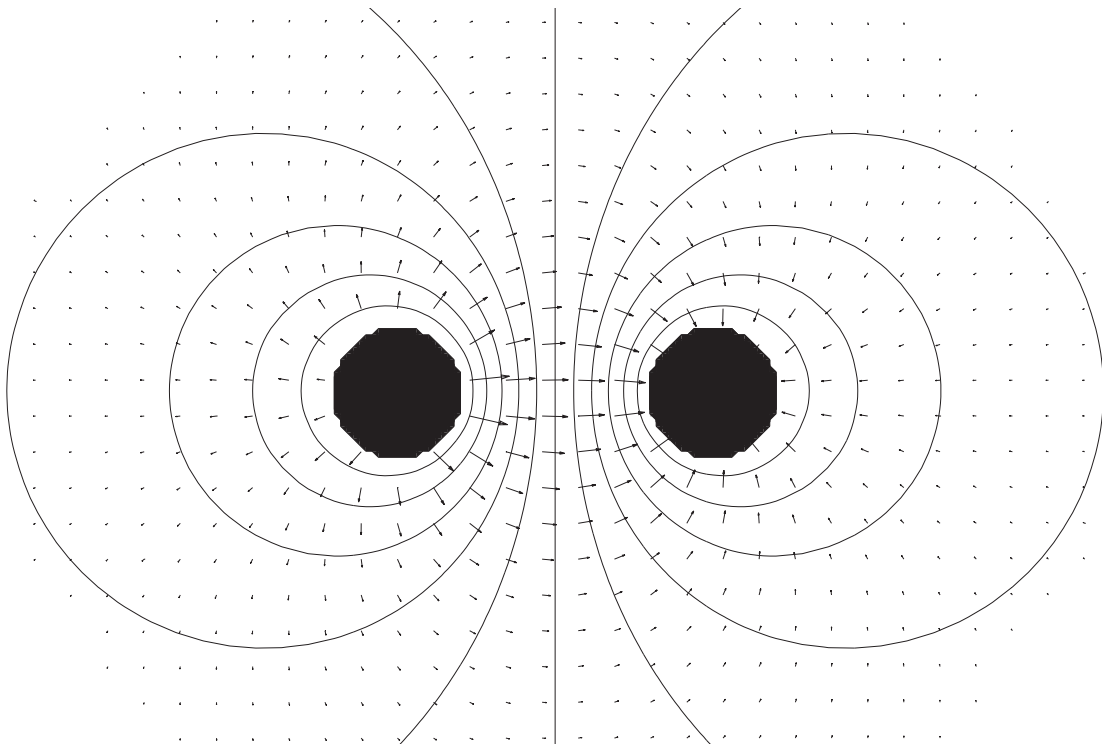


Abbildung 2.9: Das elektrische Feld zweier Punktladungen (elektrischer Dipol).

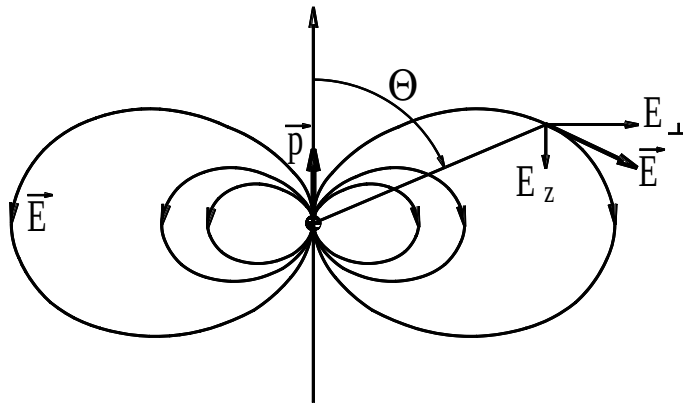


Abbildung 2.10: Das elektrische Feld eines Punktdipols.

2.1.3.6 Beispiel: pn-Übergang

Dies ist ein Beispiel aus der Halbleitertechnologie und findet Anwendung als Kapazitätsdiode. Modelliert wird ein abrupter Übergang zweier Raumladungsbereiche. Dies wird in der Praxis nur näherungsweise erreicht; es handelt sich bei dem Modell also um eine Idealisierung. (→ Abbildung 2.11)

Aufgabenstellung:

- Berechnung von Feldstärken und Potentialen am Übergang
- Spannungsabhängigkeiten der Kapazität C des pn-Übergangs

Raumladung im p-Gebiet

Raumladung im n-Gebiet

$$\begin{aligned} \varrho_p &= -(e N_A + e n^-) \\ N_A &= \text{Dichte der Akzeptoren} \\ n^- &= \text{Dichte der Elektronen aus} \\ &\quad \text{n-Gebiet} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varrho_n &= +e N_D + e p^+ \\ N_D &= \text{Dichte der Donatoren} \\ p^+ &= \text{Dichte der Defektelektronen} \\ &\quad \text{aus p-Gebiet} \end{aligned}$$

Nun führen wir folgende **Näherungen** durch (→ Abbildung 2.12):

$$\begin{aligned} N_A &\gg n^- \\ N_A &= \text{const. für } x_1 \leq x \leq 0 \\ N_D &\gg p^+ \\ N_D &= \text{const. für } 0 \leq x \leq x_2 \end{aligned}$$

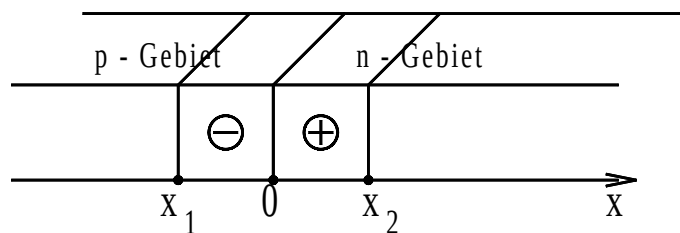


Abbildung 2.11: Abrupter Übergang zweier Raumladungsbereiche.

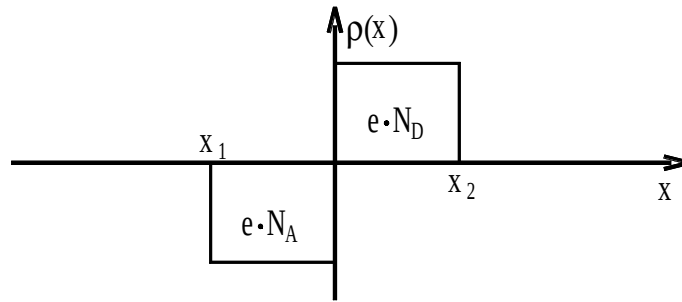


Abbildung 2.12: Näherungen des Übergangs.

Jetzt wollen wir die Potentialgleichung lösen:

$$\Delta\varphi = -\frac{\varrho}{\varepsilon}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \frac{\varrho(x,y,z)}{\varepsilon}$$

Nun wird eine weitere Näherung gemacht: Es wird angenommen, daß die Dicke des pn-Übergangs $d = |x_1| + |x_2|$ viel kleiner sei als die Ausdehnung der Übergangsfläche in y- und z-Richtung. Damit kann dann die Näherung gemacht werden, daß keine Potentialänderung in y- und z-Richtung stattfindet und daß ϱ nur von x abhängt.

Beachte: Diese Näherung ist bei Höchstfrequenz-Bauelementen nicht mehr zulässig.

Mit obiger Annahme erhalten wir für die Potentialgleichung in den beiden Gebieten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\varphi_p}{\partial x^2} &= -\frac{\varrho_p}{\varepsilon} & \frac{\partial^2\varphi_n}{\partial x^2} &= -\frac{\varrho_n}{\varepsilon} \\ \frac{\partial^2\varphi_p}{\partial x^2} &= -\frac{eN_A}{\varepsilon} & \frac{\partial^2\varphi_n}{\partial x^2} &= -\frac{eN_D}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Durch Integration erhalten wir:

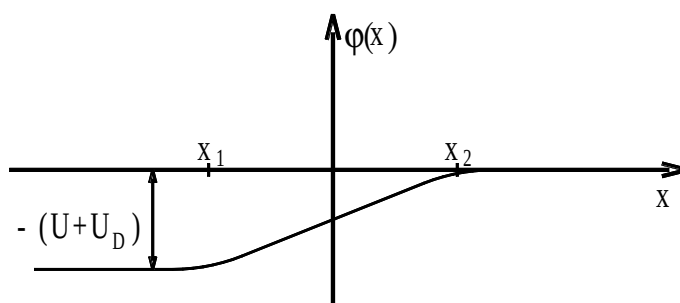
$$\begin{aligned} \varphi_p &= \frac{1}{2} \frac{eN_A}{\varepsilon} x^2 + C_1x + C_2 \\ \varphi_n &= -\frac{1}{2} \frac{eN_D}{\varepsilon} x^2 + C_3x + C_4 \end{aligned}$$

Die Konstanten $C_1, \dots, C_4$ können wir mit Hilfe von Randbedingungen berechnen.

Für die Formulierung von Rand- bzw. Grenzbedingungen ist die physikalische Vorstellung sehr wichtig:

1. In $x = x_1$ und $x = x_2$ sind die Spannungen bekannt und die Feldstärken verschwinden.
2. In $x = 0$ muß $\varphi_p = \varphi_n$ und $\frac{\partial\varphi_p}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_n}{\partial x}$ gelten.
3. U sei die von außen angelegte Sperrspannung und U_D die Diffusionsspannung am pn-Übergang. Der qualitative Verlauf von $\varphi(x)$ ist in Abbildung 2.13 gezeigt.

Damit liegen diese Randbedingungen vor:

Abbildung 2.13: Qualitativer Verlauf von $\varphi(x)$.

$$1. \quad \varphi_p(x_1) = -(U + U_D)$$

$$2. \quad \varphi_n(x_2) = 0$$

$$3. \quad \varphi_p(0) = \varphi_n(0)$$

$$4. \quad \frac{\partial \varphi_p}{\partial x}(x_1) = 0$$

$$5. \quad \frac{\partial \varphi_n}{\partial x}(x_2) = 0$$

$$6. \quad \frac{\partial \varphi_p}{\partial x}(0) = \frac{\partial \varphi_n}{\partial x}(0)$$

Hiermit lassen sich die Konstanten $C_1, \dots, C_4$ und die Ausdehnungen der Raumladungen x_1 und x_2 , die von den Dotierungen abhängen, bestimmen.

Der Spannungsverlauf wird durch Parabelbögen gegeben. Für die Kapazitätsberechnung ist die Bestimmung von x_1 und x_2 erforderlich. In der Praxis sind x_1 und x_2 ungleich (unsymmetrische Übergänge sind die Regel).

Berechnung der absoluten Kapazität:

$$C = \frac{Q}{U + U_D}$$

mit

bzw.

$$\begin{aligned} -Q_p &= \varrho_p V_p \\ V_p &= A x_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_n &= \varrho_n V_n \\ V_n &= A x_2 \end{aligned}$$

- A = Fläche des pn-Übergangs $\rightarrow$ Ausdehnung in y- und z-Richtung

- V = Volumenanteile des p-/n-Gebietes

Mit $|Q_p| = |Q_n|$ ergibt sich:

$$C = A \sqrt{\frac{2e\epsilon N_D N_A}{(N_A + N_D)(U + U_D)}}$$

Für die differentielle Kapazität ergibt sich

$$C_{diff} = \frac{\partial Q}{\partial (U + U_D)}$$

$$C_{diff} = A \sqrt{\frac{e \varepsilon N_D N_A}{2(N_A + N_D)(U + U_D)}}$$

Die Steuerung der Kapazität durch U hat also die Form

$$C \sim \frac{1}{\sqrt{U + U_D}}$$

Die differentielle Kapazität beträgt die Hälfte der absoluten Kapazität.

2.1.4 Die Spiegelungsmethode

Bevor wir uns im nächsten Abschnitt mit formalen Lösungsmethoden befassen, werden wir die einfache Methode der Spiegelung behandeln, die unter bestimmten Voraussetzungen zur Lösung der Potentialgleichung verwendet werden kann.

Bisher haben wir Beispiele betrachtet, bei denen die Ladungsverteilung bekannt war. Nun wollen wir die Felder in der Nähe von Leitern bestimmen. Bei der Spiegelungsmethode wird sozusagen ein „Trick“ angewandt, indem wir uns bereits bekannter Lösungen bedienen, die wir für Fälle erhalten haben, in denen die Ladungen an festen Orten platziert sind.

Betrachten wir z. B. Abb. 2.9. Würden wir nun eine ganz dünne Metallschicht auf die mit A bezeichnete Äquipotentialfläche legen, so würde dies - bei geeigneter Anpassung an den Potentialwert - keinerlei Veränderungen bewirken. Dennoch hätten wir ein anderes Problem gelöst! Wir hätten nämlich die Situation gelöst, in der die Oberfläche eines gekrümmten Leiters mit einem gewissen Potential in die Nähe einer Punktladung platziert wurde. Wenn die besagte Metallschicht in sich geschlossen ist oder weit genug reicht, haben wir somit gefunden, daß die Felder innerhalb und außerhalb einer geschlossenen leitenden Schale voneinander weitgehend unabhängig sind: Im Raum außerhalb gleichen die Felder denen zweier Punktladungen und innerhalb verschwindet das Feld. Weiterhin steht das Feld gerade außerhalb des Leiters senkrecht auf der Oberfläche - so wie es sein muß → Abb. 2.14.

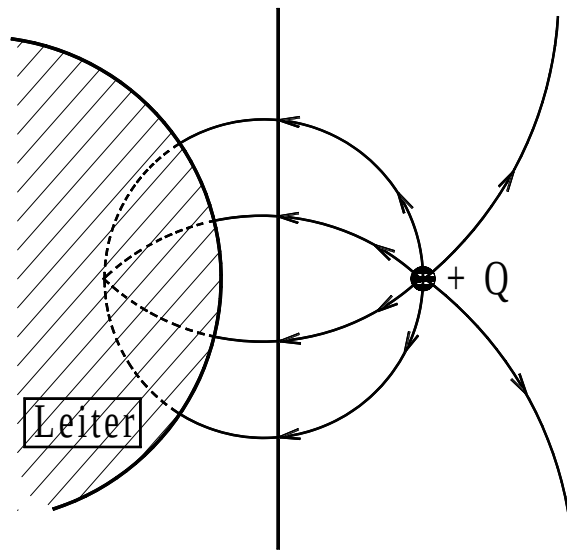


Abbildung 2.14: Punktladung vor leitender Kugel.

Somit können wir die Felder für die obige Anordnung bestimmen, indem wir die von der Ladung Q und einer imaginären Punktladung $-Q$ verursachten Felder berechnen. Die imaginäre Ladung $-Q$ muß dazu natürlich geeignet platziert sein.

Bevor wir nun konkret die Spiegelladungsmethode behandeln, sollen einige wichtige Tatsachen in Zusammenhang mit Leitern ins Gedächtnis gerufen werden:

1. Das Potential φ ist an der Oberfläche eines Leiters konstant, d. h. die Oberfläche ist eine Äquipotentialfläche.
2. Das Innere des Leiters ist feldfrei. (Im stationären Zustand verschwindet die Ladungsdichte im Innern des Leiters: $\rho \equiv 0$).
3. Auf der Leiteroberfläche können nur Normalkomponenten der Feldstärke vorhanden sein, Tangentialkomponenten sind auf Grund der Leitfähigkeit stets Null. (vgl. 2.)
4. Die Ladungsdichte $\rho = \frac{dQ}{dA}$ ist gleich dem Betrag der Verschiebungsdichte $\sigma = |\vec{D}|$, denn $\iint_A \sigma dA = Q$ bzw. $\oiint \vec{D} d\vec{A} = Q$. Da nur $D_\perp$ auf der Leiterfläche existiert, ist $\sigma = D_\perp$.
5. Wird eine beliebige Äquipotentialfläche in einem Feld durch eine Leiteroberfläche ersetzt, so ändert sich die Feldverteilung nicht, wenn die eingeschlossene Ladung auf der Leiteroberfläche verteilt wird.

Die Punkte 1. und 5. sind die schon besprochene Grundlage für die Spiegelungsmethode.

2.1.4.1 Punktladung vor leitender Halbebene

Betrachten wir wieder das Bild mit den Feldlinien und Äquipotentialflächen zweier Punktladungen. Bei der einfachsten möglichen Anwendung der Spiegelungsmethode benutzen wir die mit B markierte Ebene Äquipotentialfläche. Damit können wir das Problem einer Ladung vor einer leitenden Schicht lösen. Da dabei das Potential gleich Null ist (B liegt genau in der Mitte zwischen den beiden Ladungen), entspricht es der Lösung des Problems einer positiven Ladung vor einer geerdeten leitenden Platte. Die Punktladung $+Q$ sei im Abstand d von der leitenden Ebene angeordnet ($\rightarrow$ Abbildung 2.15).

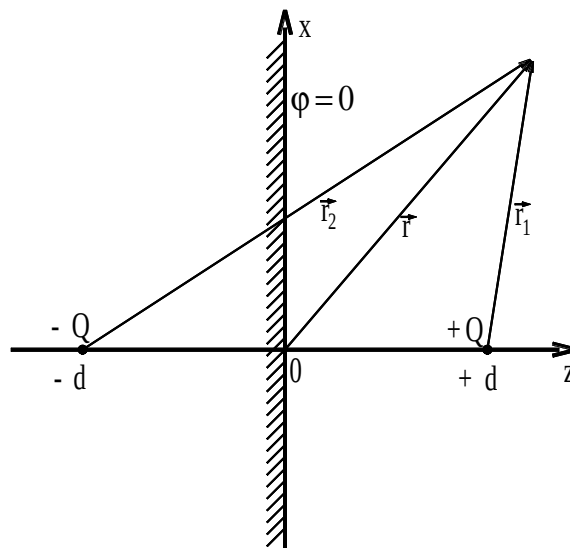


Abbildung 2.15: Feld einer Punktladung vor einer geerdeten leitenden Platte.

Gesucht ist das Potential im rechtem Halbraum. Dazu wird eine zusätzliche („imaginäre“) Ladung außerhalb des Lösungsraumes, d. h. für $z < 0$ angebracht, um die Randbedingung $\varphi = 0$

an der Ebene $z = 0$ (Rand unseres eigentlichen Lösungsgebietes) zu erfüllen. Die Symmetrie des Problems legt es nahe, eine Spiegelladung $Q' = -Q$ am Ort $(0, 0, -d)$ anzubringen. Q' wird als elektrisches Spiegelbild von Q bezeichnet. Das Potential im Aufpunkt $\vec{r}$ ergibt sich dann durch Addition der Potentiale von Q und Q' zu

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} - \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} - \frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d)^2}} \right).\end{aligned}\quad (2.15)$$

Liegt der Aufpunkt in der Ebene $z = 0$, so ist $|\vec{r} - \vec{r}_1| = |\vec{r} - \vec{r}_2|$. Die Ebene $z = 0$ ist also Äquipotentialfläche mit $\varphi = 0$, d. h. die Randbedingung ist erfüllt.

Wir erhalten also im rechten Halbraum $z \geq 0$ dasselbe Potential, wenn wir statt der Anordnung aus Punktladung $+Q$ an der Stelle $z = d$ und geerdeter, leitender Ebene bei $z = 0$ die Ersatzanordnung aus Punktladung $+Q$ bei $z = d$ und „Bildladung“ $-Q$ an der Stelle $z = -d$ betrachten.

Ohne Zuhilfenahme der Spiegelungsmethode wäre die Aufgabe nicht mehr elementar zu lösen. Es müßte nämlich die auf der leitenden Ebene influenzierte Flächenladungsdichte $\varrho_F(x, y)$ so bestimmt werden, daß das Potential

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varrho_F(x', y')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}} dx' dy'$$

der Randbedingung $\varphi(x, y, 0) = 0$ genügt. Es wäre also eine Integralgleichung für $\varrho_F(x, y)$ zu lösen. Stattdessen können wir zunächst die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ im rechten Halbraum durch Gradientenbildung aus (2.4) gewinnen und anschließend die auf der Wandoberfläche induzierte Flächenladungsdichte ϱ_F durch Auswerten der Randbedingung für die Normalkomponente von $\vec{D}$ bestimmen. Ohne Herleitung soll hier nur das Ergebnis angegeben werden:

$$\varrho_F = -\frac{Q}{2\pi} \frac{d}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} \quad (2.16)$$

ϱ_F ist rotationssymmetrisch zur z -Achse. Durch Integration über die leitende Ebene ergibt sich die gesamte influenzierte Ladung zu $-Q$.

Um das Potential einer Ladungsverteilung vor einer leitenden Ebene zu bestimmen, kann auch bei der Spiegelungsmethode wiederum das uns bekannte Superpositionsprinzip angewendet werden.

2.1.4.2 Lösungsprinzip der Spiegelladungsmethode

Nachdem wir uns zunächst anschaulich und dann an einem konkreten Beispiel ein Bild von der Spiegelungsmethode gemacht haben, soll hier noch einmal das Prinzip formuliert werden.

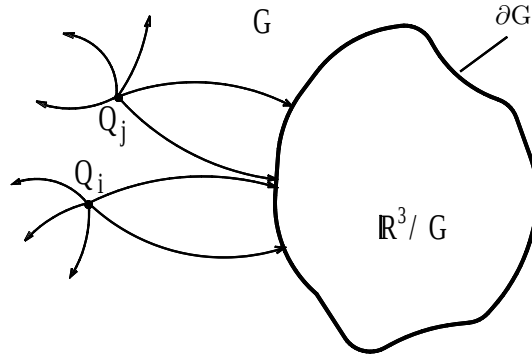
Problemstellung: Gegeben ist ein Teilgebiet G des dreidimensionalen freien Raumes ($G \subset \mathbf{R}^3$) sowie eine Ladungsverteilung in G ($\varrho : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$) → Abb. 2.16. Gesucht ist das zugehörige Potential φ ($\varphi : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$), das an den Grenzen ∂G des Teilgebietes zum übrigen Raum den Randbedingungen für elektrostatische Felder genügt (hierzu kommen wir noch später).

Lösungsweg:

1. Betrachte das Potential φ_{inhom} , das durch die vorgegebene Ladungsverteilung im freien Raum erzeugt würde, d. h. das zur Raumladungsdichte $\varrho(x, y, z)$ gehörige Coulombintegral. Dieses Potential genügt im Lösungsgebiet G der **inhomogenen Poisson-Gleichung**

$$\Delta\varphi_{inhom} = -\frac{\varrho}{\epsilon_0} \quad (2.17)$$

aber i. a. erfüllt es nicht die Randbedingungen!

Abbildung 2.16: Teilgebiet G im dreidimensionalen freien Raum.

2. Nun denke man sich die Grenzflächen ∂G entfernt und bringe außerhalb des Lösungsgebietes G (also in $\mathbb{R}^3 \setminus G$) zusätzliche Raumladungen an ($\rightarrow$ Abb. 2.17). Das von den Raumladungen **außerhalb** des Lösungsgebietes **erzeugte Potential** φ_{hom} genügt innerhalb des Lösungsgebietes G der **homogenen Laplace-Gleichung**

$$\Delta \varphi_{hom} = 0. \quad (2.18)$$

3. Die Summe beider Potentiale genügt im Lösungsgebiet G der Poisson-Gleichung

$$\Delta \varphi_{inhom} + \Delta \varphi_{hom} = \Delta(\varphi_{inhom} + \varphi_{hom}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (2.19)$$

(D. h. in der Spiegelungsmethode findet einer der wichtigsten Lösungsansätze für Differentialgleichungen aus der Mathematik Anwendung, nach dem sich jede Lösung aus einer speziellen inhomogenen und der allgemeinen homogenen Lösung zusammensetzen läßt.)

Nun sollen noch einige Hinweise zur erforderlichen Anordnung von Ladungen außerhalb des Lösungsgebietes G angegeben werden, so daß das resultierende Potential die Randbedingungen an ∂G erfüllt.

- (a) Veranschaulichung des Verlaufs der Feldlinien.
- (b) Suche nach Ladungen und Spiegelladungen (Bildladungen), die in G das gleiche Feldbild wie die Problemstellung ergeben.
- (c) Immer: Zurückführung der Spiegelung von Linien-, Flächen- und Raumladungen auf Spiegelung von einzelnen Punktladungen.

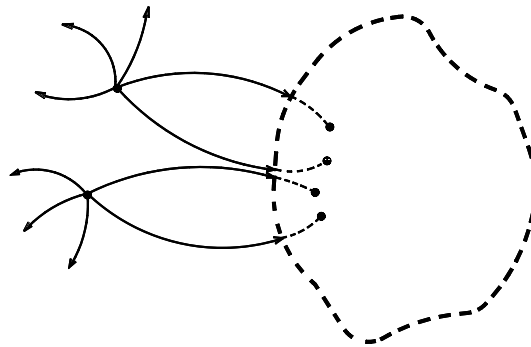


Abbildung 2.17: Zusätzliche Raumladungen außerhalb des Lösungsgebietes.

- (d) Bei Problemen mit Mehrfachspiegelungen ist die Reihenfolge der Einzelspiegelungen beliebig.
- (e) Im Lösungsgebiet G dürfen keine Spiegelladungen vorhanden sein.
- (f) Erfüllung aller Rand- und Stetigkeitsbedingungen.
- (g) Beachtung der Ladungserhaltung bei nicht geerdeten Anordnungen ($\sum Q_i = 0$).
- (h) Berechnung des elektrischen Feldes aus Superposition der Felder der Ladungen und der Spiegelladungen.

Tatsächlich ist die Methode nur bei einfachen Problemstellungen anwendbar, denn nur dort gelingt es, Größe und Lage der imaginären Spiegelladungen mit elementaren Mitteln zu bestimmen.

2.1.4.3 Punktladung vor leitender Kugel

Als zweites elementares Beispiel soll nun eine Punktladung vor einer leitenden Kugel betrachtet werden.

Praktische Bedeutung dieses Beispiels: Bei der Berechnung von Feldstärkeüberhöhungen in Transformatoren, die in ihrem Öl Verunreinigungen z. B. durch Wassertröpfchen haben.

Wir betrachten also eine Punktladung vor einer geerdeten leitenden Kugel mit Radius R ($\rightarrow$ Abb. 2.18). Gesucht ist das Potential im Außenraum. Das zu erwartende Potential wird rotationssymmetrisch zur Verbindungsline vom Kugelmittelpunkt zur Punktladung Q_1 sein. Daher wird die Spiegelladung Q_2 auf dieser Verbindungsgeraden angenommen. Größe und genauer Ort von Q_2 müssen nun bestimmt werden.

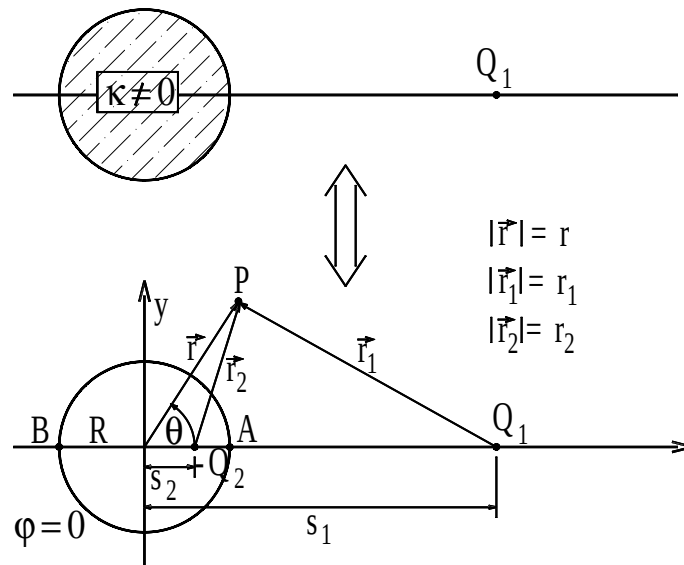


Abbildung 2.18: Punktladung vor geerdeten leitenden Kugel.

Das Potential im Aufpunkt P ist gegeben durch

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{r_1} - \frac{Q_2}{r_2} \right). \quad (2.20)$$

Da die Kugel leitend ist, muß die Kugeloberfläche eine Äquipotentialfläche sein, d. h. $\varphi(R) = \text{const.}$ Mit dieser Randbedingung bestimmen wir (zunächst) Ort und Größe der Spiegelladung für den Spezialfall einer geerdeten Kugel ($\varphi(R) = 0$):

$$\frac{Q_1}{r_1} = \frac{Q_2}{r_2} \iff \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{r_1}{r_2} \iff \frac{Q_1^2}{Q_2^2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

mit

$$\begin{aligned} r_1^2 &= R^2 + s_1^2 - 2Rs_1 \cos \theta \\ r_2^2 &= R^2 + s_2^2 - 2Rs_2 \cos \theta \end{aligned}$$

Einsetzen in vorige Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{Q_1^2}{Q_2^2} &= \frac{R^2 + s_1^2 - 2Rs_1 \cos \theta}{R^2 + s_2^2 - 2Rs_2 \cos \theta} \\ \frac{Q_1^2 s_2}{Q_2^2 s_1} &= \frac{R^2 s_2 + s_1^2 s_2 - 2Rs_1 s_2 \cos \theta}{R^2 s_1 + s_2^2 s_1 - 2Rs_1 s_2 \cos \theta} \end{aligned}$$

Durch Wahl von

$$R^2 = s_1 s_2 \quad (2.21)$$

ergibt sich

$$\frac{Q_1^2}{Q_2^2} = \frac{s_1}{s_2}. \quad (2.22)$$

Einschub zu (2.21):

Nach einem Satz der Geometrie (APOLLONIUS) ist der geometrische Ort der Punkte einer Ebene mit konstantem Abstandsverhältnis zu zwei festen Punkten dieser Ebene ein Kreis, der die Verbindungsgerade zwischen den beiden Punkten harmonisch teilt. Nach Abb. 2.18 heißt dies:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{Q_1 A}}{\overline{Q_2 A}} &= \frac{\overline{Q_1 B}}{\overline{Q_2 B}} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{Q_1}{Q_2} = \text{const.} \\ \frac{s_1 - R}{R - s_2} &= \frac{s_1 + R}{R + s_2} \end{aligned}$$

Die Multiplikation mit $(R - s_2)(R + s_2)$ liefert:

$$\begin{aligned} s_1 R + s_1 s_2 - R^2 - R s_2 &= s_1 R - s_1 s_2 + R^2 - R s_2 \\ \text{bzw.} \quad 2R^2 &= 2s_1 s_2 \\ \text{oder} \quad R^2 &= s_1 s_2 \end{aligned}$$

Aus (2.21) und (2.22) lassen sich der Ort und die Größe der gesuchten negativen Spiegelladung ($-Q_2$) bestimmen.

Bis hierher wurde das Potential auf der Kugeloberfläche zu Null gesetzt. Wenn wir nun im Mittelpunkt der Kugel eine weitere Punktladung ($+Q_3$) anbringen, so bleibt die Kugeloberfläche weiterhin eine Äquipotentialfläche – allerdings nun mit einem Potential ungleich Null. Für den Raum außerhalb der Kugel ergibt sich in diesem Fall das Potential

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{r_1} - \frac{Q_2}{r_2} + \frac{Q_3}{r_3} \right) \quad (2.23)$$

Mit Gl. (2.23) läßt sich jedes beliebige Potential auf der Kugeloberfläche oder jede Gesamtladung in der Kugel einstellen.

	Q_3	Q_{ges}	$\varphi(R)$
geerdete Kugel	0	$-Q_2$	0
ungeladene Kugel	Q_2	0	$\frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R}$
sonst	Q_3	$Q_3 - Q_2$	$\frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 R}$

Tabelle 2.1: Spiegelung an einer Kugel

Bisher haben wir uns im wesentlichen auf Felder im Vakuum beschränkt. Im folgenden wollen wir nun auch Dielektrika betrachten.

2.1.5 Randbedingungen des elektrischen Feldes an der Grenzfläche homogener Medien

Zunächst betrachten wir die erste Maxwellsche Gleichung $\oint_{\partial A} \vec{E} d\vec{s} = 0$ für eine rechteckförmige Fläche ΔA , welche die Grenzflächen der Medien 1 und 2 durchsetzt ($\rightarrow$ Abb. 2.19). $\vec{n}$ sei der Normalenvektor senkrecht zur Grenzfläche, von Medium 2 nach Medium 1 weisend.

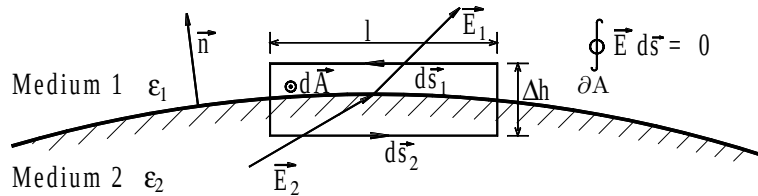


Abbildung 2.19: Grenzfläche zweier Medien.

Nun lassen wir Δh so gegen Null gehen, daß das Integrationsgebiet auf die Grenzfläche zusammengezogen wird, und erhalten für das Integral $\oint \vec{E} d\vec{s}$ folgendes:

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \oint_{\partial A} \vec{E} d\vec{s} = \int_{\Delta s} \vec{E} d\vec{s}_1 + \int_{\Delta s} \vec{E} d\vec{s}_2 = \int_{\Delta s} (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) d\vec{s} \quad (2.24)$$

mit $d\vec{s} = d\vec{s}_1 = -d\vec{s}_2$. $d\vec{s}$ liegt tangential zur Grenzfläche. Die beiden gegen Null gehenden Rechteckseiten liefern keinen Betrag.

Seien E_{t_1} und E_{t_2} die zur Grenzfläche tangentialen elektrischen Feldkomponenten. Dann ergibt sich aus (2.24):

$$(E_{t_1} - E_{t_2}) l = 0$$

daraus folgt sofort

$$E_{t_1} = E_{t_2}$$

(2.25)

Die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke müssen also **stetig** sein.

Um die Randbedingung für die elektrische Flußdichte $\vec{D}$ zu ermitteln, betrachten wir nun einen kleinen Zylinder ΔV mit der Höhe Δh und Stirnfläche ΔA . Dieser Zylinder durchsetzt die Grenzfläche der beiden Medien ($\rightarrow$ Abb. 2.20).

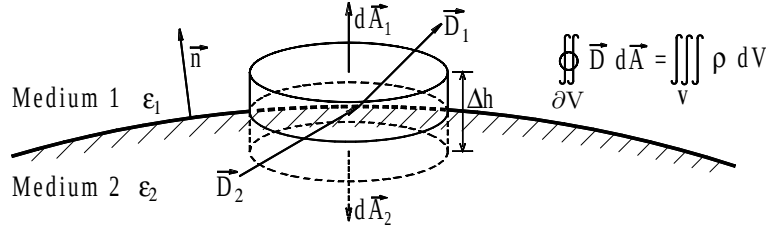


Abbildung 2.20: Grenzfläche zweier Medien.

Erneut lassen wir Δh so gegen Null gehen, daß das Integrationsgebiet auf die Grenzfläche zusammengezogen wird. Dann erhalten wir aus der linken Seite der dritten Maxwell'schen Gleichung:

$$\oint_{\partial V} \vec{D} d\vec{A} = \iiint_V \varrho dV:$$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \oint_{\partial V} \vec{D} d\vec{A} &= \iint_{\Delta A} (\vec{D} d\vec{A}_1 + \vec{D} d\vec{A}_2) \\ &= (D_{n_1} - D_{n_2}) \Delta A \end{aligned} \quad (2.26)$$

mit den Normalkomponenten D_{n_1} und D_{n_2} von $\vec{D}$. Die Mantelfläche liefert keinen Beitrag.

Die rechte Seite der dritten Maxwell'schen Gleichung strebt für endliche Ladungsdichten ϱ gegen Null:

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \iiint_V \varrho dV = 0. \quad (2.27)$$

Falls die Grenzfläche eine Oberflächenladungsdichte ϱ_F trägt, ergibt sich

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \iiint_V \varrho dV = q_F. \quad (2.28)$$

Daher folgt aus (2.26) und (2.27):

1. Trägt die Grenzfläche zweier Medien **keine** Oberflächenladungsdichte, so gehen die Normalkomponenten von $\vec{D}$ stetig durch die Grenzfläche:

$$D_{n_1} = D_{n_2} \quad \text{für } q_F = 0 \quad (2.29)$$

2. Trägt die Grenzfläche zweier Medien eine Oberflächenladungsdichte q_F , so springt die Normalkomponente der elektrischen Flußdichte $\vec{D}$ an der Grenzfläche:

$$D_{n_1} - D_{n_2} = q_F \quad (2.30)$$

Die Randbedingungen für $\vec{D}$ und $\vec{E}$ führen dazu, daß elektrische Kraftlinien beim Eintritt in ein anderes Medium bzw. beim Durchgang durch eine Flächenladung geknickt („gebrochen“) werden (vgl. Optik).

Für den Fall ohne Oberflächenladung wollen wir nun das Brechungsgesetz der Elektrostatik herleiten. Unter Benutzung der Materialgleichungen $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ ist Gl. (2.25) äquivalent zu

$$\frac{D_1}{\varepsilon_1} \sin \alpha_1 = \frac{D_2}{\varepsilon_2} \sin \alpha_2 \quad (2.31)$$

mit den Bezeichnungen gemäß Gl. (2.29) kann auch geschrieben werden als

$$D_1 \cos \alpha_1 = D_2 \cos \alpha_2. \quad (2.32)$$

Durch Division von (2.31) durch (2.32) ergibt sich schließlich für den Fall einer **ladungsfreien Grenzfläche**:

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

(2.33)

Dies ist das **Brechungsgesetz der Elektrostatik**. Es besagt, daß die Feldlinien im dichteren Medium von der Normalenrichtung weg gebrochen werden ($\rightarrow$ Abb. 2.21).

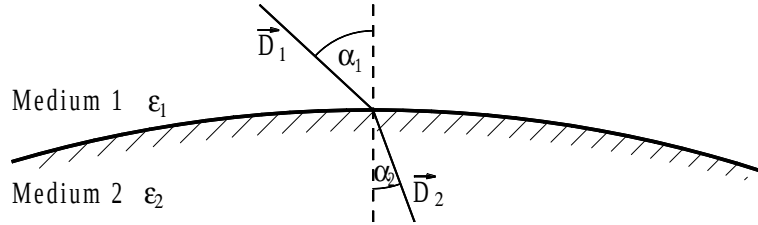


Abbildung 2.21: Brechungsgesetz der Elektrostatik.

Wenn $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_2$ ist, wird $D_{t1} \gg D_{t2}$, d. h. aus Stoffen mit großer Dielektrizitätskonstante ε treten die Feldlinien nahezu senkrecht aus.

2.1.5.1 Beispiel: Plattenkondensator mit geschichtetem Dielektrikum

Ein Plattenkondensator mit geschichtetem Dielektrikum kann als Reihenschaltung der einzelnen Schichtkondensatoren aufgefaßt werden ($\rightarrow$ Abb. 2.22).

Gegeben sei die Spannung U zwischen den beiden Platten. Gesucht sind das Potential und die Feldstärke in den beiden Schichten (A) und (B).

Die Lösung des Randwertproblems ist eindeutig. Eine Lösung der allgemeinen Potentialgleichung, die die Randbedingungen erfüllt, ist daher zugleich die einzige Lösung des Problems.

In beiden Raumteilen gilt $\varrho = 0$ und $\varepsilon = \text{const.}$, d. h. es gilt die Laplace-Gleichung $\Delta\varphi = 0$. Die beiden Platten sind Äquipotentialflächen, d. h. die elektrischen Feldlinien stehen senkrecht auf

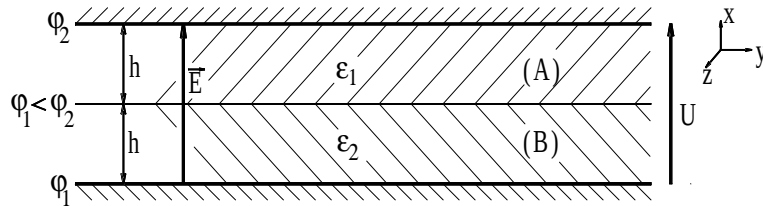


Abbildung 2.22: Plattenkondensator mit geschichtetem Dielektrikum.

ihnen und dort gilt $\frac{\partial \varphi}{\partial y} \equiv 0$ sowie $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \equiv 0$. Damit folgt

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$$

und wir erhalten für die beiden Raumanteile

$$\varphi^{(A)}(x) = a + bx \implies E_x^{(A)} = -b \quad (2.34)$$

$$\varphi^{(B)}(x) = c + dx \implies E_x^{(B)} = -d \quad (2.35)$$

Aus $U = \int_{-h}^h E_x dx$ und der Stetigkeit der Spannung an der Grenzschicht der beiden Medien 1 und 2 folgt

$$U = -bh - dh. \quad (2.36)$$

Da die tangentialen elektrischen Felder in der Grenzschicht verschwinden, können wir lediglich auf die Stetigkeitsbedingungen für die Normalkomponente der elektrischen Flußdichte zurückgreifen. Daraus erhalten wir

$$-\varepsilon_1 b = -\varepsilon_2 d \quad (2.37)$$

Aus den Gleichungen (2.36) und (2.37) folgt dann

$$d = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{U}{h} \quad (2.38)$$

$$b = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{U}{h} \quad (2.39)$$

Damit ergibt sich für das Potential

$$\begin{aligned} \varphi^{(A)}(x) &= a - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{U}{h} x \\ \varphi^{(B)}(x) &= c - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{U}{h} x \end{aligned}$$

(2.40)

Die Konstanten a und c müssen noch gemäß den Randbedingungen mit den Randwerten φ_1 und φ_2 bestimmt werden.

2.1.5.2 Beispiel: Punktladung vor dielektrischem Halbraum

Zur Bestimmung des Potentials und des elektrischen Feldes müssen wir eine Fallunterscheidung für $x < 0$ und $x > 0$ treffen ($\rightarrow$ Abb. 2.23)

1. $x > 0$:

Wir füllen zunächst den gesamten Raum mit Medium 1, d. h. ε_1 ($\rightarrow$ Abb. 2.24).

Da wir das Feld nur für $x > 0$ berechnen wollen, können wir eine Spiegelladung αQ_1 an der Stelle $x = -a$ annehmen. Wir erhalten damit

$$\varphi^{(1)}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1} \left\{ \frac{\alpha Q_1}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{Q_1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} \right\} \quad (2.41)$$

mit einer bislang noch unbekannten Konstante α . Nun betrachten wir den zweiten Fall:

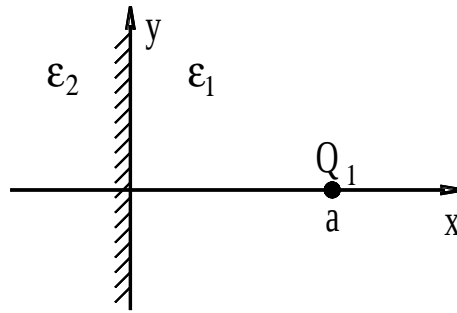


Abbildung 2.23: Punktladung vor dielektrischem Halbraum.

2. $x < 0$:

Erneut füllen wir den Raum homogen – nun allerdings mit Medium 2, d. h. ε_2 ($\rightarrow$ Abb. 2.25). Die Stelle $x = -a$ liegt nun im untersuchten Gebiet, so daß wir dort keine Spiegelladung anbringen können. Wir können aber die Ladung Q_1 mit einem Faktor β wichten und erhalten dann

$$\varphi^{(2)}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2} \frac{\beta Q_1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} \quad (2.42)$$

Nun verwenden wir die Stetigkeitsbedingungen bei $x = 0$:

$$\begin{aligned} E_y^{(1)} &= E_y^{(2)} \\ D_x^{(1)} &= D_x^{(2)} \end{aligned}$$

und können damit die unbekannten Faktoren α und β bestimmen:

$$\alpha = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \quad (2.43)$$

Das Potential in den beiden Raumteilen ergibt sich durch Einsetzen von (2.43) in (2.41) bzw. (2.42). Das elektrische Feld ergibt sich dann jeweils durch Gradientenbildung.

Bemerkung: Die beiden Sonderfälle $\varepsilon_2 \rightarrow \infty$ (entsprechend einer Punktladung vor einer leitenden Ebene) und $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ sind in der Lösung enthalten.

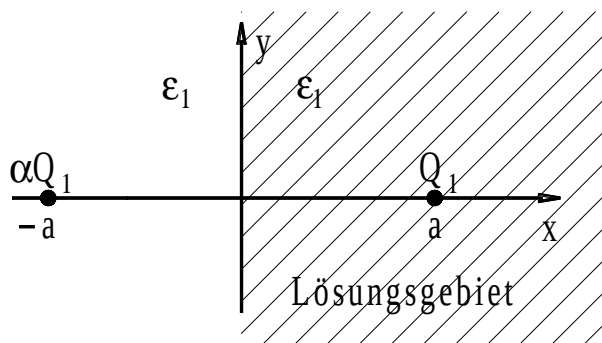


Abbildung 2.24: Gesamter Raum mit Medium 1 gefüllt.

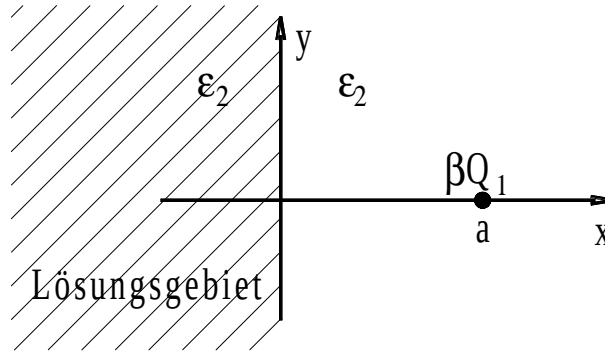


Abbildung 2.25: Gesamter Raum mit Medium 2 gefüllt.

2.2 Formale Lösungsmethoden

Auch wenn wir bisher bereits einige Problemstellungen aus der Elektrostatik als Beispiele durchgerechnet haben, so ist zu beachten, daß diese Beispiele spezielle Symmetrien aufwiesen oder anderweitig einfache plausible Ansätze ermöglichten. Im allgemeinen müssen wir jedoch formale Methoden mit allgemeiner Anwendbarkeit benutzen und häufig sogar auf numerische Methoden zurückgreifen.

Eine wichtige analytische Lösungsmethode ist die Methode der **Variablenseparation**. Der erste Schritt zur Anwendung dieser Methode liegt in der Wahl eines Koordinatensystems, das eine möglichst einfache Formulierung der Randbedingungen erlaubt. Deshalb erfolgt nun ein Einschub über orthogonale krummlinige Koordinaten und die entsprechende Vektoranalysis.

2.2.1 Orthogonale krummlinige Koordinaten

Bereits bei unseren einfachen Beispielen haben wir häufig andere Koordinatensysteme, als das kartesische Koordinatensystem benutzt, um vorhandene Symmetrien ausnutzen zu können.

Wir gehen von den kartesischen Koordinaten (x, y, z) aus. Nun machen wir den Ansatz, daß diese im Punkt P als Funktion von Koordinaten (u, v, w) gegeben seien:

$$\begin{aligned} x &= x(u, v, w) \\ y &= y(u, v, w) \\ z &= z(u, v, w) \end{aligned} \quad (2.44)$$

(2.44) lasse sich nach (u, v, w) auflösen:

$$\begin{aligned} u &= u(x, y, z) \\ v &= v(x, y, z) \\ w &= w(x, y, z) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Die dem Punkt P somit eindeutig zugeordneten Koordinaten (u, v, w) heißen **krummlinige Koordinaten**. Gl. (2.44) bzw. (2.45) definieren eine **Koordinatentransformation**.

Halten wir nun gleichzeitig die Werte von u und v fest, so werden zwei Flächen $u(x, y, z) = c_1$ und $v(x, y, z) = c_2$ definiert. Die Schnittkurve beider Flächen ist durch die beiden gleichzeitig zu erfüllenden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z) &= c_1 \\ v(x, y, z) &= c_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.46)$$

definiert. Auf ihr ist nur noch w veränderlich.

Wird nun auch noch w auf der Schnittkurve festgehalten, so ist damit der Punkt

$$u(x, y, z) = c_1 \quad (2.47)$$

$$v(x, y, z) = c_2 \quad (2.48)$$

$$w(x, y, z) = c_3 \quad (2.49)$$

gegeben, den wir als Ursprung eines lokalen Koordinatensystems betrachten können.

Die durch (2.47) - (2.49) gegebenen Flächen heißen **Koordinatenflächen**. Schneiden sich ihren Tangenten unter einem rechten Winkel, so heißt das krummlinige Koordinatensystem **orthogonal** ($\rightarrow$ Abb. 2.26).

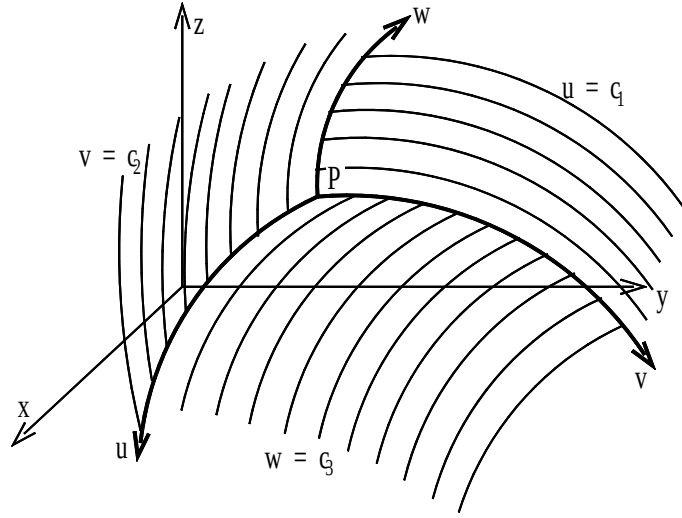


Abbildung 2.26: Beispiel für ein krummliniges Koordinatensystem.

Bekannte Beispiele für Koordinatensysteme sind die kartesischen Koordinaten, die Zylinderkoordinaten und die Kugelkoordinaten.

Neben der Koordinatentransformation benötigen wir eine **Metrik** für unser krummliniges Koordinatensystem. Dazu betrachten wir ein hinreichend kleines Wegelement Δs_u ($\rightarrow$ Abb. 2.27).

Wegen der Kleinheit von Δs_u können wir es durch die Strecke zwischen P und Q annähern:

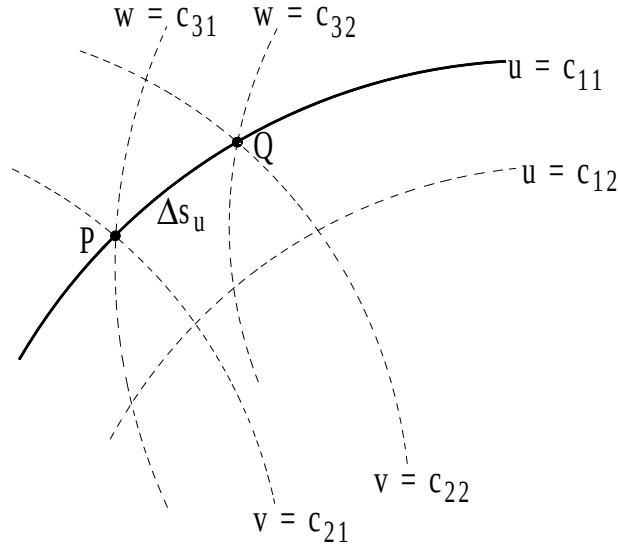
$$\begin{aligned} (\Delta s_u)^2 &\approx (x(u + \Delta u, v, w) - x(u, v, w))^2 \\ &\quad + (y(u + \Delta u, v, w) - y(u, v, w))^2 \\ &\quad + (z(u + \Delta u, v, w) - z(u, v, w))^2 \end{aligned}$$

Nun bilden wir die partiellen Ableitungen von x , y und z bzgl. u

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{x(u + \Delta u, v, w) - x(u, v, w)}{\Delta u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{y(u + \Delta u, v, w) - y(u, v, w)}{\Delta u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{z(u + \Delta u, v, w) - z(u, v, w)}{\Delta u} \end{aligned}$$

und lassen Δu gegen Null gehen. Damit erhalten wir für den Anteil des Wegelementes $d\vec{s}$ in u -Richtung

$$ds_u = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2} du = h_u du \quad (2.50)$$

Abbildung 2.27: kleines Wegelement Δs_u im Koordinatensystem.

Für die anderen Komponenten folgt analog

$$ds_v = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2} dv = h_v dv \quad (2.51)$$

$$ds_w = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2} dw = h_w dw \quad (2.52)$$

Die Größen h_u , h_v und h_w heißen **Metrikoeffizienten**. Mit ihnen läßt sich das Wegelement $d\vec{s}$ im krummlinigen Koordinatensystem (u, v, w) folgendermaßen ausdrücken:

$$\begin{aligned} d\vec{s} &= ds_u \vec{e}_u + ds_v \vec{e}_v + ds_w \vec{e}_w \\ &= h_u du \vec{e}_u + h_v dv \vec{e}_v + h_w dw \vec{e}_w \end{aligned} \quad (2.53)$$

2.2.2 Vektoranalysis für orthogonale krummlinige Koordinaten

2.2.2.1 Gradient

Mit der Definition für den **Gradienten** einer skalaren Funktion $\varphi(u, v, w)$

$$d\varphi = \text{grad}\varphi d\vec{s} \quad (2.54)$$

und dem Wegelement $d\vec{s}$ gemäß (2.53) schreibt sich $d\varphi$ als

$$d\varphi = (\text{grad}\varphi)_u h_u du + (\text{grad}\varphi)_v h_v dv + (\text{grad}\varphi)_w h_w dw \quad (2.55)$$

Durch Bildung des totalen Differentials von φ

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv + \frac{\partial \varphi}{\partial w} dw \quad (2.56)$$

und Vergleich von (2.55) mit (2.56) erhalten wir

$$\begin{aligned}(\text{grad}\varphi)_u &= \frac{1}{h_u} \frac{\partial\varphi}{\partial u} \\(\text{grad}\varphi)_v &= \frac{1}{h_v} \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\(\text{grad}\varphi)_w &= \frac{1}{h_w} \frac{\partial\varphi}{\partial w}\end{aligned}$$

und damit

$$\text{grad}\varphi = \frac{1}{h_u} \frac{\partial\varphi}{\partial u} \vec{e}_u + \frac{1}{h_v} \frac{\partial\varphi}{\partial v} \vec{e}_v + \frac{1}{h_w} \frac{\partial\varphi}{\partial w} \vec{e}_w \quad (2.57)$$

2.2.2.2 Divergenz

Die **Divergenz** ist bekanntlich definiert als Grenzwert eines Oberflächenintegrals:

$$\text{div}\vec{D} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\partial V} \vec{D} d\vec{A} \quad (2.58)$$

Wir erhalten also die Divergenz indem wir die Komponenten von $\vec{D}$ in Richtung der äußeren Normalen über die geschlossene Oberfläche ∂V des Volumenelements ΔV integrieren, durch ΔV dividieren und schließlich den Grenzübergang $\Delta V \rightarrow 0$ ausführen. Dazu betrachten wir das im Bild 2.28 dargestellte Volumenelement ΔV in den Koordinaten u, v und w . Analog zur Herleitung für kartesische Koordinaten schreiben wir für den elektrischen Fluß

$$\begin{aligned}\oint_{\partial V} \vec{D} d\vec{A} &\approx D_u(u+du, v, w) \underbrace{h_v dv h_w dw}_{dA_u} - D_u(u, v, w) \underbrace{h_v dv h_w dw}_{dA_u} \\&+ D_v(u, v+dv, w) \underbrace{h_u du h_w dw}_{dA_v} - D_v(u, v, w) \underbrace{h_u du h_w dw}_{dA_v} \\&+ D_w(u, v, w+dw) \underbrace{h_u du h_v dv}_{dA_w} - D_w(u, v, w) \underbrace{h_u du h_v dv}_{dA_w}\end{aligned} \quad (2.59)$$

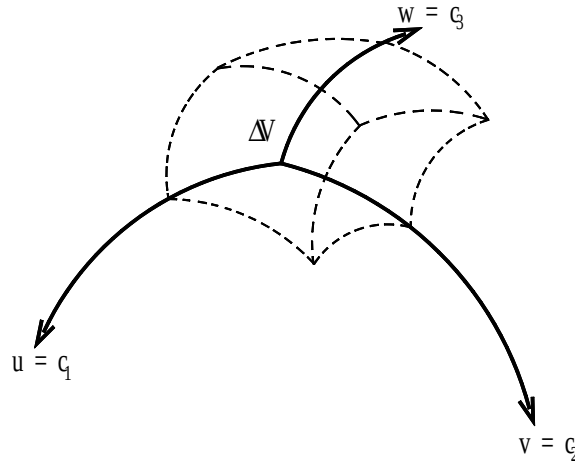


Abbildung 2.28: Volumenelement in den Koordinaten u, v, w .

Nun bilden wir Differentialquotienten der Form

$$\frac{\partial}{\partial u}(D_u h_v h_w dv dw) du, \quad \frac{\partial}{\partial v}(D_v h_u h_w du dw) dv, \quad \frac{\partial}{\partial w}(D_w h_u h_v du dv) dw$$

und dividieren durch das Volumenelement dV .

$$\frac{1}{dV} \oint_{\partial V} \vec{D} d\vec{A} = \frac{1}{dV} \left[\frac{\partial}{\partial u}(D_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(D_v h_u h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(D_w h_u h_v) \right] du dv dw \quad (2.60)$$

Durch den Vergleich von (2.58) mit (2.60) erhalten wir mit $dV = h_u du h_v dv h_w dw$ für die Divergenz von $\vec{D}$:

$$\text{div} \vec{D} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[\frac{\partial}{\partial u}(D_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(D_v h_u h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(D_w h_u h_v) \right] \quad (2.61)$$

2.2.2.3 Laplace-Operator

Der **Laplace-Operator** kann wegen $\Delta\varphi = \text{div grad}\varphi$ aus (2.57) und (2.61) gewonnen werden:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_v h_w}{h_u} \frac{\partial\varphi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_u h_w}{h_v} \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{h_u h_v}{h_w} \frac{\partial\varphi}{\partial w} \right) \right] \quad (2.62)$$

2.2.2.4 Rotation

Zur Berechnung der **Rotation** des Vektorfeldes $\vec{E}(u, v, w)$ gehen wir von der Definition

$$\vec{n} \cdot \text{rot} \vec{E} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta A} \oint_{\partial A} \vec{E} d\vec{s} \quad (2.63)$$

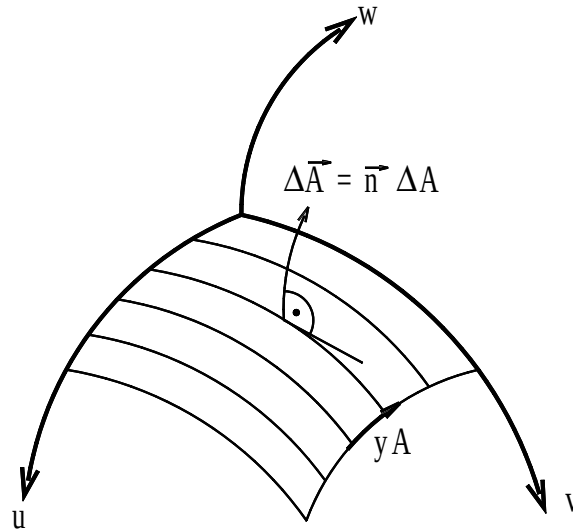
und der Regel für den Zusammenhang zwischen Richtung der Rotation und Umlaufsinn des Linienintegrals aus ($\rightarrow$ Abb. 2.29). Die Komponenten von $\text{rot} \vec{E}$ in Richtung der Flächennormalen $\vec{n}$ ergeben sich, indem wir das Linienintegral längs des Randes ∂A der Fläche ΔA über die Komponenten von $\vec{E}$ in Richtung des Linienelements $d\vec{s}$ bilden, durch ΔA dividieren und schließlich den Grenzübergang $\Delta A \rightarrow 0$ ausführen.

In unserem Fall zeigt der Normalenvektor $\vec{n}$ in $\vec{e}_w$ -Richtung, so daß wir für das Skalarprodukt in (2.63) nur die v -Komponente von $\text{rot} \vec{E}$ brauchen. Damit ergibt sich für das Umlaufintegral

$$\begin{aligned} \overbrace{(h_u du)(h_w dw)}^{dA} (\text{rot} \vec{E})_v &= E_u(u, v, w + dw) h_u(u, v, w + dw) du \\ &\quad - E_u(u, v, w) h_u(u, v, w) du \\ &\quad - E_w(u + du, v, w) h_w(u + du, v, w) dw \\ &\quad + E_w(u, v, w) h_w(u, v, w) dw \end{aligned} \quad (2.64)$$

Die Bildung der Differentialquotienten und anschließende Division durch $dA = ds_u ds_w$ liefert für die v -Komponente von $\text{rot} \vec{E}$:

$$(\text{rot} \vec{E})_v = \frac{1}{h_u h_w} \left(\frac{\partial(E_u h_u)}{\partial w} - \frac{\partial(E_w h_w)}{\partial u} \right). \quad (2.65)$$

Abbildung 2.29: Flächennormalenvektor $\vec{n}$.

Durch zyklisches Vertauschen der Indizes erhalten wir die beiden anderen Komponenten von $\text{rot}\vec{E}$. Wir können $\text{rot}\vec{E}$ dann auch als formale Merkregel in Form einer Determinante zusammenfassen:

$$\text{rot}\vec{E} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} \vec{e}_u & \vec{e}_v & \vec{e}_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_u E_u & h_v E_v & h_w E_w \end{vmatrix} \quad (2.66)$$

2.2.3 Einige wichtige Koordinatensysteme

Für die Koordinatensysteme, die wir im weiteren Verlauf der Vorlesung benutzen werden, sollen im folgenden die sich aus dem vorigen Abschnitt ergebenden Beziehungen angegeben werden. Es handelt sich dabei um die kartesischen Koordinaten, Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten.

2.2.3.1 Kartesische Koordinaten

Für kartesische Koordinaten sind die Metrikkoeffizienten natürlich sämtlich identisch zu Eins: $h_u = h_v = h_w = 1$ und wir erhalten die uns bereits bekannten Ausdrücke

$$\begin{aligned} \text{grad}\varphi &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) \\ \text{div}\vec{D} &= \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \\ \Delta\varphi &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \\ \text{rot}\vec{E} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.2.3.2 Zylinderkoordinaten

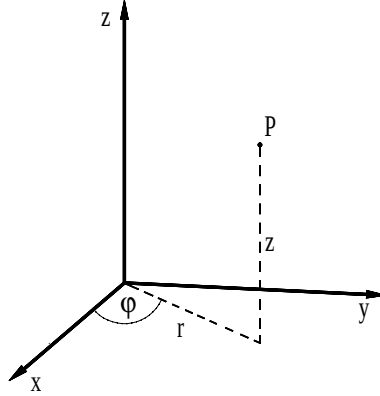


Abbildung 2.30: Zylinderkoordinaten.

Hier gilt:

$$\left. \begin{aligned} u &= r \\ v &= \varphi \\ w &= z \end{aligned} \right\} \quad (2.67) \qquad \left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad (2.68)$$

Daraus ergibt sich mit den Gleichungen (2.50) und (2.52) $\rightarrow$ Abb. 2.30

$$\begin{aligned} h_r &= \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1 \\ h_\varphi &= \sqrt{r^2 \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \varphi} = r \\ h_z &= 1 \end{aligned} \quad (2.69)$$

Für die Differentialvorschriften von grad, div und rot sowie den Δ -Operator erhalten wir:

$$\text{grad} \Phi = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \Phi \quad (2.70)$$

$$= \frac{\partial \Phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\text{div} \vec{D} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r D_r + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \quad (2.71)$$

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \quad (2.72)$$

$$\text{rot} \vec{E} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\varphi + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r E_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z \quad (2.73)$$

Beachte: Der Winkel φ sollte nicht mit dem Potential φ verwechselt werden, das wir bisher auch mit φ bezeichnet haben. Wo Verwechslungen zu befürchten sind, werden wir daher das Potential jeweils durch ein anderes Symbol, hier das Φ , kennzeichnen.

2.2.3.3 Kugelkoordinaten

Hier gilt:

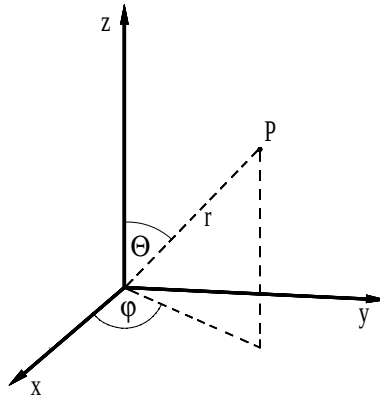


Abbildung 2.31: Kugelkoordinaten.

$$\left. \begin{aligned} u &= r \\ v &= \theta \\ w &= \varphi \end{aligned} \right\} \quad (2.74) \qquad \left. \begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (2.75)$$

Für die Metrikkoeffizienten ergibt sich

$$\begin{aligned} h_r &= \sqrt{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta} = 1 \\ h_\theta &= \sqrt{r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta} = r \\ h_\varphi &= \sqrt{r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi} = r \sin \theta \end{aligned} \quad (2.76)$$

Für die Differentialoperatoren ergibt sich

$$\text{grad} \Phi = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \Phi \quad (2.77)$$

$$\text{div} \vec{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 D_r + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin(\theta) D_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} D_\varphi \quad (2.78)$$

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \quad (2.79)$$

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (E_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial E_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r \\ &\quad + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) \right) \vec{e}_\theta \\ &\quad + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi \end{aligned} \quad (2.80)$$

2.2.4 Eigenschaften der Potentialgleichung (Potentialtheorie)

Die formale Behandlung der Elektrostatik beruht auf der Poisson- bzw. Laplace-Gleichung.

2.2.4.1 Randwertaufgaben der Potentialtheorie

In der Praxis interessieren nicht die allgemeinen Lösungen eines Feldproblems, sondern die elektromagnetischen Felder sollen für ein spezielles Teilgebiet des Raumes bestimmt werden. Die Felder müssen dann gegebene Randbedingungen erfüllen.

In der Potentialtheorie werden folgende Typen von Randwertaufgaben unterschieden, die sich jeweils auf ein beliebig geformtes Gebiet G und eine dort vorliegende beliebige Verteilung von Raumladungen $\varrho(\vec{r})$ beziehen:

- Die Aufgabe $\Delta\varphi = \varrho$ im Gebiet G und $\varphi = \varphi_1$ auf dem Rand ∂G wird als erste Randwertaufgabe oder **Dirichletsche Randwertaufgabe** bezeichnet. Dabei ist φ_1 eine auf dem Rand ∂G definierte Funktion von $\vec{r}$.
- Die Aufgabe $\Delta\varphi = \varrho$ im Gebiet G und $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \varphi_2$ auf dem Rand ∂G wird als zweite Randwertaufgabe oder **Neumannsche Randwertaufgabe** bezeichnet. Dabei ist φ_2 eine auf dem Rand ∂G definierte Funktion von $\vec{r}$. Für die Lösbarkeit dieser Aufgabe muß noch $\int_{\overline{G}} \varrho dV = \oint_{\partial G} \text{grad}\varphi_2 dA$ gefordert werden, wobei $\overline{G} = G \cup \partial G$ ist. Diese Bedingung ist eine unmittelbare Folgerung aus dem Gaußschen Integralsatz.
- Die Aufgabe $\Delta\varphi = \varrho$ im Gebiet G und $a\varphi + b\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \varphi_3$ auf dem Rand ∂G wird als dritte Randwertaufgabe oder Newtonsche bzw. **gemischte Randwertaufgabe** bezeichnet. Dabei sind a , b und φ_3 auf dem Rand ∂G definierte Funktionen von $\vec{r}$. Die Funktionen a und b haben disjunkte Träger, deren Vereinigung gerade ∂G ergibt, d. h. auf einem Teil des Randes ist φ vorgegeben und auf dem anderen $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$.

Das Lösungsgebiet G kann durch beliebig viele Oberflächen in beliebig komplizierter Weise begrenzt sein. Sämtliche Randbedingungen sind zunächst einmal physikalisch begründet. Die Neumannsche Randbedingung kann aber auch als Symmetriebedingung bei einem symmetrischen Gebiet verwendet werden und damit auch geometrische Gründe haben. Geometrische Gründe hat die **periodische Randbedingung**, die für Gebiete mit Periodizität in einer oder mehreren Koordinatenrichtungen benutzt werden kann.

Diese Randwertaufgaben sind unter gewissen Nebenbedingungen (z. B. an den Rand ∂G des Gebietes G) alle eindeutig lösbar. Zum Beweis der Eindeutigkeit werden die **Greenschen Integralsätze** benötigt.

2.2.4.2 Die Greenschen Integralsätze

Ausgangspunkt ist der Gaußsche Integralsatz

$$\iiint_V \text{div}\vec{A}(\vec{r}) dV = \oint_{\partial V} \vec{A}(\vec{r}) d\vec{A}$$

(Das Volumenintegral über die Divergenz eines Vektorfeldes ist gleich dem Fluß durch die geschlossene Oberfläche des Volumens).

Nun setzen wir $\vec{A}(\vec{r}) = \psi(\vec{r})\text{grad}\varphi(\vec{r})$ mit beliebigen skalaren Funktionen ψ und φ . Das Einsetzen ergibt

$$\iiint_V \text{div}(\psi\text{grad}\varphi) dV = \iiint_V (\psi\text{divgrad}\varphi + \text{grad}\psi \text{grad}\varphi) dV \quad (2.81)$$

$$\stackrel{\text{Gauß}}{=} \oint_{\partial V} \psi\text{grad}\varphi d\vec{A}$$

$$\iiint_V \text{div}(\varphi\text{grad}\psi) dV = \iiint_V (\varphi\text{divgrad}\psi + \text{grad}\varphi \text{grad}\psi) dV \quad (2.82)$$

$$\stackrel{\text{Gauß}}{=} \oint_{\partial V} \varphi\text{grad}\psi d\vec{A}$$

Nun werden verschiedene vektoranalytische Beziehungen ausgenutzt:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \operatorname{grad} \psi &= \Delta \psi \quad \text{analog für } \varphi \\ \operatorname{grad} \psi \cdot d\vec{A} &= \operatorname{grad} \psi \cdot \vec{n} dA = (\operatorname{grad} \psi)_n dA = \frac{\partial \psi}{\partial n} dA \quad \text{analog für } \varphi\end{aligned}$$

und (2.81), (2.82) voneinander subtrahiert. Es ergibt sich einer der Greenschen Integralsätze:

$$\boxed{\iiint_V (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi) dV = \oiint_{\partial V} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dA} \quad (2.83)$$

Durch setzen von $\psi = \varphi$ in (2.81) oder (2.82) ergibt sich ein anderer Greenscher Integralsatz:

$$\boxed{\iiint_V (\varphi \Delta \varphi - (\operatorname{grad} \varphi)^2) dV = \oiint_{\partial V} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dA} \quad (2.84)$$

Falls ψ und φ nur von zwei oder sogar nur einer Variablen abhängen, vereinfachen sich die Gleichungen entsprechend (siehe [Lehner]) und es wird offensichtlich, daß die Greenschen Integralsätze nichts anderes als Verallgemeinerungen der partiellen Integration auf zwei bzw. drei Variablen sind.

2.2.4.3 Der Eindeutigkeitsbeweis

Wir nehmen an, es gäbe zwei Lösungen φ_A und φ_B für unsere RWA, d. h. es gelte

$$\Delta \varphi_A(\vec{r}) = -\frac{\varrho(\vec{r})}{\varepsilon} \quad \text{sowie} \quad \Delta \varphi_B(\vec{r}) = -\frac{\varrho(\vec{r})}{\varepsilon}$$

und die RB seien erfüllt. Wir definieren die Differenzfunktion

$$\tilde{\varphi} = \varphi_A - \varphi_B.$$

Für diese gilt

$$\Delta \tilde{\varphi} = \Delta \varphi_A - \Delta \varphi_B = 0,$$

d.h. $\tilde{\varphi}$ genügt der Laplace-Gleichung. Weiterhin ist je nach RWA

$$\tilde{\varphi} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } \partial G \text{ (bzw. Teilen bei der gemischten RWA)}$$

Nun wenden wir den Greenschen Integralsatz (2.84) auf $\tilde{\varphi}$ an und erhalten

$$\iiint_V (\operatorname{grad} \tilde{\varphi})^2 dV = 0.$$

Da $(\operatorname{grad} \tilde{\varphi})^2$ stets nichtnegativ ist, ist dies jedoch nur möglich, wenn überall

$$\operatorname{grad} \tilde{\varphi} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\varphi} = \text{const.}$$

gilt. Auf Grund der Randbedingungen muß daher überall $\tilde{\varphi} = 0$ gelten im Dirichletschen und im gemischten Fall. Im Neumannschen Fall ist $\tilde{\varphi}$ bis auf eine frei wählbare, physikalisch jedoch unwesentliche Konstante bestimmt. Der Eindeutigkeitsbeweis für den Fall eines im Feld befindlichen Leiters findet sich in [Lehner].

Beide Eindeutigkeitsbeweise laufen formal gesehen auf die aus dem Greenschen Integralsatz (2.84) folgende Aussage hinaus, daß mit $\Delta \varphi = 0$ in G und $\varphi = 0$ auf ∂G φ überall in G 0 sein muß. Dies ist auch leicht zu veranschaulichen, denn:

Die skalare Funktion φ kann in einem Gebiet G , in dem $\Delta\varphi = 0$ gilt, weder ein Minimum noch ein Maximum haben.

Gäbe es nämlich ein Extremum von φ an einem Ort P in G , so müßten in seiner Umgebung alle Linien $\text{grad}\varphi$ zu ihm hin- bzw. wegzeigen. Eine das Extremum umgebene kleine Fläche wäre dann von einem nicht verschwindenden elektrischen Fluß durchdrungen. Das wäre jedoch nur möglich, wenn dort eine Raumladung vorhanden und somit $\Delta\varphi \neq 0$ wäre, womit ein Widerspruch vorläge. Ist nun am ∂G $\varphi = 0$, so kann φ im Innern von G nirgends größer oder kleiner sein, d. h. überall muß $\varphi = 0$ sein. Anders formuliert:

Ist in einem Gebiet $\Delta\varphi = 0$, so kann die Funktion φ ihre maximalen und minimalen Werte nur am Rand des Gebietes annehmen.

Die Eindeutigkeit der Lösung des Dirichlet-Problems ist eine unmittelbare Folge dieses Satzes.

2.2.4.4 Anmerkung zur Rolle von Poisson- und Laplace-Gleichung in den Naturwissenschaften

Poisson- und Laplace-Gleichungen kommen sehr häufig in den Naturwissenschaften vor, da sie die geeignete Beschreibung für viele verschiedene Probleme sind. Dies bedeutet aber auch, daß viele Probleme der Naturwissenschaften eine Analogie mit der Elektrostatik aufweisen. Ein Beispiel hierfür sind stationäre Temperaturprobleme. Ein anderes, klassisches Beispiel aus der Physik ist die (als klein vorausgesetzte) Auslenkung einer auf einen Rahmen gespannten Membran. Diese wird durch die zweidimensionale Laplace-Gleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}\right)\varphi = 0$$

und fest vorgegebenem φ auf dem Rand beschrieben.

2.2.4.5 Die Diracsche δ -Funktion

Die δ -Funktion ist keine Funktion im üblichen Sinne, sondern eine **Distribution** (auch uneigentliche Funktion; allgemeinere Klasse). Sie ist in vielen Fällen Hilfsmittel und soll daher hier eingeführt werden.

Wir können uns die Delta-Funktion als **Grenzwert einer Folge von Funktionen** vorstellen. Dies ist auf verschiedene Weise möglich, z. B. als Grenzwert einer Folge von Gauß-Funktionen. In diesem Fall ist ($\rightarrow$ Abb. 2.32)

$$f_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-x')^2}{a^2}\right\}.$$

Wobei

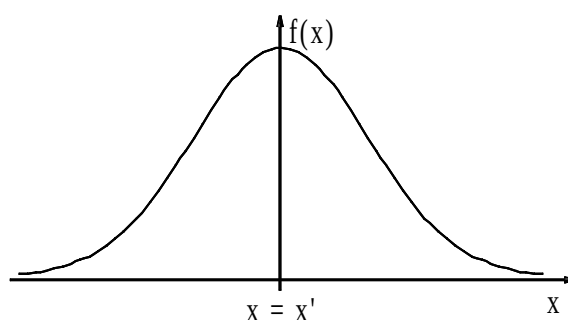
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(x) dx = 1$$

und

$$\delta(x-x') = \lim_{a \rightarrow 0} f_a(x).$$

Anschaulich wird die δ -Funktion üblicherweise so beschrieben, daß sie überall außer für das Argument 0 verschwindet und dort aber so stark unendlich wird, daß ihr Integral gerade 1 wird.

$$\delta(x-x') = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq x' \\ \infty & \text{für } x = x' \end{cases} \quad (2.85)$$

Abbildung 2.32: Ausgangsfunktion für Herleitung der δ -Funktion.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x') dx = 1 \quad (2.86)$$

Die δ -Funktion ist eine **Idealisierung**, aber wie gesagt sehr nützlich. Sie ist das formale Analogon zur (ebenfalls idealisierten) Punktladung: Wir beschreiben die Punktladung formal durch eine Ladungsdichte ϱ , die überall außer am Ort der Punktladung verschwindet und dort unendlich ist. Hierzu müssen wir allerdings die ursprünglich eindimensionale δ -Funktion verallgemeinern:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z') \quad (2.87)$$

Für die Punktladung Q am Ort $\vec{r}$ schreiben wir dann

$$\varrho(\vec{r}) = Q \delta(\vec{r} - \vec{r}').$$

Die Integration über den gesamten Raum ergibt, wie erforderlich,

$$\iiint_V \varrho(\vec{r}) dV = Q.$$

Allgemein gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x') dx = f(x'). \quad (2.88)$$

und folglich

$$\iiint_V f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV = f(\vec{r}'). \quad (2.89)$$

Die δ -Funktion ist symmetrisch:

$$\delta(x - x') = \delta(-[x - x']) = \delta(x' - x) \quad (2.90)$$

Sie ist differenzierbar und integrierbar. Ihr Integral ist die **Heavisidesche Sprungfunktion**:

$$H(x - x') = \begin{cases} 0 & \text{für } x < x' \\ 1 & \text{für } x > x' \end{cases} \quad (2.91)$$

Umgekehrt ergibt die Ableitung der Heaviside-Funktion gerade wieder die δ -Funktion.

Die δ -Funktion besitzt als Dimension die des Kehrwertes ihres Argumentes, d. h. z. B. die von x^{-1} oder x^{-3} .

2.2.4.6 Punktladung und δ -Funktion

Für die Raumlading im freien Raum gilt die Poisson-Gleichung

$$\Delta\varphi = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

mit der Lösung

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Nach Einsetzen und Kürzen ergibt sich

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (2.92)$$

Durch den Gebrauch der δ -Funktion brauchen wir nun den Ort der Punktladung selbst nicht mehr auszuschließen, da wir durch diese Schreibweise nun dort keine Singularität mehr vorliegen haben, sondern eine differenzierbare Funktion.

Durch die δ -Funktion läßt sich auch die Richtigkeit der Überlagerung

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \frac{\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

für eine beliebige Ladungsverteilung $\varrho(\vec{r})$ formal beweisen (siehe z. B. [Lehner]).

2.2.4.7 Das Potential in einem begrenzten Gebiet

Nun betrachten wir ein endliches Gebiet im Raum und die sich in ihm befindlichen Ladungen. Setzen wir im Greenschen Satz (2.83) $\psi = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ und wählen φ als Lösung von $\Delta\varphi = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0}$, so ergibt sich unter der Annahme $\vec{r}'$ im Innern von V

$$\begin{aligned} \iiint_V \left(\frac{\Delta\varphi}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \varphi \Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV &= \oint_{\partial V} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dA \\ &= \iiint_V \left\{ -\frac{\varrho(\vec{r})}{\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} + \varphi(\vec{r}) 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}') \right\} dV \\ &= -\iiint_V \frac{\varrho(\vec{r})}{\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} dV + 4\pi\varphi(\vec{r}') \end{aligned}$$

Nach dem Vertauschen von $\vec{r}$ und $\vec{r}'$ und dem Umformen ergibt sich aus obigem und rechter Seite des Greenschen Satzes

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) = & \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'}_2 + \underbrace{\frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \frac{\frac{\partial \varphi(\vec{r}')}{\partial n'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dA'}_3 \\ & - \underbrace{\frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \varphi(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dA'}_4 \end{aligned} \quad (2.93)$$

Dieses Resultat wird als **Kirchhoffscher Satz** oder **Greensche Formel** bezeichnet.

Durch passend gewählte Doppelschicht und Oberflächenladungen können auf diese Weise alle Effekte möglicher äußerer Ladungen für den Innenraum des Gebietes ersetzt werden. Für den Außenraum ist das jedoch nicht der Fall, sondern es werden Unstetigkeiten verursacht, die in der Feldtheorie eine grundlegende Rolle spielen. [Lehner]

Obiger Ansatz ist sozusagen die Umkehrung der Idee, die bei der Spiegelungsmethode zu Grunde liegt, bei der Flächen mit Flächenladungen durch entsprechende Bildladungen ersetzt werden.

In der Gleichung (2.93) ist selbstverständlich zu beachten, daß φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ am Rand, also der Oberfläche des betrachteten Gebietes, nicht unabhängig voneinander sind. Die Werte von φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ am Rand müssen also miteinander verträglich sein.

Die Greensche Formel (2.93) kann zum Ausgangspunkt von Lösungsmethoden gemacht werden, wenn einer der beiden Oberflächenterme mit Hilfe passend gewählter Greenschener Funktionen eliminiert wird. (2.93) stellt eine wichtige Grundlage für analytische und numerische Methoden zur Lösung von Randwertproblemen dar, insbesondere für die Randelementemethode. Weitere Details finden sich in [Lehner].

2.2.5 Analytische Lösung der Potentialgleichung in kartesischen Koordinaten (Separationsansatz)

Bevor wir die Lösung der Potentialgleichung in Zylinder- und Kugelkoordinaten behandeln, beginnen wir mit dem einfachsten Fall „krummliniger“ orthogonaler Koordinaten, den kartesischen Koordinaten. Außerdem beschränken wir uns im Weiteren zunächst auf die homogene Potentialgleichung, also die Laplace-Gleichung. Diese lautet in kartesischen Koordinaten

$$\Delta \varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi = 0. \quad (2.94)$$

Bei der Methode der **Variablenseparation** zur Lösung einer partiellen Differentialgleichung wird versucht, die Lösungsfunktion als Produkt mehrerer Funktionen zu schreiben, die jeweils möglichst nur noch von einer der Koordinaten abhängen. Wir machen also folgenden **Produktansatz**

$$\varphi(x, y, z) = f(x)g(y)h(z) \quad (2.95)$$

Das Einsetzen in (2.94) liefert

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} gh + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} fh + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} fg = 0. \quad (2.96)$$

²Beitrag von den Ladungen im Volumen

³Beitrag von den Rändern → Potential einer Verteilung von Oberflächenladungen

⁴Beitrag von den Rändern → Potential einer Doppelschicht (zwei entgegengesetzt geladene Flächen → mit Dipolen belegte Fläche)

Indem (2.96) durch $\varphi = fgh$ dividiert wird, kann die triviale Lösung $\varphi \equiv 0$ ausgeschlossen werden und es ergibt sich

$$\frac{\Delta\varphi}{\varphi} = \frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{1}{h} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (2.97)$$

Die abzuleitenden Funktionen sind nur von der jeweiligen Variable abhängig, so daß wir die partiellen Ableitungen durch totale Ableitungen ersetzen können.

$$\frac{\Delta\varphi}{\varphi} = \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dy^2} + \frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dz^2} = 0 \quad (2.98)$$

Nun gibt es zwei prinzipielle Möglichkeiten, Gleichung (2.98) zu erfüllen:

1. Sämtliche zweiten Ableitungen verschwinden

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d^2 g}{dy^2} = \frac{d^2 h}{dz^2} = 0 \quad (2.99)$$

woraus sich nach doppelter Integration die Lösung

$$\varphi_1(x, y, z) = (a_x + b_x x)(a_y + b_y y)(a_z + b_z z) \quad (2.100)$$

ergibt.

2. Sämtliche Quotienten aus zweiter Ableitung und der Funktion sind konstant:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} &= K_x^2 \\ \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dy^2} &= K_y^2 \\ \frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dz^2} &= K_z^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.101)$$

Die Konstanten K_x, K_y, K_z werden als **Separationskonstanten** bezeichnet. Zwei der drei Konstanten sind willkürlich wählbar, während die dritte durch

$$K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = 0 \quad (2.102)$$

festgelegt ist. Die Beziehung (2.102) wird als **Separationsgleichung** bezeichnet. Wir können nun (2.101) umschreiben zu

$$\left. \begin{aligned} f''(x) &= K_x^2 f(x) \\ g''(y) &= K_y^2 g(y) \\ h''(z) &= -(K_x^2 + K_y^2) h(z) \end{aligned} \right\} \quad (2.103)$$

Diese gewöhnlichen Differentialgleichungen haben periodische und nichtperiodische **Elementarlösungen** der Art

$$\underbrace{\sin(K_t t), \cos(K_t t), e^{\pm j K_t t}}_{\text{periodisch}}, \underbrace{\sinh(K_z z), \cosh(K_z z), e^{\pm K_z z}}_{\text{nicht periodisch}} \quad \text{mit } t \in \{x, y, z\}$$

In jeder Koordinate kann nun eine Linearkombination von zwei dieser Funktionen mit gleichem Argument eingesetzt werden, um die Lösung φ der Laplace-Gleichung zu erhalten.

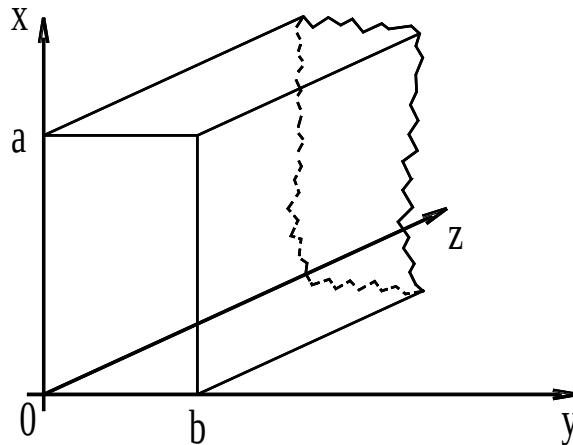


Abbildung 2.33: In z-Richtung unendlich ausgedehntes Rohr.

Die spezielle Auswahl der Funktionen erfolgt in Übereinstimmung mit den Randbedingungen des gestellten Problems. Eine Möglichkeit ist zum Beispiel:

$$\begin{aligned} \varphi_2(x, y, z) = & [a_x \cos(K_x x) + b_x \sin(K_x x)] \\ & \cdot [a_y \cos(K_y y) + b_y \sin(K_y y)] \\ & \cdot [a_z e^{K_z z} + b_z e^{-K_z z}] \end{aligned} \quad (2.104)$$

Da zwei der drei Konstanten willkürlich wählbar waren, handelt es sich um eine **spezielle Lösung**. Die **allgemeine Lösung** ist durch **Überlagerung** aller möglichen speziellen Lösungen erhältlich.

Bevor wir Beispiele betrachten, soll darauf hingewiesen werden, daß die Separationsmethode nicht allgemein, sondern nur für insgesamt 11 orthogonale Koordinatensysteme auf die dreidimensionale Laplace-Gleichung und die später noch behandelte Helmholtz-Gleichung anwendbar ist. Zu diesen Koordinatensystemen gehören unter anderem die Zylinder- und Kugelkoordinaten. (Die zweidimensionale Laplace-Gleichung ist in beliebig vielen weiteren Koordinatensystemen separierbar. Ebenso läßt sich der Begriff der Separierbarkeit erweitern, um die dreidimensionale Laplace-Gleichung in einigen weiteren Systemen „R-separieren“ zu können.)

Beispiel: Wir betrachten ein in z-Richtung unendlich ausgedehntes Rohr mit rechteckförmigem Querschnitt ($\rightarrow$ Abb. 2.33) und fordern, daß $\varphi = 0$ auf den Wänden des Rohres gelten soll, d.h. für $z \geq 0$:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= \varphi(a, y, z) = 0 & 0 \leq y \leq b \\ \varphi(x, 0, z) &= \varphi(x, b, z) = 0 & 0 \leq x \leq a. \end{aligned}$$

In der Ebene $z = 0$ sei das Potential über den Rohrquerschnitt vorgegeben

$$\varphi(x, y, 0) = V(x, y) \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b.$$

Gesucht ist eine Lösung, die für $z \rightarrow \infty$ verschwindet.

Elementarlösungen, die den Randbedingungen bei $z = 0$ und $y = 0$ genügen, sind $\sin K_x x$ und $\sin K_y y$. Um die Randbedingungen bei $x=a$ und $y=b$ zu erfüllen, muß $\sin K_x a = 0$ und $\sin K_y b = 0$ erfüllt sein. Das gilt für

$$K_x = \frac{m\pi}{a} \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.105)$$

$$K_y = \frac{n\pi}{b} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.106)$$

Es sind also nur bestimmte Werte der Separationskonstanten mit den Randbedingungen verträglich⁵. Von den Elementarlösungen, die die z-Abhängigkeit beschreiben, hat nur $e^{-K_z z}$ das gefor-

⁵ Diese Werte werden oft als **Eigenwerte** des RWP's bezeichnet.

derte Verhalten für $z \rightarrow \infty$. Wegen $K_z^2 = K_x^2 + K_y^2$ kann auch K_z nur diskrete Werte annehmen, nämlich

$$K_z^{(mn)} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (2.107)$$

Eine spezielle Lösung, die die Randbedingungen an den Rohrwänden erfüllt und das geforderte Verhalten für $z \rightarrow \infty$ aufweist, ist damit von der Form

$$\varphi_{mn}(x, y, z) = A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-K_z^{(mn)} z} \quad (2.108)$$

wobei n und m positive ganze Zahlen sind. Dies stellt keine Beschränkung der Allgemeinheit dar, da negative Werte auf der antisymmetrischen Sinusfunktion zum selben Ergebnis führen.

Wir erhalten die Lösung durch Überlagerung:

$$\boxed{\varphi(x, y, z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-K_z^{(mn)} z}} \quad (2.109)$$

Da die Lösung aus (2.109) die Randbedingungen bei $z = 0$ erfüllen muß, bestimmen wir die Koeffizienten A_{mn} so, daß

$$V(x, y) = \varphi(x, y, 0) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.110)$$

gilt. Das bedeutet nichts anderes, als daß wir V in eine zweidimensionale **Fourier-Reihe** entwickeln.

Normalerweise treten in einer Fourier-Reihe Sinus- und Cosinus-Terme auf, nach denen eine in einem Intervall vorgegebene, sich periodisch wiederholende Funktion entwickelt wird. Im Spezialfall einer zum Mittelpunkt des Intervalls symmetrischen bzw. antisymmetrischen Funktion treten nur die Cosinus- bzw. Sinus-Terme auf. Wir legen nun die Intervalle $-a \leq x \leq a$ und $-b \leq y \leq b$ statt $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ zugrunde, denn wir können uns die zu entwickelnde Funktion periodisch und antisymmetrisch im Intervall vorstellen und dementsprechend entwickeln.

Zur Bestimmung der Koeffizienten A_{mn} benutzen wir die sogenannte **Orthogonalitätsrelationen**.

$$\left. \begin{aligned} \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{\tilde{m}\pi x}{a} dx &= \frac{a}{2} \delta_{m\tilde{m}} & m, \tilde{m} \geq 1 \\ \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{\tilde{n}\pi y}{b} dy &= \frac{b}{2} \delta_{n\tilde{n}} & n, \tilde{n} \geq 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.111)$$

δ_{nm} ist das sogenannte **Kronecker-Symbol**:

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{für } n = m \\ 0 & \text{für } n \neq m \end{cases}$$

Wir multiplizieren (2.110) mit $\sin \frac{\tilde{m}\pi x}{a} \sin \frac{\tilde{n}\pi y}{b}$ und integrieren anschließend über x und y .

$$\begin{aligned}
 & \int_0^b \int_0^a V(x, y) \sin \frac{\tilde{m}\pi x}{a} \sin \frac{\tilde{n}\pi y}{b} dx dy \\
 &= \int_0^a \int_0^b \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right] \sin \frac{\tilde{m}\pi x}{a} \sin \frac{\tilde{n}\pi y}{b} dx dy \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{\tilde{m}\pi x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{\tilde{n}\pi y}{b} dy \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \frac{a}{2} \delta_{m\tilde{m}} \frac{b}{2} \delta_{n\tilde{n}} \\
 &= \frac{ab}{4} A_{\tilde{m}\tilde{n}}
 \end{aligned}$$

Damit berechnen sich die Koeffizienten A_{mn} gemäß:

$$A_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a V(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (2.112)$$

Nach dem Einsetzen in (2.109) liegt uns damit eine Lösung des Randwertproblems in Form einer zweidimensionalen Fourierreihe vor. Auf Grund des allgemeinen Eindeutigkeitsbeweises wissen wir, daß es sich auch um die einzige Lösung handelt.

2.2.6 Allgemeine Potentialgleichung in Zylinderkoordinaten

Nach Gleichung (2.72) erhalten wir für die Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten:

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.113)$$

Analog zum Vorgehen in kartesischen Koordinaten machen wir den Produktansatz

$$\Phi(r, \varphi, z) = f(r)g(\varphi)h(z) \quad (2.114)$$

Nach dem Einsetzen in (2.113) und dem Dividieren durch fgh erhalten wir

$$\frac{1}{f} \left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{d\varphi^2} + \frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dz^2} = 0 \quad (2.115)$$

Wiederum gibt es zwei prinzipielle Möglichkeiten, diese Gleichung zu erfüllen:

1. Die zweiten Ableitungen von g und h sowie die beiden Ableitungsterme von f verschwinden:

$$\frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dz^2} = 0 \implies h(z) = \begin{Bmatrix} z \\ 1 \end{Bmatrix} = a_z z + b_z \quad (2.116)$$

$$\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{d\varphi^2} = 0 \implies g(\varphi) = \begin{Bmatrix} \varphi \\ 1 \end{Bmatrix} = a_\varphi \varphi + b_\varphi \quad (2.117)$$

Die Potentialfunktion in Zylinderkoordinaten muß 2π -periodisch sein. Daraus folgt:

$$g(\varphi + 2\pi) = g(\varphi) \implies g(\varphi) = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right\} = b_\varphi = \text{const.} \quad (2.118)$$

Als dritte Gleichung ergibt sich

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} = 0 \quad (2.119)$$

Die Substitution $u = \frac{df}{dr}$ ermöglicht die Lösung der DGL (2.119) durch Variablenseparation.

$$\begin{aligned} \frac{du}{dr} &= -\frac{1}{r}u \\ \ln u &= -\ln r + \ln a_r \\ \implies u &= \frac{a_r}{r} \\ \implies f &= a_r(\ln r + \ln b_r) \\ f &= a_r(\ln b_r r) \quad \text{mit } a_r, b_r = \text{const.} \end{aligned} \quad (2.120)$$

Daraus folgt für die erste spezielle Lösung

$$\boxed{\Phi_1(r, \varphi, z) = a_r \ln(b_r r)(b_\varphi)(b_z + a_z z)} \quad (2.121)$$

2. Die nur von einer Funktion abhängigen Terme sind konstant:

$$\frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dz^2} = -K_z^2 \implies h(z) = \{e^{\pm i K_z z}\} \quad (2.122)$$

$$\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{d\varphi^2} = -K_\varphi^2 \implies g(\varphi) = \{e^{\pm i K_\varphi \varphi}\} \quad (2.123)$$

Wieder müssen wir 2π -Periodizität für $g(\varphi)$ fordern:

$$\begin{aligned} e^{\pm i K_\varphi \varphi} &\stackrel{!}{=} e^{\pm i K_\varphi (\varphi + 2\pi)} = e^{\pm i K_\varphi \varphi} e^{\pm i K_\varphi 2\pi} \\ \implies e^{\pm i K_\varphi 2\pi} &\stackrel{!}{=} 1 \\ \implies K_\varphi &= m \quad m \in \mathbf{Z} \\ \implies g(\varphi) &= \{e^{\pm i m \varphi}\} \quad m \in \mathbf{Z} \end{aligned} \quad (2.124)$$

Das Einsetzen von (2.122) und (2.124) in die ursprüngliche DGL (2.115) liefert die dritte Bestimmungsgleichung

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{f} \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{m^2}{r^2} - K_z^2 = 0 \quad (2.125)$$

Durch das Einführen einer neuen Variablen

$$u = Kr \quad (2.126)$$

erhalten wir aus (2.125) unter der Bedingung

$$K^2 + K_z^2 = 0 \quad (2.127)$$

die **Besselsche Differentialgleichung**

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{du^2} + \frac{1}{uf} \frac{df}{du} + 1 - \frac{m^2}{u^2} = 0 \quad (2.128)$$

Es handelt sich um eine der bekanntesten Gleichungen der mathematischen Physik. Ihre allgemeine Lösung ist eine Linearkombination von zwei verschiedenen linear unabhängigen Lösungsfunktionen, sogenannte **Zylinderfunktionen**, die auf verschiedene Art gewählt werden können. Mögliche Teillösungen sind danach

$$\begin{aligned} f_m(k_m r) &= Z_m(k_m r) \\ &= C_1 J_m(k_m r) + C_2 N_m(k_m r) \\ &= C_3 H_m^{(1)}(k_m r) + C_4 H_m^{(2)}(k_m r) \end{aligned} \quad (2.129)$$

Darin sind

J_m	: Zylinderfunktion 1. Art oder Besselsche Funktion
N_m	: Zylinderfunktion 2. Art oder Neumannsche Funktion
$H_m^{(1)}$	: Zylinderfunktion 3. Art oder Hankelsche Funktion 1. Art
$H_m^{(2)}$	: Zylinderfunktion 4. Art oder Hankelsche Funktion 2. Art

Der Parameter m gibt die Ordnung an.

Viel Wissenswertes über die Zylinderfunktionen findet sich in den Formelsammlungen, wie z. B. [Smirnow, Lehrgang der Höheren Mathematik; Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions]. Alle Zylinderfunktionen liegen tabelliert vor.

Die Besselsche Funktion ist gegeben als eine Potenzreihe (siehe auch [Blume]). Für sehr kleine Werte $x \ll 1$ verhält sie sich wie x^m :

$$J_m(x) \approx \left(\frac{x}{2}\right)^m \frac{1}{m!} \quad \text{für } |x| \ll 1 \quad (2.130)$$

Die Neumannsche Funktion ist durch Grenzwertbildung über einem Ausdruck mit Besselfunktionen definiert. Sie läßt sich auch als Reihenentwicklung angeben. Diese ist aber wesentlich komplizierter als bei der Besselschen Funktion und divergiert für sehr kleine Argumente:

$$N_m(x) \approx -\frac{(m-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^m \quad \text{für } |x| \ll 1 \text{ und } m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.131)$$

$$N_0(x) \approx \frac{2}{\pi} \ln \frac{\gamma x}{2} \approx \frac{2}{\pi} \ln x \quad \text{für } |x| \ll 1 \text{ und } \gamma \approx 1.781 \quad (2.132)$$

Zum Verlauf der Funktionen siehe [Lehner] Seite 170. Für sehr große Argumente verhalten sich die Zylinderfunktionen 1. Art im wesentlichen wie gedämpfte Winkelfunktionen. Einige wichtige Beziehungen für Zylinderfunktionen 1. und 2. Art siehe [Lehner] Seite 172.

Für das Potential ergibt sich dann:

$$\Phi_2(r, \varphi, z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d_m Z_m(k_m r) e^{im\varphi} e^{ik_z z} \quad (2.133)$$

mit der Separationsbedingung nach (2.127)

$$k_z = \pm i k_m \quad (2.134)$$

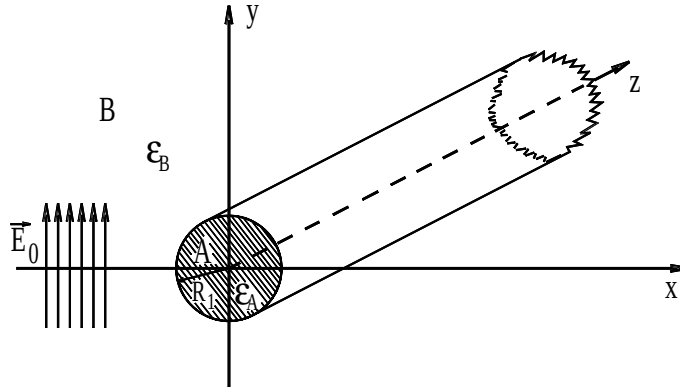


Abbildung 2.34: Unendlich langer Zylinder.

Die **Überlagerung** der beiden Lösungen Φ_1 und Φ_2 liefert die **allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten**.

$$\Phi(r, \varphi, z) = (a \ln(k_r))(b + cz) + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d_m Z_m(k_m r) e^{im\varphi} e^{ik_z z} \quad (2.135)$$

Die Konstante a in (2.135) entspricht dem Produkt von a_r und b_φ aus (2.121).

Spezialfall $k_z = 0$: Für den Fall $k_z = 0$ kann die Gleichung (2.125) mit dem Ansatz $f(r) = \{r^{\pm m}\}$ gelöst werden.

$$\Rightarrow \Phi(r, \varphi, z) = (a \ln(k_r))(b + cz) + \{r^{\pm m}\} \{e^{\pm jm\varphi}\} \quad (2.136)$$

Beispiel: Unendlich langer dielektrischer Zylinder in elektrostatisches Feld ($\rightarrow$ Abb. 2.34). Es herrsche das elektrostatische Feld

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_y$$

In dem Raum sei ein unendlich langer homogener dielektrischer Zylinder in z -Richtung eingebracht. Zu bestimmen ist die durch diese Störung hervorgerufene Feldverzerrung.

In unendlich großem Abstand von der Störung kann ein unbeeinflusstes homogenes Feld angenommen werden und dort gelten die Randbedingungen

$$E_x|_{x \rightarrow \infty} = E_r \cos \varphi - E_\varphi \sin \varphi = 0 \quad (2.137)$$

$$E_y|_{y \rightarrow \infty} = E_r \sin \varphi + E_\varphi \cos \varphi = E \quad (2.138)$$

Aus geometrischen Gründen wird die Lösung keine Abhängigkeit in z -Richtung aufweisen. Mit dem Lösungsansatz nach Gleichung (2.136) und $m = m_A$ erhalten wir

$$\Phi(r, \varphi, z) = a \ln(Kr) + \{r^{\pm m_A}\} \{e^{\pm jm_A \varphi}\} \quad (2.139)$$

wobei $c = 0$ gesetzt wurde und die Konstante b in a hineingezogen wurde.

1. Im Raumteil A , dem dielektrischen Zylinder, mit $0 \leq r \leq R_1$ ist die Randbedingung einzubauen, daß $E_r^{(A)}$ für $r \rightarrow 0$ endlich bleibt. Dies führt wegen

$$\begin{aligned} E_r^{(A)} &= -\frac{\partial \Phi^{(A)}}{\partial r} \\ &= -\frac{a}{r} - \{(\pm m_A) r^{\pm m_A - 1}\} \{e^{\pm i m_A \varphi}\} \end{aligned} \quad (2.140)$$

dazu, daß $a = 0$ und der ganzzahlige Exponent von r positiv sein muß.

Für das Potential im Zylinder erhalten wir deshalb aus (2.139)

$$\Phi^{(A)} = -r^{m_A} (C_1 \sin(m_A \varphi) + C_2 \cos(m_A \varphi)) \quad (2.141)$$

sowie

$$E_r^{(A)} = m_A r^{m_A - 1} (C_1 \sin(m_A \varphi) + C_2 \cos(m_A \varphi)) \quad (2.142)$$

$$\begin{aligned} E_\varphi^{(A)} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \\ &= m_A r^{m_A - 1} (C_1 \cos(m_A \varphi) - C_2 \sin(m_A \varphi)) \end{aligned} \quad (2.143)$$

2. Im Raumteil B , dem Außenraum, mit $r > R_1$ gilt nach (2.139) mit $m = m_B$ für das Potential

$$\Phi^{(B)} = a \ln(Kr) + (br^{m_B} + cr^{-m_B}) \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} m_B \varphi \right\} \quad (2.144)$$

Daraus folgt

$$E_r^{(B)} = -\frac{a}{r} + (-bm_B r^{m_B - 1} + cm_B r^{-m_B - 1}) \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} m_B \varphi \right\} \quad (2.145)$$

$$E_\varphi^{(B)} = -m_B (br^{m_B - 1} + cr^{-m_B - 1}) \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} m_B \varphi \right\} \quad (2.146)$$

Nun arbeiten wir die Randbedingung ein, daß beide Feldkomponenten für alle φ bei $r \rightarrow \infty$ den Wert des ursprünglichen ungestörten Feldes annehmen, also

$$\begin{aligned} E_r|_{r \rightarrow \infty} &= E_0 \sin \varphi \\ E_\varphi|_{r \rightarrow \infty} &= E_0 \cos \varphi \end{aligned}$$

So erhalten wir

$$\begin{aligned} m_B &= 1 \\ b &= -E_0 \end{aligned}$$

$$\Phi^{(B)} = a \ln(Kr) + \left(-E_0 r + \frac{c}{r} \right) \sin \varphi \quad (2.147)$$

und die Feldkomponenten in Raumteil B schreiben sich dann als

$$E_r^{(B)} = -\frac{a}{r} + \left(E_0 + \frac{c}{r^2} \right) \sin \varphi \quad (2.148)$$

$$E_\varphi^{(B)} = \left(E_0 - \frac{c}{r^2} \right) \cos \varphi \quad (2.149)$$

3. Zur Bestimmung der übrigen Konstanten arbeiten wir die Stetigkeitsbedingungen bei $r = R_1$ ein:

(a) Stetigkeitsbedingungen des tangentialen $\vec{E}$ -Feldes:

Aus

$$E_{\varphi}^{(A)}(r = R_1) = E_{\varphi}^{(B)}(r = R_1)$$

eribt sich

$$m_A R_1^{m_A-1} (C_1 \cos(m_A \varphi) - C_2 \sin(m_A \varphi)) = \left(E_0 - \frac{c}{R_1^2} \right) \cos \varphi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_A &= 1 \\ C_1 &= E_0 - \frac{c}{R_1^2} \\ C_2 &= 0 \end{cases}$$

(b) Stetigkeitsbedingungen des normalen $\vec{D}$ -Feldes:

Aus

$$D_r^{(A)}(r = R_1) = D_r^{(B)}(r = R_1)$$

ergibt sich

$$\varepsilon_A \left(E_0 - \frac{c}{R_1^2} \right) \sin \varphi = \varepsilon_B \left[-\frac{a}{R_1} + \left(E_0 + \frac{c}{R_1^2} \right) \sin \varphi \right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a &= 0 \\ c &= \frac{E_0(\varepsilon_A - \varepsilon_B)}{\varepsilon_A + \varepsilon_B} R_1^2 \end{cases}$$

Nach dem Einsetzen von C_1 und C_2 in (2.141)-(2.143) sowie von a und c in (2.147)-(2.149) erhalten wir mit $m_A = 1$ das folgende Ergebnis: Im Raumteil A gilt

$$\Phi^{(A)} = -r E_0 \sin \varphi \left(\frac{2\varepsilon_B}{\varepsilon_A + \varepsilon_B} \right) \quad (2.150)$$

$$E_r^{(A)} = E_0 \sin \varphi \left(\frac{2\varepsilon_B}{\varepsilon_A + \varepsilon_B} \right) \quad (2.151)$$

$$E_{\varphi}^{(A)} = E_0 \cos \varphi \left(\frac{2\varepsilon_B}{\varepsilon_A + \varepsilon_B} \right) \quad (2.152)$$

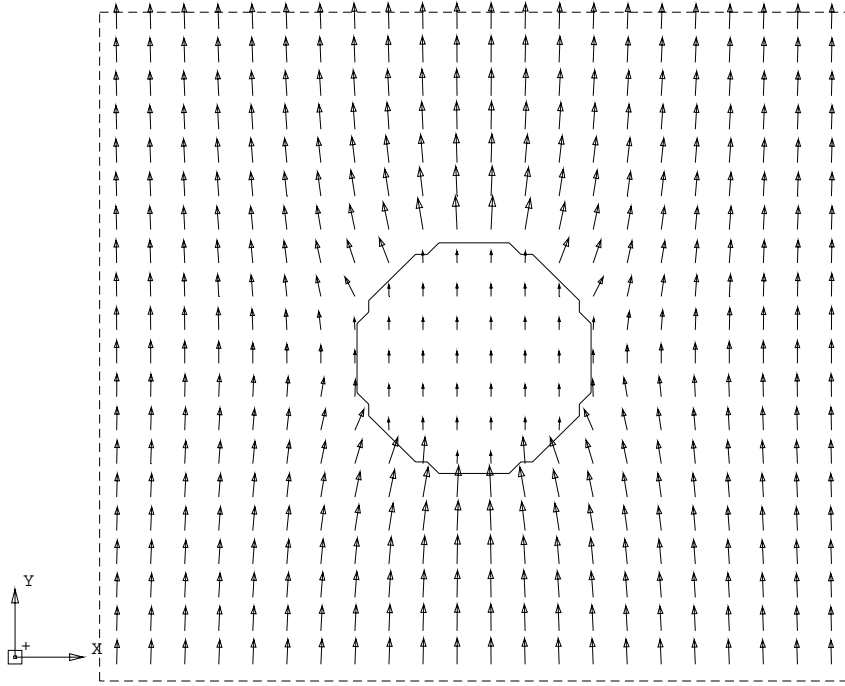
im Raumteil B gilt

$$\Phi^{(B)} = -r E_0 \sin \varphi \left(1 - \frac{R_1^2}{r^2} \frac{\varepsilon_A - \varepsilon_B}{\varepsilon_A + \varepsilon_B} \right) \quad (2.153)$$

$$E_r^{(B)} = E_0 \sin \varphi \left(1 + \frac{R_1^2}{r^2} \frac{\varepsilon_A - \varepsilon_B}{\varepsilon_A + \varepsilon_B} \right) \quad (2.154)$$

$$E_{\varphi}^{(B)} = E_0 \cos \varphi \left(1 - \frac{R_1^2}{r^2} \frac{\varepsilon_A - \varepsilon_B}{\varepsilon_A + \varepsilon_B} \right) \quad (2.155)$$

Im Fall $\varepsilon_A > \varepsilon_B$ ist das Feld innerhalb des Zylinders stets kleiner als außerhalb, homogen und besitzt nur eine y -Komponente ($\rightarrow$ Abb. 2.35).

Abbildung 2.35: Dielektrischer Zylinder ($\varepsilon_A = 3$) im ursprünglich homogenen Feld.

2.2.7 Allgemeine Lösung der Potentialgleichung in Kugelkoordinaten

Nach (2.79) erhalten wir für die Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten

$$\Delta\Phi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \quad (2.156)$$

Der Bernoullische Produktansatz lautet dabei

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = f(r)g(\theta)h(\varphi) \quad (2.157)$$

Einsetzen in (2.156) führt (ähnlich wie bei den Zylinderkoordinaten) auf spezielle Funktionen, die sogenannten **Legendre'schen Kugelfunktionen**. Wir werden hier nicht näher darauf eingehen.

Betrachten wir den **Spezialfall** $\frac{\partial}{\partial\varphi} = \frac{\partial}{\partial\theta} = 0$, so vereinfacht sich (2.156) zu

$$\Delta\Phi(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) = 0 \quad (2.158)$$

$$\Phi(r) = a + \frac{b}{r} \quad (2.159)$$

$$\vec{E} = -\frac{b}{r^2} \vec{e}_r \quad (2.160)$$

d. h. in diesem Fall hat die elektrische Feldstärke lediglich eine radiale Komponente.

2.3 Energie im elektrostatischen Feld

In Abschnitt 2.1.2 hatten wir für die potentielle Energie einer Punktladung Q in einem elektrostatischen Potentialfeld $\varphi(\vec{r})$ die Beziehung

$$W_e(\vec{r}) = Q\varphi(\vec{r})$$

gefunden.

Wir betrachten nun zwei Punktladungen Q_i und Q_j an den Orten $\vec{r}_i$ und $\vec{r}_j$. Das Potential von Q_i in $\vec{r}_i$ beträgt

$$\varphi(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}.$$

Um Q_j aus dem Unendlichen an den Ort $\vec{r}_j$ zu bringen, ist dazu die Arbeit

$$W_{ij} = \frac{Q_i Q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_j - \vec{r}_i|} \quad (2.161)$$

aufzubringen. Bringen wir eine weitere Ladung Q_k an den Ort $\vec{r}_k$, so ist zunächst die Arbeit $W_{ik} + W_{jk}$ aufzubringen.

Durch Verallgemeinerung erhalten wir für **N Punktladungen** die gesamte gespeicherte Energie zu

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1; i \neq j}^N W_{ij} \quad (2.162)$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ ist nötig, damit alle Beiträge nur einmal gezählt werden. Ferner ist $i = j$ ausgenommen, da $|\vec{r}_j - \vec{r}_i| = 0$ zu einem unendlichen Beitrag führen würde.

Für den Fall einer **räumlichen Ladungsverteilung** erhalten wir zunächst

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \iiint_V \frac{\varrho(\vec{r}) dV \varrho(\vec{r}_i) dV_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad (2.163)$$

dadurch, daß wir die Punktladungen durch infinitesimale Ladungselemente $\varrho(\vec{r}) dV$ ersetzen und eine Integration über das ladungserfüllte Gebiet V ausführen.

Gemäß (2.9) in Abschnitt 2.1.3.3 ist das Potential einer Raumladungsverteilung gegeben durch das Coulombintegral

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\varrho(\vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} dV_i.$$

Damit erhalten wir für die potentielle Energie einer Raumladungsdichteverteilung

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \varrho(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) dV \quad (2.164)$$

Mit $\text{div} \vec{D} = \varrho$, der 3. Maxwell'schen Gleichung, ergibt sich

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \varphi(\vec{r}) \text{div} \vec{D} dV \quad (2.165)$$

Wegen

$$\text{div}(\vec{D}\varphi) = \vec{D} \cdot \text{grad} \varphi + \varphi \text{div} \vec{D}$$

folgt

$$\begin{aligned} W_e &= -\frac{1}{2} \iiint_V \vec{D} \cdot \text{grad} \varphi dV + \frac{1}{2} \iiint_V \text{div}(\vec{D}\varphi) dV \\ &\stackrel{6}{=} \frac{1}{2} \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{D} dV + \frac{1}{2} \iint_{\partial V} \varphi \vec{D} \cdot d\vec{A} \end{aligned}$$

Bei der Betrachtung des ganzen Raums ist die Oberfläche ins Unendliche gerückt, wo $\varphi \equiv 0$ ist, und es ergibt sich

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{D} dV \quad (2.166)$$

(2.166) ist das Volumenintegral über die **elektrostatische Energiedichte**:

$$w_e = \frac{dW_e}{dV} = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \quad \left[\frac{\text{VAs}}{\text{m}^3} \right] \quad (2.167)$$

2.3.1 Energieerhaltung eines Plattenkondensators

Man betrachte 2 isolierte, unendlich ausgedehnte Platten, die vorab von einer äußeren Spannungsquelle aufgeladen wurden ($\rightarrow$ Abb. 2.36). Außerhalb der Platten wird ein idealer Isolator ange-

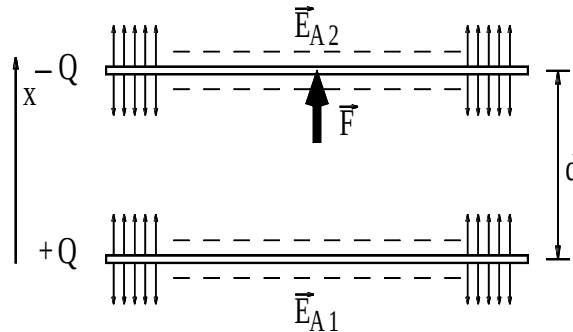


Abbildung 2.36: Zwei isolierte, unendlich ausgedehnte Platten.

nommen, so daß die entgegengesetzt gerichteten, aber gleich großen Ladungen auf den Platten zeitlich konstant bleiben.

Frage: Wie wirkt sich die Verschiebung einer Elektrode auf die im elektrischen Feld gespeicherte Energie aus?

Annahme: Auf die eine Platte wirke die Kraft $\vec{F}$ in x-Richtung, wodurch sich diese Platte von ihrer Gegenelektrode um den Abstand d entfernt.

Dazu ist die Arbeit

$$W_A = \int_0^d \vec{F} \cdot d\vec{x} \quad (2.168)$$

notwendig.

Sei nun $\vec{E}_{A1}$ das auf Platte 1 von der Ladung $+Q$ hervorgerufene elektrische Feld. Dann ergibt sich am Ort der bewegten Platte 2 eine Coulombkraft

$$\vec{F}_C = -Q\vec{E}_{A1},$$

die es für eine Bewegung gerade zu überwinden gilt.

Mit $\vec{F} = -\vec{F}_C$ erhalten wir dann

$$W_A = Q \int_0^d \vec{E}_{A1} \cdot d\vec{x} \quad (2.169)$$

⁶ mit $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$ und Gaußschem Integralsatz

Das elektrische Feld in $\vec{E}_{A_1}$ der Platte 1 ergibt sich aus der dritten Maxwellschen Gleichung in Integralform

$$\oint_{\partial V} \vec{D}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \iiint_V \varrho(\vec{r}) dV$$

$$\Longleftrightarrow D_{A_1} \cdot 2A = Q \quad (2.170)$$

$$\text{mit } \vec{D}_{A_1} = \varepsilon \vec{E}_{A_1} \quad (2.171)$$

$$\text{zu } \vec{E}_{A_1} = \frac{Q}{2\varepsilon A} \vec{e}_x \quad \text{für } x > 0 \quad (2.172)$$

Damit ergibt sich für die zum Auseinanderziehen zu leistende Arbeit

$$W_A = \frac{Q^2}{2\varepsilon A} d. \quad (2.173)$$

Die außerhalb der Platten gespeicherte Feldenergie ist gemäß (2.166)

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{D} dV = \frac{1}{2} \iiint_V \varepsilon E^2 dV \quad (2.174)$$

Das Feld $\vec{E}$ setzt sich aus der Superposition der Felder $\vec{E}_{A_1}$ und $\vec{E}_{A_2}$ zusammen, ist zwischen den Platten doppelt so groß wie das Einzelfeld $\vec{E}_{A_1}$ und verschwindet außerhalb der Platten, da dort $\vec{E}_{A_1}$ und $\vec{E}_{A_2}$ entgegengesetzt gleich gerichtet sind

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \varepsilon (2E_{A_1})^2 dV \quad (2.175)$$

$$= \frac{Q^2}{2\varepsilon A} d \quad (2.176)$$

Die zum Aufbau des Plattenkondensators aufgewendete Arbeit entspricht also gerade der im Plattenkondensator gespeicherten Feldenergie. Diese kann z. B. bei einer Entladung des Kondensators wiedergewonnen werden. Man beachte die Analogie zur potentiellen Energie in einer gespannten Feder.

Damit ist gezeigt, daß in jedem Moment die **Energieerhaltung**

$$W_e = W_A \quad (2.177)$$

gilt.

2.4 Kapazität im Mehrleitersystem

Bei Anlegen einer Spannung U an einen Kondensator nehmen die beiden voneinander isolierten Metallelektroden die Ladung Q auf. Dabei ist die Ladung der Elektroden gemäß

$$Q = CU \quad (2.178)$$

proportional zur Spannung zwischen den Elektroden. Der Proportionalitätsfaktor C ist die **Kapazität** des Kondensators.

Der Kapazitätsbegriff soll nun ausgeweitet werden. Wir betrachten nun n Elektroden im Raum mit konstantem ε . Das Potential der Elektroden sei jeweils bekannt.

Gesucht ist die Ladung auf den einzelnen Leitern.

Wir betrachten folgenden Beispiel ($\rightarrow$ Abb. 2.37). Das Gesamtfeld ergibt sich aus der Überlagerung:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4$$

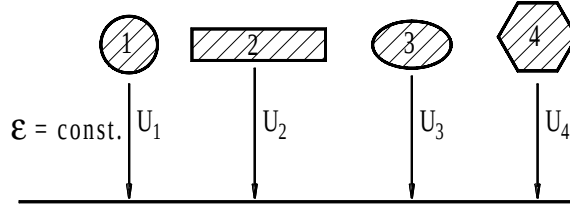


Abbildung 2.37: Vier verschiedene Elektroden im Raum.

Die Ursache der Einzelfelder $\vec{E}_i$ sind die gesuchten Ladungen Q_i .

Gemäß der 3. Maxwell'schen Gleichung können wir Q_1 ermitteln, indem wir den Verschiebungsfluß durch eine geschlossene und den Leiter 1 umschließende Hüllfläche ∂V ermitteln:

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \varepsilon \oint_{\partial V} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4) \cdot d\vec{A} \\
 &= \varepsilon \left(\oint_{\partial V} \vec{E}_1 \cdot d\vec{A} + \dots + \oint_{\partial V} \vec{E}_4 \cdot d\vec{A} \right) \\
 &= Q_{11} + Q_{12} + Q_{13} + Q_{14}
 \end{aligned} \tag{2.179}$$

Analog zu (2.178) führen wir 'Teilkapazitäten' C_{ij} ein mit

$$Q_{ij} = C_{ij} U_j \tag{2.180}$$

wobei C_{ij} zahlenmäßig die Ladung in 'As' des Leiters i für den Fall bedeutet, daß die Spannung des Leiters j gerade 1V ist, während alle anderen Leiter gerade die Spannung Null besitzen.

(2.179) können wir nun auch schreiben als

$$Q_1 = C_{11}U_1 + C_{12}U_2 + C_{13}U_3 + C_{14}U_4 \tag{2.181}$$

Wenn wir dies für alle Elektroden durchführen und verallgemeinern, so läßt sich das Ergebnis in Form eines linearen Gleichungssystems angeben:

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ C_{12} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix} \tag{2.182}$$

oder kurz

$$\vec{q} = \underline{C} \cdot \vec{u}, \tag{2.183}$$

wobei die Teilkapazitäten C_{ij} in der **Kapazitätsmatrix** $\underline{C}$ zusammengefaßt sind.

Kapitel 3

Magnetostatik

- zeitunabhängige magnetische Felder
- gegebenenfalls Vorhandensein von Gleichströmen

Maxwellsche Gleichungen im stationären Fall:

	Elektrostatik	Magnetostatik
$\text{rot} \vec{E} = \underbrace{-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}_{=0}$	$\text{rot} \vec{E} = \vec{0}$	
$\text{rot} \vec{H} = \underbrace{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}_{=0} + \vec{J}$		$\text{rot} \vec{H} = \vec{J}_E$
$\text{div} \vec{D} = \varrho$	$\text{div} \vec{D} = \varrho$	
$\text{div} \vec{B} = 0$		$\text{div} \vec{B} = 0$

Magnetostatische Felder existieren z. B. inner- und außerhalb gleichstromdurchflossener Leiter (z. B. Spulen) sowie in der Umgebung von Dauermagneten. Die Maxwellschen Gleichungen lauten in diesem Fall:

$\begin{aligned} \text{rot} \vec{H}(\vec{r}) &= \vec{J}(\vec{r}) \\ \text{div} \vec{B}(\vec{r}) &= 0 \end{aligned}$	$\Longleftrightarrow$	$\oint_{\partial A} \vec{H}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{J}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} \quad (3.1)$ $\oiint_{\partial V} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = 0 \quad (3.2)$
---	-----------------------	--

(3.1): Wirbeldichte des erzeugenden Gleichstroms bzw. der dazu äquivalenten bewegten elektrischen Ladungen

(3.2): Quellenfreiheit des magnetischen Feldes; Nicht-Existenz magnetischer Ladungen

Materialgleichung

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu(\vec{r}) \vec{H}(\vec{r}) \quad (3.3)$$

Wie in der Elektrostatik werden wir versuchen, das System von 2 Differentialgleichungen (3.1) und (3.2) durch einen geeigneten Potentialansatz in eine Differentialgleichung zu überführen.

3.1 Das magnetostatische Vektorpotential

Im elektrostatischen Fall konnten wir das Feld mit Hilfe eines skalaren Potentials ausdrücken. Dies war durch die Wirbelfreiheit des elektrostatischen Feldes ($\text{rot}\vec{E} = 0$) möglich. Da das magnetostatische Feld im allgemeinen nicht wirbelfrei ist, sondern von einem Gleichstrom erzeugt sein kann, versagt dieser Ansatz. Es zeigt sich aber, daß wir eine andere Hilfsfunktion finden können, die die Divergenzgleichung automatisch erfüllt:

$$\text{div}\vec{B} = 0$$

Die Quellenfreiheit der magnetischen Induktion $\vec{B}$ erlaubt die Darstellung als Rotation (Wirbel) eines **Vektorpotentials** $\vec{A}$:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot}\vec{A}(\vec{r}), \quad (3.4)$$

denn für ein beliebiges Vektorfeld $\vec{X}(\vec{r})$ gilt stets $\text{div}\text{rot}\vec{X}(\vec{r}) = 0$. $\vec{A}$ wird als **magnetisches Vektorpotential** bezeichnet. Dies ist insbesondere auch in stromführenden Gebieten anwendbar, so daß mit seiner Hilfe die Magnetfelder gegebener Anordnungen von Strömen berechenbar sind.

Nun soll die Bestimmungsgleichung für das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ hergeleitet werden. In einem linearen, isotropen Material gilt die Materialgleichung (3.3). Das Einsetzen von (3.3) und (3.4) in die Maxwell'schen Gleichungen (3.1) liefert

$$\text{rot} \left[\frac{1}{\mu(\vec{r})} \text{rot}\vec{A}(\vec{r}) \right] = \vec{J}(\vec{r}). \quad (3.5)$$

Dies ist die **allgemeine Vektordifferentialgleichung der Magnetostatik**.

Für ein **homogenes Medium** ist die Permeabilität μ ortsunabhängig und (3.5) vereinfacht sich zu

$$\text{rot}\text{rot}\vec{A}(\vec{r}) = \mu\vec{J}(\vec{r}). \quad (3.6)$$

Bevor wir nun weiter vorgehen, ist folgendes zu beachten. Ähnlich wie im elektrostatischen Feld die Addition einer Konstanten zur Potentialfunktion auf das gleiche elektrische Feld führt, ist das magnetostatische Feld nur bis auf die Addition des Gradienten eines Skalarfeldes zum Vektorpotential eindeutig bestimmt. Mit

$$\vec{A}^*(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) - \text{grad}\psi(\vec{r}) \quad (3.7)$$

schreibt sich (3.6) auch als

$$\text{rot}\text{rot}[\vec{A}^*(\vec{r}) + \text{grad}\psi(\vec{r})] = \text{rot}\text{rot}\vec{A}^*(\vec{r}) = \mu\vec{J}(\vec{r}), \quad (3.8)$$

weil die Hintereinanderschaltung der Differentialoperatoren rot und grad stets Null ergibt: $\text{rot}\text{grad}f \equiv 0$. Ein und dasselbe Vektorfeld $\vec{B}$ ist also durch unendlich verschiedene Vektorpotentiale $\vec{A}$ darstellbar. Daher können wir zusätzliche Bedingungen an $\vec{A}$ stellen, die dann durch geeignete Wahl der **freien Integrationskonstanten** $\text{grad}\psi$ erfüllt werden können. D. h. wir können das Vektorpotential $\vec{A}$ nach geeigneten Vorschriften „eichen“. Der Übergang von $\vec{A}$ zu $\vec{A}^*$ nach (3.7) wird als **Eichtransformation** des Vektorpotentials bezeichnet. $\vec{B}$ bleibt dabei unverändert, d. h. $\vec{B}$ ist **eichinvariant**. Für statische Probleme ist die **Coulomb-Eichung** sehr geeignet

$$\text{div}\vec{A} = 0. \quad (3.9)$$

Für zeitabhängige Probleme wird hingegen sehr oft die **Lorentz-Eichung** verwendet

$$\text{div}\vec{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0. \quad (3.10)$$

Sie wird später in der Vorlesung noch von Bedeutung sein. Mit Hilfe der Vektorbeziehung

$$\text{rot}\text{rot}\vec{A} = \text{grad}\text{div}\vec{A} - \Delta\vec{A} \quad (3.11)$$

und der Coulomb-Eichung (3.9) können wir (3.6) schreiben als

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\mu \vec{J}(\vec{r}) \quad (3.12)$$

Bemerkung: Hierbei ist zu beachten, daß der Laplace-Operator im allgemeinen (bei krummlinigen Koordinaten) gemäß der aus (3.11) folgenden Vorschrift $\Delta \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \text{rot rot } \vec{A}$ zu bestimmen ist. Nur im Fall kartesischer Koordinaten läßt sich $\Delta \vec{A}$ durch Anwendung des skalaren Δ -Operators auf die einzelnen Komponenten von $\vec{A}$ bestimmen. In kartesischen Koordinaten erhalten wir die drei Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \Delta A_x(\vec{r}) &= -\mu J_x(\vec{r}) \\ \Delta A_y(\vec{r}) &= -\mu J_y(\vec{r}) \\ \Delta A_z(\vec{r}) &= -\mu J_z(\vec{r}) \end{aligned} \quad (3.13)$$

mit

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Jede einzelne Differentialgleichung dieses Systems ist vom Typ der Poisson-Gleichung. Die Lösung für ein unbegrenztes Gebiet können wir daher in Analogie zum Coulomb-Integral sofort angeben. Für die x-Komponente ergibt sich

$$A_x = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V_i} \frac{J_{x,i}(\vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} dV_i \quad (3.14)$$

A_y und A_z ergeben sich analog. Die Zusammenfassung ergibt

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V_i} \frac{\vec{J}_i(\vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} dV_i \quad (3.15)$$

Hinweis: Die Analogie der Lösungen der Poisson-Gleichung und dem Vektorpotential für kartesische Koordinaten ist rein mathematischer Natur. Physikalisch beschreibt die Poisson-Gleichung Quellenfelder der Elektrostatik mit Anfang und Ende bei vorhandenen Raumladungsdichten ϱ . Die Differentialgleichung des Vektorpotentials hingegen beschreibt Wirbelfelder mit in sich geschlossenen Feldlinien, die durch Leitungsstromdichten verursacht werden.

Für Zylinderkoordinaten ergibt sich aus (3.12) folgendes System in homogener Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \Delta A_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{A_r}{r^2} &= -\mu J_r \\ \Delta A_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{A_\varphi}{r^2} &= -\mu J_\varphi \\ \Delta A_z &= -\mu J_z \end{aligned} \quad (3.16)$$

mit

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Diese Differentialgleichungen sind nicht so einfach zu lösen wie das System (3.13). Es soll auch noch einmal betont werden, daß die Vektorgleichung (3.15) nur für kartesische Koordinaten gilt. Wenn wir (3.15) ausführlich schreiben, so lautet diese:

$$\vec{A}(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V_i} \frac{\vec{J}_i(x_i, y_i, z_i)}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}} dV_i(x_i, y_i, z_i)$$

$$\begin{aligned} (x_i, y_i, z_i) &= \text{Koordinaten der verursachenden Leitungsstromdichte} \\ &\quad \text{und zugehöriger Volumenelemente} \\ (x, y, z) &= \text{Koordinaten des Meß- oder Aufpunktes P(x,y,z)} \\ V_i &= \text{von der Leitungsstromdichte } \vec{J}_i \text{ erfüllter Raum} \end{aligned}$$

Für eine **flächenhafte Stromdichte** $\vec{J}_i$ vereinfacht sich (3.15) zu

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iint_{A_i} \frac{\vec{J}(\vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} dA_i$$

mit der dünnen Fläche A_i (Blech z. B.).

Für einen **fadenartigen Stromfluß** in einem dünnen Leiter (z. B. Draht) wird das Volumenintegral zu einem Umlaufintegral:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \oint \frac{I}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} ds_i$$

3.2 Das Gesetz von Biot-Savart

Statt des Vektorfeldes $\vec{A}$ wollen wir nun das Feld $\vec{B}$ selbst durch ein Integral ausdrücken. Aus den Gleichungen (3.15) und (3.4) ergibt sich¹

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V_i} \text{rot}_r \frac{\vec{J}_i(\vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} dV_i$$

Nun benutzen wir folgende Umformung:

$$\begin{aligned} \text{rot}_r \frac{\vec{J}_i(\vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} &= \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \text{rot}_r \vec{J}_i(\vec{r}_i) - \vec{J}_i(\vec{r}_i) \times \text{grad} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right) \\ &= -\vec{J}_i(\vec{r}_i) \times \text{grad} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right) \quad \rightarrow^2 \\ &= -\vec{J}_i(\vec{r}_i) \times \left(-\frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \right) \\ &= \vec{J}_i(\vec{r}_i) \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \end{aligned}$$

Daraus folgt für die magnetische Induktion:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V_i} \frac{\vec{J}_i(\vec{r}_i) \times (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} dV_i \quad (3.17)$$

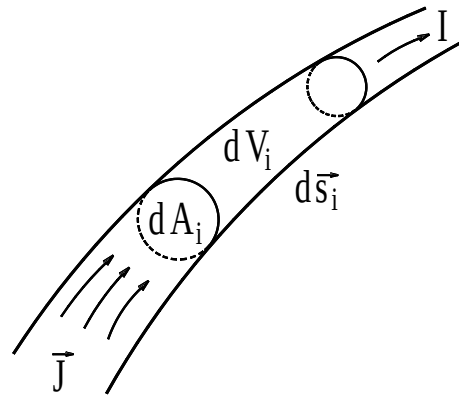


Abbildung 3.1: Differentiell kleine Stromröhre.

Dies ist das **Gesetz von Biot-Savart** in seiner allgemeinsten Form. Wenn nur Ströme auf relativ dünnen Leitern vorliegen, so gilt näherungsweise ($\rightarrow$ Abb. 3.1):

$$\begin{aligned} \vec{J}_i(\vec{r}_i) dV_i &= \underbrace{\vec{J}_i(\vec{r}_i) dA_i}_{I} d\vec{s}_i \\ &= I d\vec{s}_i \end{aligned}$$

Damit nehmen (3.15) und (3.17) folgende Form an:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} I \oint \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} d\vec{s}_i \quad (3.18)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu}{4\pi} I \oint \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i) \times d\vec{s}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad (3.19)$$

Diese Integrale sind über den gesamten geschlossenen Stromkreis bzw. die gesamten geschlossenen Stromkreise zu erstrecken ($\rightarrow$ Abb. 3.2).

¹ nach Vertauschen von Integral und Rotation

² rot_r wirkt nicht auf $\vec{r}_i$

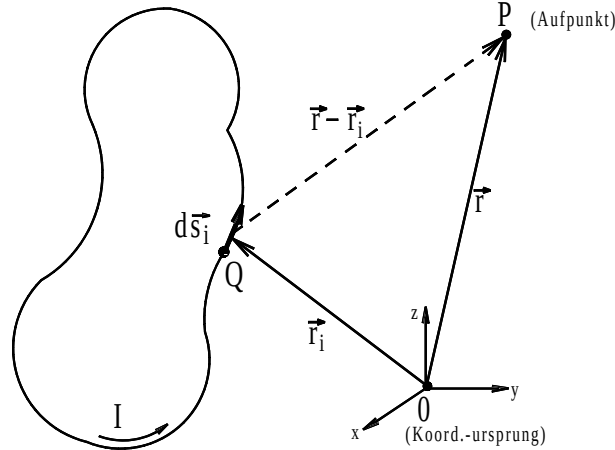


Abbildung 3.2: Das Gesetz von Biot-Savart am geschlossenen Stromkreis.

3.3 Skalares magnetisches Potential

In weitgehender Analogie zu Herleitung der Potentialgleichung für die Elektrostatik wollen wir nun eine entsprechende Gleichung für ein skalares magnetisches Potential φ_m herleiten.

Wie früher betont, beschreiben die Gleichungen (3.1) - (3.3) der Magnetostatik Wirbelfelder, während mit dem elektrischen Skalarpotential φ (wirbelfreie) Quellenfelder beschrieben werden. Aus der Mathematik wissen wir, daß wir die Lösung einer Differentialgleichung in eine allgemeine homogene Lösung und eine spezielle inhomogene Lösung zerlegen können. Daher können wir die magnetische Feldstärke $\vec{H}(\vec{r})$ in einen wirbelfreien Anteil $\vec{H}_0(\vec{r})$ und einen wirbelbehafteten Anteil $\vec{H}_w(\vec{r})$ zerlegen. Für den wirbelfreien Anteil können wir nun den Ansatz

$$\vec{H}_0(\vec{r}) = -\text{grad}\varphi_m(\vec{r})$$

verwenden und erhalten damit insgesamt den Ansatz

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_w(\vec{r}) - \text{grad}\varphi_m(\vec{r}) \quad (3.20)$$

Damit ergibt sich für die Maxwellsche Gleichung (3.1)

$$\text{rot}\vec{H}(\vec{r}) = \text{rot}[\vec{H}_w(\vec{r}) - \text{grad}\varphi_m(\vec{r})] = \vec{J}(\vec{r}) \quad (3.21)$$

Diese Gleichung hängt nur ab von

- der Geometrie
- der elektrischen Stromdichte

und **nicht** vom Material, d. h. $\vec{H}_w(\vec{r})$ läßt sich ohne Berücksichtigung von eventuell vorhandenen Grenzflächen berechnen. Die rein mathematische Hilfsgröße $\vec{H}_w(\vec{r})$ darf „unphysikalisch“ sein, d. h. sie darf Quellen enthalten und damit divergenzbehaftet sein. Der wirbelfreie Feldanteil $\vec{H}_0(\vec{r})$ muß dann nur so berechnet werden, daß die „künstlichen“ Quellen gerade kompensiert werden.

Wir setzen unseren Ansatz also in die Maxwellsche Gleichung (3.2) ein und berücksichtigen dabei die Materialgleichung (3.3):

$$\begin{aligned} \text{div}\vec{B}(\vec{r}) &= \text{div}\mu(\vec{r})[\vec{H}_w(\vec{r}) - \text{grad}\varphi_m(\vec{r})] \\ &= \text{div}[\mu(\vec{r})\vec{H}_w(\vec{r})] - \text{div}[\mu(\vec{r})\text{grad}\varphi_m(\vec{r})] \\ &= 0 \\ \iff \text{div}[\mu(\vec{r})\text{grad}\varphi_m(\vec{r})] &= \text{div}[\mu(\vec{r})\vec{H}_w(\vec{r})] =: \varrho_m \end{aligned} \quad (3.22)$$

Hier wurde nun in Analogie zur elektrischen Raumladungsdichte $\varrho(\vec{r})$ eine „künstliche“ magnetische Raumladungsdichte $\varrho_m(\vec{r})$ eingeführt, die der Divergenz des Vektorfeldes $\mu(\vec{r})\vec{H}_w(\vec{r})$ gleicht. Damit erhalten wir aus (3.22) die **allgemeine Potentialgleichung**

$$\mu(\vec{r})\Delta\varphi_m(\vec{r}) + \text{grad}\mu(\vec{r}) \cdot \text{grad}\varphi_m(\vec{r}) = \varrho_m(\vec{r}) \quad (3.23)$$

Dies bedeutet, daß wir zur Berechnung magnetostatischer Felder auf die gleichen Methoden wie in der Elektrostatik zurückgreifen können. Insbesondere können wir auch die Spiegelungsmethode anwenden.

3.4 Randbedingungen des magnetischen Feldes an der Grenzfläche homogener Medien

Beim Übergang von einem homogenen Medium in ein anderes ändern sich die Materialkonstanten sprunghaft, d. h. die Permeabilität μ ändert sich sprunghaft. Um das Verhalten des Magnetfeldes an einer solchen Grenzfläche zu untersuchen, betrachten wir einen kleinen Zylinder der Höhe Δh , der mittig zur Grenzfläche liegt ($\rightarrow$ Abb 3.3). Die beiden Endflächen der Größe ΔA liegen parallel zur Grenzfläche. Mit den Flächennormalen $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$, die definitionsgemäß nach außen gerichtet sind, erhalten wir aus (3.2) für die magnetische Induktion

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A} &= (\vec{B}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_2)\Delta A + \{\text{Beitrag Zylindermantel}\} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Im Grenzwert $\Delta h \rightarrow 0$ verschwindet der Fluß über dem Zylindermantel, da dieser proportional zu Δh ist, so daß wegen $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$ für die Normalkomponenten der magnetischen Induktion folgt:

$$B_{n_1} = B_{n_2} \quad (3.25)$$

Die Normalkomponenten der magnetischen Induktion $\vec{B}$ sind daher an den Grenzflächen immer stetig.

Als nächstes betrachten wir das Verhalten der magnetischen Feldstärke $\vec{H}$. Dazu betrachten wir ein kleines Flächenelement $\Delta A = \Delta h \Delta l$, das sich zu beiden Seiten der Grenzfläche erstreckt

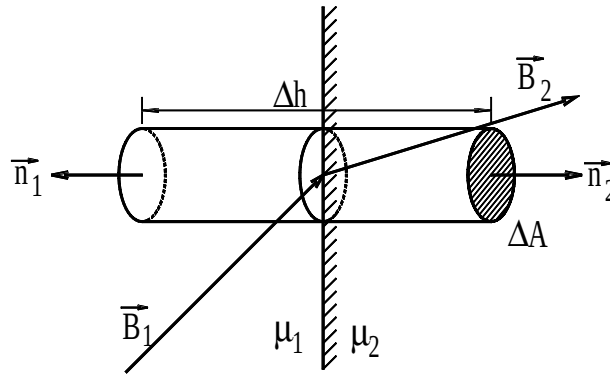
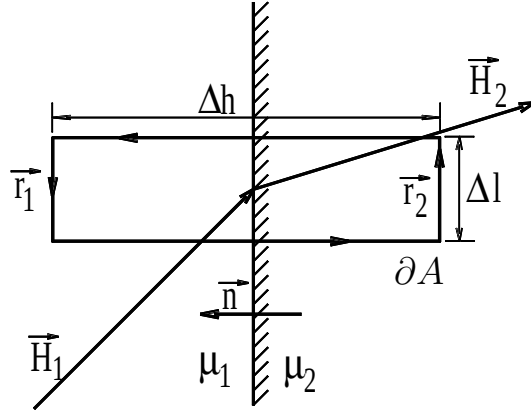


Abbildung 3.3: Mittig zur Grenzfläche angeordneter Zylinder.

Abbildung 3.4: Flächenelement ∂A an Grenzfläche.

(→ Abb. 3.4). Für ein genügend kleines ΔA kann die magnetische Feldstärke $\vec{H}$ im jeweiligen Medium als konstant angenommen werden. Unter der Annahme einer Stromdichte $\vec{J}$ innerhalb der Umlaufläche ∂A ergibt sich dann aus der Maxwell-Gleichung (3.1)

$$\begin{aligned} \oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} &= \vec{H}_1 \cdot \vec{r}_1 \Delta l - \vec{H}_1 \cdot \vec{n} \frac{\Delta h}{2} - \vec{H}_2 \cdot \vec{n} \frac{\Delta h}{2} + \vec{H}_2 \cdot \vec{r}_2 \Delta l + \vec{H}_2 \cdot \vec{n} \frac{\Delta h}{2} + \vec{H}_1 \cdot \vec{n} \frac{\Delta h}{2} \\ &= \vec{J} \cdot d\vec{a} \Delta l \Delta h \end{aligned} \quad (3.26)$$

Hierbei sind $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{n}$ und $d\vec{a}$ Linien- bzw. Flächeneinheitsvektoren. Für den Grenzübergang $\Delta h \rightarrow 0$ verschwinden die auf die Teilstrecke Δh entfallenden magnetischen Spannungen, so daß wegen $\vec{r}_1 = -\vec{r}_2$ mit der Oberflächenstromdichte

$$J_F = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \vec{J} \cdot d\vec{a} \Delta h \quad (3.27)$$

für die Tangentialkomponenten der magnetischen Feldstärke an der Grenzfläche gilt:

$$H_{t_1} - H_{t_2} = J_F \quad (3.28)$$

Im stromlosen Fall sind die Tangentialkomponenten der magnetischen Feldstärke somit stetig:

$$H_{t_1} = H_{t_2} \quad \text{für } J_F = 0 \quad (3.29)$$

Aus den Beziehungen (3.25) und (3.29) folgt das Brechungsgesetz für magnetische Feldlinien. Dazu wird angenommen, daß in der Oberfläche kein Strom fließe (→ Abb. 3.5).

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{B_{1t}}{B_{1n}} \stackrel{(3.25)}{=} \frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1 H_{1t}}{\mu_2 H_{2t}} \stackrel{(3.29)}{\implies} \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (3.30)$$

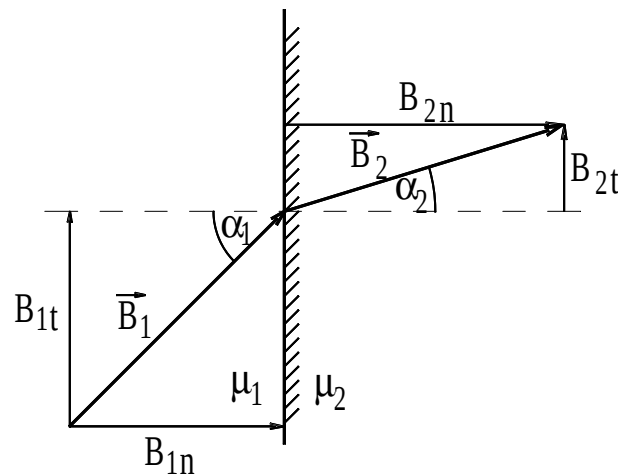


Abbildung 3.5: Das Brechungsgesetz für magnetische Feldlinien.

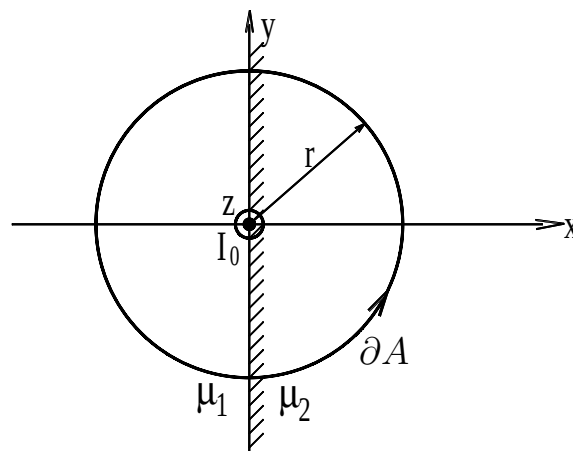
3.5 Beispiele

3.5.1 Unendlich langer Leiter in der Grenzfläche zwischen zwei Medien

Wir wollen das Problem ($\rightarrow$ Abb. 3.6) mit Hilfe eines skalaren magnetischen Potentials lösen, wie in Abschnitt 3.3 beschrieben.

Wegen der Brechnung der Feldlinien an der Grenzfläche zwischen den beiden Medien lässt sich das magnetische Feld nicht direkt aus dem Durchflutungsgesetz (3.1) berechnen. Deshalb bestimmen wir zunächst das Hilfsfeld $\vec{H}_w(\vec{r})$ nach (3.21)

$$\begin{aligned}
 \text{rot} \vec{H}_w(\vec{r}) &= \vec{J}(\vec{r}) \\
 \oint_{\partial A} \vec{H}_w(\vec{r}) \cdot d\vec{s} &= I_0 \\
 \Rightarrow \vec{H}_w(\vec{r}) &= \frac{I_0}{2\pi r} \vec{e}_\varphi
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Abbildung 3.6: Der Leiter führt eine konstante Stromstärke I_0 in z-Richtung.

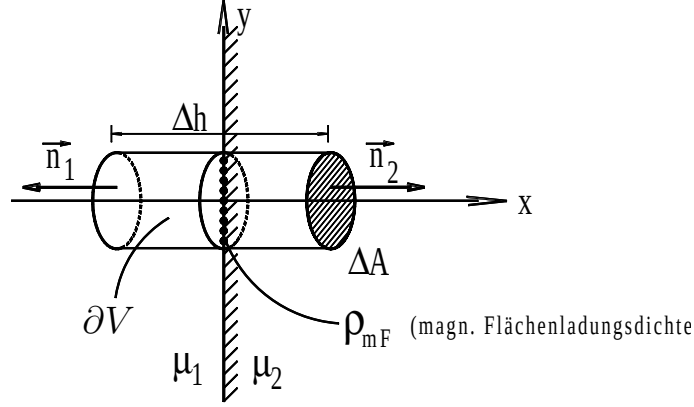


Abbildung 3.7: Volumenelement an der Grenzfläche.

Zur Bestimmung der Quellen von $\vec{H}_w$ (Hilfskonstrukt!) betrachten wir nun ein infinitesimal kleines Volumenelement an der Grenzfläche beider Medien ($\rightarrow$ Abb. 3.7). Für $\Delta h \rightarrow 0$ liefert der magnetische Fluß des Wirbelfeldes $\vec{H}_w$ durch die Oberfläche ∂V des betrachteten Volumenelementes

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \oint_{\partial V} \vec{B}_w(\vec{r}) \cdot d\vec{A} &= \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \iiint_V \varrho_m(\vec{r}) dV \\ \stackrel{3}{\Rightarrow} (\mu_2 - \mu_1) \vec{H}_w(\vec{r}) &= \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \varrho_m(\vec{r}) \Delta h \end{aligned} \quad (3.32)$$

Die rechte Seite

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \varrho_m(\vec{r}) \Delta h =: \varrho_{mF}(\vec{r}) \quad (3.33)$$

ist als magnetische Flächenladungsdichte ϱ_{mF} zu interpretieren. Für diese erhalten wir aus (3.32) unter Berücksichtigung von (3.31)

$$\varrho_{mF}(\vec{r}) = (\mu_2 - \mu_1) \vec{H}_w(\vec{r}) = \begin{cases} (\mu_2 - \mu_1) \frac{I_0}{2\pi y} & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.34)$$

Dies setzen wir in die Potentialgleichung (3.23) ein – und zwar in jeden Raumteil. Damit verbleibt folgendes zu lösen:

$$\Delta \varphi_m^{(1)} = \frac{\varrho_m(\vec{r})}{\mu_1} \quad \text{für } x < 0 \quad (3.35)$$

und

$$\Delta \varphi_m^{(2)} = \frac{\varrho_m(\vec{r})}{\mu_2} \quad \text{für } x > 0 \quad (3.36)$$

wobei die Potentialfunktionen an der Stelle $x = 0$ folgende Rand- bzw. Stetigkeitsbedingungen erfüllen müssen:

$$H_{0t}^{(1)} = H_{0t}^{(2)} \quad (3.37)$$

$$B_{0n}^{(2)} - B_{0n}^{(1)} = \varrho_{mF} \quad (3.38)$$

Die physikalische magnetische Feldstärke $\vec{H}$ ergibt sich dann aus

$$\vec{H}^{(1,2)}(\vec{r}) = \vec{H}_w(\vec{r}) - \text{grad} \varphi_m^{(1,2)}(\vec{r}) \quad (3.39)$$

mit $\vec{H}_w(\vec{r})$ wie in (3.31) und $\varphi_m^{(1,2)}$ als Lösungen von (3.35) und 3.36).

³ vergleiche Herleitung von (3.25)

3.5.2 Kreisförmige Scheibe in homogenem magnetischen Feld

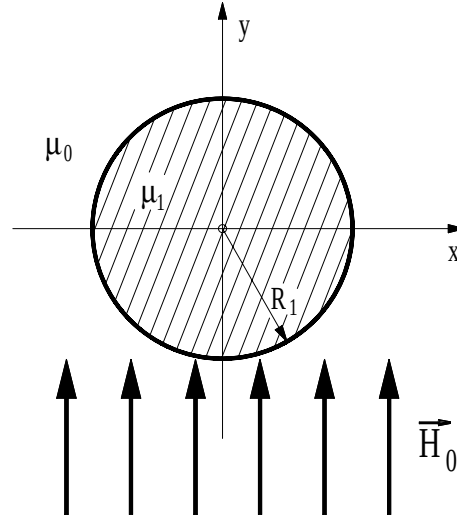


Abbildung 3.8: Kreisförmige Scheibe im magnetischen Feld.

Zu bestimmen ist die von der Störung hervorgerufene Feldverzerrung ($\rightarrow$ Abb. 3.8). Auch hier wollen wir die magnetische Feldstärke mittels eines Hilfsfeldes $\vec{H}_w(\vec{r})$ und eines magnetischen Skalarpotentials bestimmen.

Da in diesem Beispiel keine Ströme vorliegen, also $\vec{J}(\vec{r}) = 0$ gilt, folgt aus (3.21)

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{H}_w(\vec{r}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{H}_w(\vec{r}) &= -\text{grad} \psi(\vec{r}) \end{aligned} \quad (3.40)$$

$\vec{H}_w(\vec{r}) = 0$ ist eine mögliche Lösung dieser Gleichung. Hierfür verschwindet gemäß (3.22) dann auch die „künstliche“ magnetische Raumladung $\varrho_m(\vec{r})$. Zu lösen bleiben also die Potentialgleichungen

$$\Delta \varphi_m^{(1)} = 0 \quad \text{für } 0 \leq r \leq R_1 \quad (3.41)$$

$$\Delta \varphi_m^{(2)} = 0 \quad \text{für } r > R_1 \quad (3.42)$$

Zu beachten sind dabei die Randbedingungen

$$H^{(2)}(r \rightarrow \infty) = \vec{H}_0, \quad (3.43)$$

und die Stetigkeitsbedingungen

$$B_{n1} = B_{n2} \quad (3.44)$$

$$H_{t1} = H_{t2}. \quad (3.45)$$

Nach dem Lösen der Potentialgleichung ergibt sich die magnetische Feldstärke dann gemäß

$$\vec{H}^{(1,2)}(\vec{r}) = -\text{grad} \varphi_m^{(1,2)}(\vec{r})$$

(3.46)

3.6 Energie im magnetostatischen Feld

In völliger Analogie zur elektrostatischen Energiedichte, die durch (2.167) gegeben ist, ermittelt sich die Energiedichte des magnetostatischen Feldes in einem linearen, isotropen Medium gemäß

$$w_m = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \quad (3.47)$$

Sitz der magnetischen Energie ist das magnetische Feld selbst, also der felderfüllte Raum. Die gesamte Feldenergie ergibt sich durch Integration aus der Energiedichte (3.47):

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{H} \cdot \vec{B} dV \quad (3.48)$$

Der Wert des Integrals bleibt unverändert, wenn wir statt nur über den felderfüllten Raum zu integrieren über den gesamten Raum integrieren.

Unser Ziel ist nun, die Feldenergie nach Umformung von (3.48) durch die Stromdichte $\vec{J}(\vec{r})$ auszudrücken. Mit Hilfe der Vektorpotentialdarstellung (3.4) erhalten wir

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{A} dV.$$

Unter Benutzung der Vektoridentität

$$\text{div}[\vec{A}(\vec{r}) \times \vec{H}(\vec{r})] = \vec{H}(\vec{r}) \cdot \text{rot} \vec{A}(\vec{r}) - \vec{A}(\vec{r}) \cdot \text{rot} \vec{H}(\vec{r}) \quad (3.49)$$

ergibt sich

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_V \text{div}(\vec{A} \times \vec{H}) dV + \frac{1}{2} \iiint_V \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{H} dV.$$

Nun wenden wir den Gaußschen Integralsatz an und beachten das Durchflutungsgesetz $\text{rot} \vec{H} = \vec{J}$. Damit erhalten wir

$$W_m = \frac{1}{2} \oint_{\partial V} (\vec{A} \times \vec{H}) d\vec{a} + \frac{1}{2} \iiint_V \vec{A} \cdot \vec{J} dV. \quad (3.50)$$

Das Oberflächenintegral ist über die „Fernkugeloberfläche“ und über möglicherweise vorhandene innere Grenzflächen zu bilden.

Wir setzen voraus, daß die Stromversorgung $\vec{J}(\vec{r})$ ganz im Endlichen liegt und daß keine Oberflächenströme $\vec{J}_F$ vorhanden sind. Dann gilt für das Vektorpotential $\vec{A}$ gemäß (3.15) eine Proportionalität zu $1/r$ (in großer Entfernung) und aus dem Gesetz von Biot-Savart (3.17) folgt, daß die magnetische Feldstärke mindestens mit $1/r^2$ abfällt. Die Fernkugeloberfläche liefert also keinen Beitrag zum Oberflächenintegral.

An den gegebenenfalls vorhandenen Grenzflächen kann nur die Normalkomponente von $(\vec{A} \times \vec{H})$ zum Integral beitragen, da $d\vec{a}$ senkrecht auf der Grenzfläche steht. $(\vec{A} \times \vec{H})_n$ ist mit A_t und H_t (den Tangentialkomponenten) verknüpft. (Zerlege $\vec{A}$ und $\vec{H}$ in $A = A_\perp + A_\parallel$ und betrachte die Komponenten des Kreuzproduktes.) Da an einer Grenzfläche sowohl A_t als auch H_t (wegen fehlendem $\vec{J}_F$) stetig verlaufen, liefern auch die inneren Grenzflächen keinen Beitrag zum Oberflächenintegral in (3.50). Damit gilt für die Feldenergie

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{J}(\vec{r}) dV \quad (3.51)$$

und mit (3.15)⁴

$$W_m = \frac{1}{2} \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V_i} \iiint_V \frac{\vec{J}_i(\vec{r}_i) \cdot \vec{J}(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} dV dV_i \quad (3.52)$$

3.7 Beispiele zur Elektro- und Magnetostatik

Sie haben nun die grundlegenden Gleichungen und analytische Lösungsmethoden für die Elektrostatik und Magnetostatik kennengelernt.

Wie mehrfach erwähnt, sind die analytischen Lösungsverfahren nur auf einfache Probleme anwendbar. Die Bedeutung der Poissongleichung und Vektorpotentialgleichung ist jedoch grundlegender Art, denn auch Verfahren zur numerischen Feldberechnung gehen von diesen Gleichungen aus und lösen sie mittels numerischer Methoden zur Lösung partieller Differentialgleichungen.

Beispiele, die mittels analytischer Methoden lösbar sind, finden Sie in jedem Lehrbuch. Hier seien Ihnen noch einmal einige praktische Beispiele gezeigt. Die Felder wurden mit der sogenannten „Finiten Integrationstechnik“ ausgehend von der Poisson-Gleichung berechnet.

Zum Abschluß seien Ihnen noch einmal die Maxwell'schen Gleichungen in Erinnerung gebracht. Sie bilden die grundlegenden „Axiome“ zum Elektromagnetismus und müssen daher jedem Elektrotechniker und jeder Elektrotechnikerin stets präsent sein.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \varrho \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

⁴Vektorpotential in Analogie zum Coulombintegral

Kapitel 4

Stationäre Strömungsfelder

Im folgenden wollen wir das **Feld stationärer elektrischer Ströme** behandeln.

Stationäre Ströme stellen sich bei Vorhandensein einer Gleichspannungsquelle in einem Leiter ein. Sie sind mit den verursachenden elektrischen Feldern (Ohmsches Gesetz) über die Materialgleichung

$$\vec{J}(\vec{r}) = \kappa \vec{E}(\vec{r}) \quad (4.1)$$

verknüpft. (4.1) ist in linearen, isotropen Medien gültig. Im allgemeinen ist die **elektrische Leitfähigkeit** κ ortsabhängig.

Maxwellsche Gleichungen+ Ladungserhaltungssatz	Gleichungen für stationäre Strömungsfelder
$\text{rot} \vec{E} = - \underbrace{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}_{=0}$	$\text{rot} \vec{E} = \vec{0} \quad (4.2)$
$\text{rot} \vec{H} = \underbrace{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}_{=0} + \vec{J}$	$\text{rot} \vec{H} = \vec{J} \quad (4.3)$
$\text{div} \vec{D} = \varrho$	
$\text{div} \vec{B} = 0$	
$\text{div} \vec{J} + \underbrace{\frac{\partial \varrho}{\partial t}}_{=0} = 0$	$\text{div} \vec{J} = 0 \quad (4.4)$

(4.2) und (4.4) besagen, daß das stationäre Strömungsfeld wirbel- und quellenfrei ist. Wegen (4.2) kann das elektrische Feld wie in der Elektrostatik eindeutig durch ein skalares Potential φ beschrieben werden:

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi \quad (4.5)$$

Für $\kappa = \text{const.}$ ergibt sich damit aus (4.1) und (4.4)

$$\kappa \text{div} \vec{E} = -\kappa \text{div grad} \varphi = 0$$

und damit die Laplace-Gleichung

$$\Delta \varphi = 0 \quad (4.6)$$

Die Erzeugung stationärer Ströme ist möglich mittels sogenannter **eingepprägter Feldstärken** (z. B. durch Batterie erzeugt). Für diese gilt

$$U = \oint \vec{E}_E \cdot d\vec{s} \neq 0 \quad (4.7)$$

mit einer **Urspannung** U (früher oft: EMK = elektromotorische Kraft), die von einer Spannungsquelle erzeugt wird.

Weiterhin sei $\vec{E}$ ein vorhandenes homogenes Feld. Dann gilt

$$\vec{J} = \kappa(\vec{E} + \vec{E}_E) \quad (4.8)$$

$$\Rightarrow \oint \vec{J} \cdot d\vec{s} = \underbrace{\kappa \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}}_{=0 \text{ wegen (4.2)}} + \kappa \oint \vec{E}_E \cdot d\vec{s} \quad (4.9)$$

$$\stackrel{(4.7)}{\Rightarrow} U = \frac{1}{\kappa} \oint \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (4.10)$$

4.1 Ohmscher Widerstand

Nun definieren wir den Widerstand R , einen vom Strom unabhängigen Geometrie- und Materialfaktor, gemäß

$$IR = U = \frac{1}{\kappa} \oint \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (4.11)$$

wobei der Strom I definiert ist als

$$I = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A}. \quad (4.12)$$

Wir erhalten also

$$R = \frac{1}{\kappa} \frac{\oint \vec{J} \cdot d\vec{s}}{\iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A}} \quad (4.13)$$

Nach Zerlegung in einen äußeren Widerstand R_a und einen inneren Widerstand R_i (Spannungsquelle) erhalten wir folgendes für einen Leiter der Leitfähigkeit κ , dessen Stirnflächen auf den konstanten Potentialen φ_1 und φ_2 gehalten werden ($\rightarrow$ Abb. 4.1):

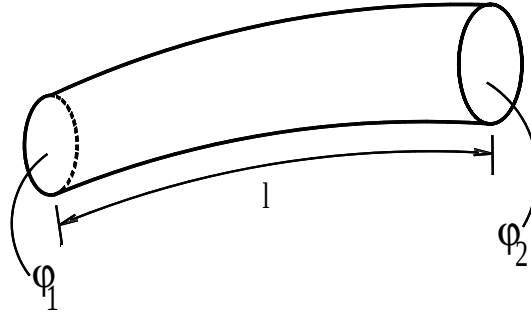


Abbildung 4.1: Leiter der Leitfähigkeit κ .

$$\frac{1}{\kappa} \int_a \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s} = \varphi_1 - \varphi_2$$

a bezeichnet den Außenkreis außerhalb der Spannungsquelle, er ist wegunabhängig. Das Integral im Nenner von (4.13) ist gerade gleich dem Strom I

$$I = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A},$$

wobei dieser auf Grund der Stationarität unabhängig vom gewählten Querschnitt ist.

Für den Spezialfall eines Leiters mit konstantem Querschnitt und konstanter Stromdichte erhalten wir aus (4.13) die übliche Widerstandsformel

$$R_a = \frac{1}{\kappa} \frac{\int_a dl}{\iint_A dA} = \frac{l}{\kappa A}. \quad (4.14)$$

4.2 Randbedingungen an Materialgrenzen

An der Grenzfläche zweier Medien ergibt sich aus dem Ladungserhaltungssatz ein Zusammenhang zwischen den Normalkomponenten von $\vec{J}$ und der Flächenladung:

$$J_{2n} - J_{1n} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0. \quad (4.15)$$

Dies folgt bei Integration über ein infinitesimales Volumen ($\rightarrow$ Abb. 4.2).

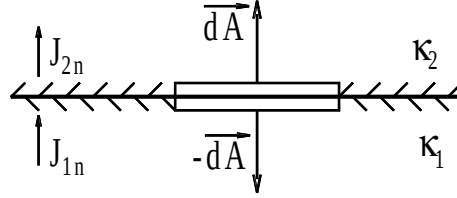


Abbildung 4.2: Infinitesimal kleines Volumen an der Grenzfläche.

Wegen der Stationarität folgt

$$J_{1n} = J_{2n} \quad (4.16)$$

$$\Rightarrow \kappa_1 E_{1n} = \kappa_2 E_{2n} \quad (4.17)$$

Mit (4.17) und

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (4.18)$$

folgt das **Brechungsgesetz** für $\vec{J}$ - und $\vec{E}$ -Linien:

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \quad (4.19)$$

Ein wichtiger Spezialfall ist der eines unendlich guten Leiters ($\kappa_2 \rightarrow \infty$). Dann gilt bei endlichem κ_1 , daß $\kappa_1/\kappa_2 \rightarrow 0$ und damit $\tan \alpha_1 = 0$, d. h. die Stromlinien stehen im Leiter endlicher Leitfähigkeit senkrecht auf der Grenzfläche ($\rightarrow$ Abb. 4.3).

Die Stromlinien an der Grenzfläche zu einem Nichtleiter ($\kappa_2 = 0$) verlaufen hingegen parallel zur Grenzfläche ($\rightarrow$ Abb. 4.4).

Die Grenzfläche zu einem idealen Leiter ist somit Äquipotentialfläche mit

$$\varphi = \text{const.}, \quad (4.20)$$

während diejenige zu einem Nichtleiter durch die Randbedingung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad (4.21)$$

gekennzeichnet ist.

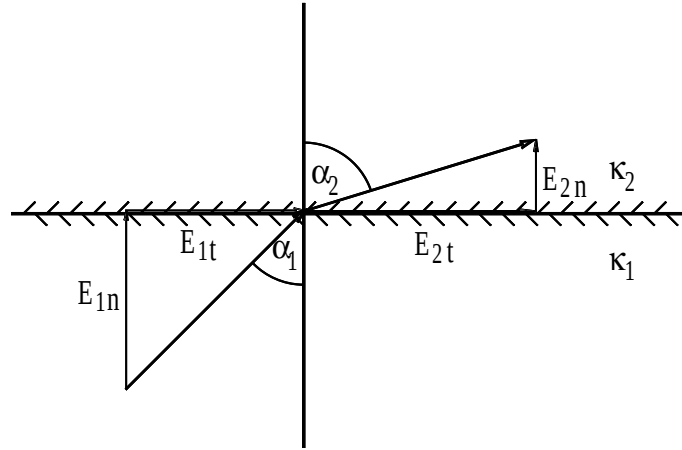


Abbildung 4.3: Stromlinien an Grenzfläche zu einem idealen Leiter.

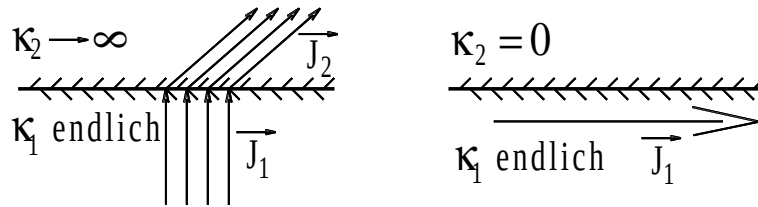


Abbildung 4.4: Stromlinien an Grenzfläche zu einem Nichtleiter.

4.3 Formale Analogie zwischen $\vec{D}$ und $\vec{J}$

$$\vec{E} = \text{grad}\varphi$$

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon \vec{E} \\ \vec{D} &= -\varepsilon \text{grad}\varphi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{J} &= \kappa \vec{E} \\ \vec{J} &= -\kappa \text{grad}\varphi\end{aligned}$$

im ladungsfreien Raum:

im stationären Fall:

$$\text{div}\vec{D} = 0$$

$$\text{div}\vec{J} = 0$$

$$\implies \Delta\varphi = 0 \quad \text{im homogenen Raum}$$

Stetigkeit der Normalkomponenten an Grenzflächen:

$$D_{2n} = D_{1n} \quad J_{2n} = J_{1n}$$

Randbedingungen für Tangentialkomponenten:

$$E_{2t} = E_{1t}$$

$$\frac{D_{2t}}{\varepsilon_2} = \frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} \quad \frac{J_{2t}}{\kappa_2} = \frac{J_{1t}}{\kappa_1}$$

Brechungsgesetz:

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}$$

Auf Grund dieser formalen Analogie ist es möglich, die in Kapitel 2.2 hergeleiteten formalen Methoden (Separation) zur Lösung von Randwertproblemen für Strömungsfelder zu verwenden. Gemäß (4.20) und (4.21) ergeben sich dabei Dirichletsche Randwertprobleme bei Leitern, die von unendlich guten Leitern begrenzt sind, und Neumannsche Randwertprobleme bei einer Begrenzung durch Nichtleiter sowie gemischte Randwertprobleme, falls beide Begrenzungsarten vorliegen.

Kapitel 5

Quasistationäre Felder

Für zeitabhängige Felder kann eine Unterteilung in „langsam“ und „schnell“ veränderliche Felder vorgenommen werden. Die quasistatischen Gesetze für „langsam“ veränderliche Felder ergeben sich aus den Maxwellschen Gleichungen durch **Vernachlässigung der magnetischen Induktion¹ oder des elektrischen Verschiebungsstromes²**. Die elektromagnetischen Wellen, die aus der Kopplung der magnetischen Induktion und des Verschiebungsstroms resultieren, werden somit in der Elektro- und Magneto-Quasistatik vernachlässigt. In den quasistatischen Gleichungen treten keine Zeitableitungen auf. Dies bedeutet nicht, daß die Quellen und damit die Felder selbst zeitunabhängig sind. Vielmehr sind die Felder für gegebene Quellen zu einem bestimmten Zeitpunkt für eben diesen Zeitpunkt bestimmt – unabhängig vom Zustand der Quellen einen Augenblick früher.

Die Quellen sind im allgemeinen nicht bekannt, sondern durch die Felder selbst über die **Lorentz-Kraft**

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (5.1)$$

die auf vorhandene Teilchen der Ladung q und der Geschwindigkeit $\vec{v}$ wirkt, bestimmt. In diesem Zusammenhang müssen dann wieder Zeitabhängigkeiten einbezogen werden. Die „sekundären“ Felder $\vec{H}$ in der Elektro-Quasistatik (kurz EQS) und $\vec{E}$ in der Magnet-Quasistatik (kurz MQS) werden aus zeitabhängigen Gleichungen gewonnen. In der Elektro-Quasistatik wird die Kontinuitätsgleichung (Ladungserhaltungssatz)

$$\operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \oint_{\partial V} \vec{J} \cdot d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \varrho dV = 0 \quad (5.2)$$

als zeitabhängige Gleichung verwendet, in der Magneto-Quasistatik die erste Maxwellsche Gleichung

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (5.3)$$

5.1 Darstellung durch komplexe Feldgrößen

Bei vielen Anordnungen aus der Praxis weisen die Feldgrößen einen sinusförmigen Zeitverlauf auf. Man spricht dann von einer harmonischen Zeitabhängigkeit der Felder. Ein Beispiel sind Systeme (z. B. Schaltungen aus linearen Bauelementen) mit sinusförmigen Eingangsgrößen nach Erreichen des eingeschwungenen Zustands. Darüber hinaus läßt sich jede beliebige Funktion aus sinusförmigen Funktionen zusammensetzen: periodische Funktionen durch Fourier-Reihen, aperiodische Funktionen durch Fouriersche Integrale. Das Rechnen wird dabei wesentlich vereinfacht, wenn

¹ $-\partial \vec{B} / \partial t$

² $\partial \vec{D} / \partial t$

statt der Winkelfunktionen $\cos(\omega t)$ bzw. $\sin(\omega t)$ die komplexwertige harmonische Exponentialfunktion $\exp(j\omega t)$ benutzt wird. Wegen

$$A(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}\{\underline{A}_\omega e^{j\omega t}\}$$

besteht ein eindeutiger Zusammenhang zwischen der **komplexen Amplitude** der harmonischen Exponentialfunktion $\underline{A}_\omega = A_0 e^{j\varphi}$ und der Amplitude A_0 und dem Phasenwinkel φ der Cosinusfunktion. Wir machen daher für zeitharmonische Felder folgenden Ansatz

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}(\vec{r}) \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}\{\underline{\vec{E}}(\vec{r}) e^{j\omega t}\} \\ \vec{H}(\vec{r}, t) &= \vec{H}(\vec{r}) \cos(\omega t + \psi) = \operatorname{Re}\{\underline{\vec{H}}(\vec{r}) e^{j\omega t}\}\end{aligned}\quad (5.4)$$

mit den komplexen Amplituden

$$\begin{aligned}\underline{\vec{E}}(\vec{r}) &= \vec{E}(\vec{r}) e^{j\varphi} \\ \underline{\vec{H}}(\vec{r}) &= \vec{H}(\vec{r}) e^{j\psi}\end{aligned}\quad (5.5)$$

wobei φ und ψ die Phasenwinkel der Cosinusfunktion sind. Häufig werden $\underline{\vec{E}}$ und $\underline{\vec{H}}$ auch als **Phasoren** bezeichnet.

5.2 Elektro-Quasistatik

Die Elektro-Quasistatik ist eine geeignete Näherung für niederfrequente Felder, bei denen die Wirbelfreiheit des elektrischen Feldes angenommen werden darf (d. h. die magnetische Induktion vernachlässigt werden darf), aber Effekte des Verschiebungsstroms wichtig sind.

5.2.1 Die grundlegenden Gleichungen

Es wird also

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \neq 0$$

angenommen. Die Maxwell'schen Gleichungen lauten dann

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0} \quad (5.6)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \quad (5.7)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \varrho \quad (5.8)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (5.9)$$

mit $\vec{J} = \vec{J}_L + \vec{J}_E = \kappa \vec{E} + \vec{J}_E$ (Leitungsstromdichte + eingeprägte Stromdichte), d. h. es werden keine bewegten elektrischen Ladungen angenommen.

Bei harmonischer Zeitabhängigkeit und der Darstellung in durch die komplexen Feldgrößen (5.4) ergibt sich nach Ausführen der Differentiation und Herauskürzen des Terms $e^{j\omega t}$ aus (5.6)-(5.9)

$$\operatorname{rot} \underline{\vec{E}} = \vec{0} \quad (5.10)$$

$$\operatorname{rot} \underline{\vec{H}} = j\omega \underline{\vec{D}} + \kappa \underline{\vec{E}} + \underline{\vec{J}}_E \quad (5.11)$$

$$\operatorname{div} \underline{\vec{D}} = \varrho \quad (5.12)$$

$$\operatorname{div} \underline{\vec{B}} = 0 \quad (5.13)$$

Die Gleichungen (5.10) und (5.12) reichen aus, um den Phasor $\underline{\vec{E}}$ eindeutig zu bestimmen. Deshalb sind

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{rot} \vec{E} & = & \vec{0} \\ \operatorname{div} \vec{D} & = & \varrho \end{array}$$

die grundlegenden Gleichungen für die Elektro-Quasistatik.

5.2.2 Komplexes skalares Potential

Da das elektro-quasistatische Feld wirbelfrei ist, kann es eindeutig durch eine skalare Potentialfunktion dargestellt werden.

Im zeitharmonischen Fall gilt $\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}$ mit der komplexen Amplitude $\vec{E}$. Analog zum reellen Fall wird ein **komplexes** skalares Potential φ angesetzt:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi \quad (5.14)$$

Wegen $\operatorname{div} \operatorname{rot} \equiv 0$ ergibt sich für das System (5.10)-(5.13) nach Anwendung der Divergenz auf (5.11) die Äquivalenz

$$\operatorname{div}\{(j\omega\varepsilon + \kappa)\vec{E} + \vec{J}_E\} = 0 \quad (5.15)$$

$$\iff \operatorname{div}\{(j\omega\varepsilon + \kappa)\vec{E}\} = -\operatorname{div} \vec{J}_E \quad (5.16)$$

Das Einsetzen von (5.14) in (5.16) liefert

$$\operatorname{div}\{(j\omega\varepsilon + \kappa)\operatorname{grad} \varphi\} = \operatorname{div} \vec{J}_E.$$

Im Fall homogener isotroper Medien kann durch Vorziehen der Konstanten $(j\omega\varepsilon + \kappa)$ und Division durch diesen Ausdruck folgende Poisson-Gleichung abgeleitet werden:

$$\Delta \varphi = \frac{1}{j\omega\varepsilon + \kappa} \operatorname{div} \vec{J}_E$$

Diese Gleichung ist formal identisch mit der Problemgleichung der Elektrostatik, allerdings mit einem komplexen Potential und komplexer Inhomogenität.

5.3 Magneto-Quasistatik

Werden langsam veränderliche Felder betrachtet, bei denen die Effekte der magnetischen Flußdichte dominieren, so kann gegenüber den vollständigen Maxwell'schen Gleichungen der Beitrag durch die Verschiebungsströme vernachlässigt werden, d. h. es gilt

$$\max_{\vec{r} \in \mathbf{R}^3} \left| \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right| \ll \max_{\vec{r} \in \mathbf{R}^3} |\vec{J}| \quad \text{mit } \vec{J} = \vec{J}_L + \vec{J}_E$$

Das resultierende System von Gleichungen ist dann gegeben durch

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{rot} \vec{E} & = & -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{H} & = & \vec{J} \\ \operatorname{div} \vec{D} & = & \varrho \\ \operatorname{div} \vec{B} & = & 0 \end{array}$$

Bei harmonischer Zeitabhängigkeit kann die Darstellung mit komplexen Feldgrößen gemäß Gleichung (5.4) verwendet werden und nach dem Ausführen der Differentiation und dem Herauskürzen des Terms $e^{j\omega t}$ ergeben sich die Maxwell'schen Gleichungen zu

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -j\omega \vec{B} \quad (5.17)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} \quad (5.18)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \varrho \quad (5.19)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (5.20)$$

Die Gleichungen (5.15) und (5.17) reichen aus, um den Phasor $\vec{H}$ eindeutig zu bestimmen. Deshalb sind

$$\begin{array}{l} \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \end{array}$$

die grundlegenden Gleichungen für die Magneto-Quasistatik. Die Stetigkeitsbedingung

$$\operatorname{div} \vec{J} = 0$$

folgt aus Gleichung (5.15).

Es sei angemerkt, daß die Magneto-Quasistatik in der Literatur häufig einfach als Quasistatik bezeichnet wird, während die Elektro-Quasistatik in vielen Lehrbüchern gar nicht behandelt wird.

5.4 Bedingungen an quasistatische Felder

Wann ist die quasistatische Näherung ein geeignetes Modell für ein gestelltes Problem? Hierzu kann für die **Fehlerfelder** ein Vergleich mit den vollständigen Maxwell'schen Gleichungen vorgenommen werden.

Es werden Anordnungen gewählt, die sich höchstens um den Faktor 2 unterscheiden $\rightarrow$ **typische Länge** L . Für Musterbeispiele siehe Abb. 5.1 und Abb. 5.2. Die Faustregel für die Klassifizierung bei der Darstellung mittels „idealer Leiter“ und „idealer Isolatoren“ lautet: erniedrige die Frequenz der anregenden Quelle soweit, daß die Felder statisch werden;

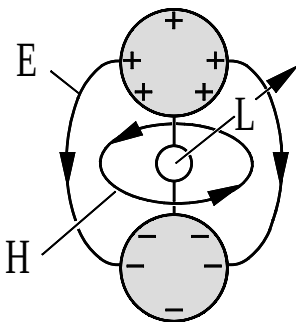


Abbildung 5.1: EQS: ideal leitende Kugel. Der Antrieb erfolgt durch eine Spannungsquelle.

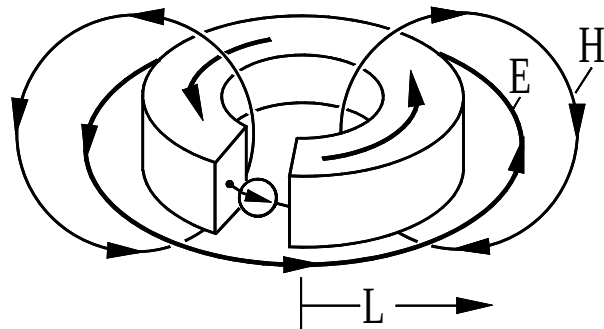


Abbildung 5.2: MQS: ideal leitende Schleife. Die Anregung erfolgt durch eine Stromquelle.

das Magnetfeld verschwindet
im Grenzfall $\rightarrow$ EQS

das elektrische Feld verschwindet
im Grenzfall $\rightarrow$ MQS

(Viele Metalle sind sehr gute Leiter, viele Gase, Flüssigkeiten und Festkörper sehr gute Isolatoren.)

1. Das Ersetzen der räumlichen Ableitungen in rot und div durch $1/L$:

$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \varrho \\ \rightarrow E &= \frac{\varrho L}{\varepsilon_0} \\ \text{mit } E &= \text{typischer Wert von } \vec{E} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{J} \\ \rightarrow H &= JL \\ \text{mit } H, J &= \text{typische Werte von } \vec{H}, \vec{J} \end{aligned} \tag{5.21}$
--	--

2. Bei sinusförmiger Anregung mit der Kreisfrequenz ω ist $\tau = 1/\omega$ die charakteristische Zeit der sinusförmigen Antwort im eingeschwungenen Zustand.

zeitveränderliche Ladung

$\rightarrow$ verursacht Strom

$\rightarrow$ induziert zeitveränderliches $\vec{H}$ -Feld

zeitveränderliche Ströme

$\rightarrow$ zeitveränderliches $\vec{H}$ -Feld

$\rightarrow \vec{E}$ -Feld

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \varrho \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \rightarrow H &= \frac{\varepsilon_0 E L}{\tau} \stackrel{(5.21)}{=} \frac{L^2 \varrho}{\tau} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{J} \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \rightarrow E &= \frac{\mu_0 H L}{\tau} \stackrel{(5.21)}{=} \frac{\mu_0 J L^2}{\tau} \end{aligned}$$

3. Das Einsetzen dieser Abschätzungen in die vollständigen Maxwellschen Gleichungen und die erneute Abschätzung ergibt:

$\begin{aligned} E_{\text{Fehler}} &= \frac{\mu_0 \varrho L^3}{\tau^2} \\ \frac{E_{\text{Fehler}}}{E_{\text{QS}}} &= \frac{\mu_0 \varepsilon_0 L^2}{\tau^2} \end{aligned}$	$\begin{aligned} H_{\text{Fehler}} &= \frac{\varepsilon_0 \mu_0 J L^3}{\tau^2} \\ \frac{H_{\text{Fehler}}}{H_{\text{QS}}} &= \frac{\varepsilon_0 \mu_0 L^2}{\tau^2} \end{aligned}$
--	--

Dies ist der relative Fehler, der gemacht wird, wenn die quasistatischen Gleichungen statt der vollständigen Maxwellschen Gleichungen verwendet werden.

Wegen der Annahme genügend langsamer Zeitvariation (kleiner Frequenz) und genügend kleiner Dimension haben wir

$$\frac{\mu_0 \varepsilon_0 L^2}{\tau^2} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{L}{c} \ll \tau}$$

mit der Lichtgeschwindigkeit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}.$$

Die quasistatische Näherung ist gültig, wenn eine elektromagnetische Welle in einer Zeit über eine charakteristische Länge L der Anordnung fortschreiten kann, die kurz ist im Vergleich mit Zeiten τ , die von Interesse sind.

Wegen der Gleichheit der Bedingungen bei EQS und MQS wird die Entscheidung mit Hilfe der statischen Felder getroffen. In unseren Musterbeispielen:

Die Kugeln sind bei konstanter Spannungsquelle geladen. Die Ladung verursacht ein elektrisches Feld.

Es existieren keine Ströme und daher kein magnetisches Feld. Das statische System ist vom elektrischen Feld dominiert und es ist angemessen die Anordnung als elektroquasistatisch zu bezeichnen – auch bei zeitvariabler Anregung.

Bei Anregung der Schleife durch eine Gleichstromquelle verursacht der zirkulierende Strom ein magnetisches Feld, aber es existieren keine Ladungen und daher kein elektrisches Feld.

Die MQS ist somit eine angemessene Näherung.

Beispiele

1. Kreisrunder Plattenkondensator
Anregung 1MHz; EQS ist gute Näherung bei Plattenradius $\ll 300\text{m}$
2. Prozesse in Transistoren und Bildröhre des Fernsehers, die die Signale in Bild und Ton umwandeln
3. Nervenleitung und elektrische Aktivitäten im Gehirn
4. Hochspannungsübertragungssystem

1. Skin-Effekt in Übertragungsleitungen (siehe Kapitel 5.6)
2. Felder im Kraftwerksgenerator

5.5 Die Induktionsgleichung

Im weiteren wollen wir einige Effekte betrachten, die in der magneto-quasistatischen Näherung behandelt werden können, wie z. B. der Skin-Effekt.

5.5.1 Induktion durch zeitliche Änderung von $\vec{B}$

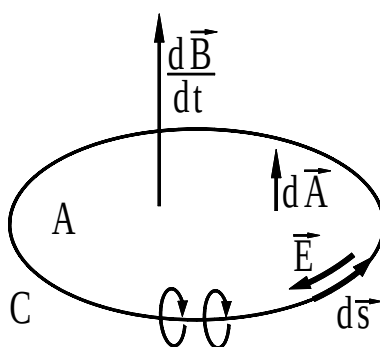


Abbildung 5.3: Leiter der Leitfähigkeit κ .

Gegeben sei ein zeitlich veränderliches Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r}, t)$ und eine ortsfeste Kurve C (z. B. aus unendlich dünnem leitfähigem Material). A sei die von C umfaßte Fläche ($\rightarrow$ Abb. 5.3). A wird vom Fluß

$$\Psi_m = \iint_A \vec{B}(\vec{r}, t) d\vec{A}$$

durchsetzt. In $\vec{B}(\vec{r}, t)$ wird ein Feld $\vec{E}(\vec{r}, t)$ induziert, für das die 1. Maxwellsche Gleichung, das Induktionsgesetz, gilt:

$$\text{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (5.22)$$

$$\text{bzw.} \quad \oint_C \vec{E} d\vec{s} = -\iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{A} \quad (5.23)$$

Dies ist auch gleich $\partial \Psi_m / \partial t$, der zeitlichen Ableitung des Induktionsflusses.

Für einen zeitlich wachsenden Induktionsfluß durch A folgt aus (5.23), daß in einem Draht ring C durch das elektrische Feld $\vec{E}$ ein Strom I in Richtung $-d\vec{s}$ fließt. Dessen Magnetfeld wirkt der Änderung des Flusses entgegen.

Lense Regel: Der induzierte Strom fließt so, daß sein Magnetfeld der Änderung des Induktionsflusses entgegenwirkt.

Man kann auch

$$U_i = \oint_C \vec{E} d\vec{s} = -\frac{\partial \Psi_m}{\partial t}$$

schreiben, wobei U_i die im geschlossenen Stromkreis C **induzierte Urspannung** (oder Ringspannung) ist. Wenn der Draht ring C den Widerstand R hat, gilt auch ($\rightarrow$ Abb. 5.4)

$$U_i = \oint_C \vec{E} d\vec{s} = RI.$$

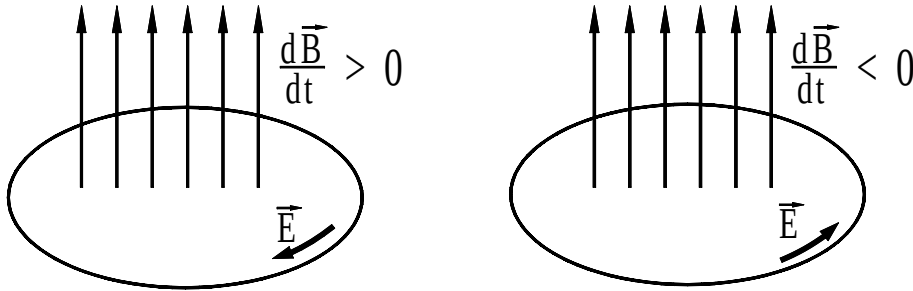


Abbildung 5.4: Richtung des induzierten Feldes bei zunehmenden und abnehmenden Feld $\vec{B}$.

5.5.2 Induktion durch Bewegung des Leiters

In einem magnetischen Feld $\vec{B}$ wirkt auf ein Teilchen der Ladung Q und der Geschwindigkeit $\vec{v}$ die **Lorentz-Kraft**

$$\vec{F} = Q \vec{v} \times \vec{B}. \quad (5.24)$$

Sie kann auch als Wirkung einer elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ aufgefaßt werden, die das Teilchen in einem bewegten Bezugssystem erfährt, wobei das elektrische Feld dann gegeben ist durch

$$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}. \quad (5.25)$$

Bewegen wir nun eine geschlossene Leiterschleife in einem zeitlich konstanten Magnetfeld, so gilt für das Linienintegral längs der Schleife S ($\rightarrow$ Abb. 5.5)

$$\oint_S \vec{E} d\vec{s} = \oint_S (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{s} = -\oint_S \vec{B} (\vec{v} \times d\vec{s})$$

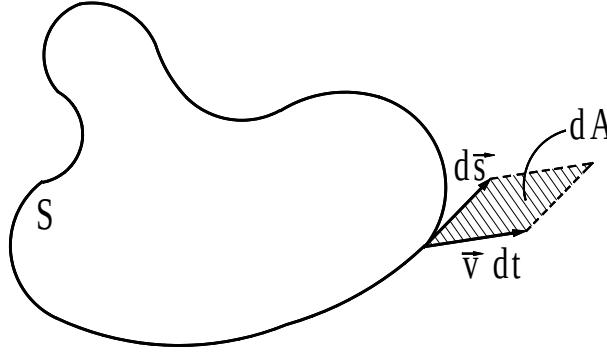


Abbildung 5.5: Geschlossene Leiterschleife im zeitlich konstanten Magnetfeld.

Dabei ist

$$\vec{v} \times d\vec{s} dt = d\vec{A}$$

das von dem Wegelement $d\vec{s}$ in der Zeit dt überstrichene Flächenelement $d\vec{A}$. Wenn wir nun den Anteil der Flußänderung berücksichtigen, der von der Bewegung der Leiterschleife im zeitlich konstanten Feld $\vec{B}$ herrührt, ist

$$\begin{aligned} U_i &= \oint_S \vec{E} d\vec{s} = - \oint_S \vec{B} \frac{d\vec{A}}{dt} = - \frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} d\vec{A} \\ &= - \frac{\partial \Psi_m}{\partial t} \end{aligned} \quad (5.26)$$

Die Lorentz-Kraft führt also für eine geschlossene Leiterschleife dazu, daß das Linienintegral $\oint \vec{E} d\vec{s}$ durch die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses Ψ_m gegeben ist.

Statt einer geschlossenen Leiterschleife können wir auch z. B. ein Drahtstück quer zum Magnetfeld bewegen ($\rightarrow$ Abb. 5.6). Dadurch entsteht im Leiter zunächst eine induzierte Feldstärke $\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$, deren Betrag

$$E = v B \quad (5.27)$$

ist. Folglich fließen im Leiter elektrische Ströme, und zwar so lange, bis das Feld innerhalb des Leiters zu $\vec{E} = 0$ geworden ist. Die Ströme transportieren Ladungen auf die Leiteroberfläche. Das elektrostatische Feld dieser Ladungen kompensiert schließlich das im Leiterinnern induzierte Feld

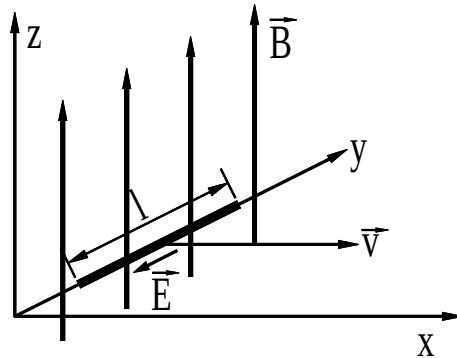


Abbildung 5.6: Drahtstück quer zum konstanten Magnetfeld bewegt.

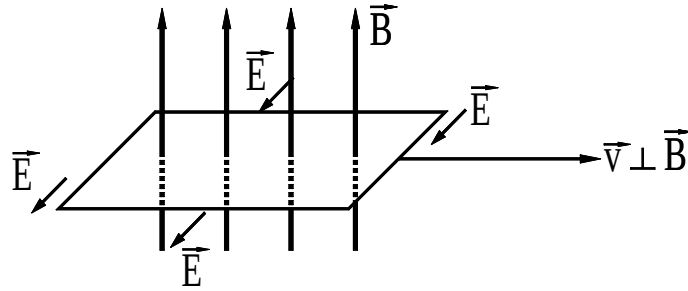


Abbildung 5.7: Leiterschleife quer zum konstanten Magnetfeld bewegt.

Daher herrscht im Endzustand außerhalb des Leiters das entsprechende elektrostatische Feld. Seine Spannung zwischen den Enden des bewegten Drahtes ist identisch zur ursprünglich im Leiter induzierten Spannung mit dem Betrag

$$|U| = v B l. \quad (5.28)$$

Bei Bewegung einer Leiterschleife quer zu einem homogenen Magnetfeld heben sich die Teilspannungen gegenseitig auf, so daß keine Spannung induziert wird ($\rightarrow$ Abb. 5.7). Der die Leiterschleife durchsetzende Fluß bleibt unverändert.

Wird nur ein Teil der Leiterschleife bewegt, wobei dieser Teil in Kontakt mit dem Rest der Leiterschleife bleibt, so wird eine Ringspannung $v B l$ hervorgerufen ($\rightarrow$ Abb. 5.8). Dies ergibt sich aus (5.28) und entspricht der zeitlichen Flußänderung, denn es gilt

$$\begin{aligned} \Psi_m &= B l a(t) = B l (a_0 + vt) \\ U_i &= -\frac{d\Psi_m}{dt} = -v B l. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Das Induktionsgesetz ist für viele technische Anwendungen von großer Bedeutung. Die meisten Generatoren beruhen auf der Spannung, die in einer Leiterschleife erzeugt wird, wenn sie in einem Magnetfeld rotiert. Bei diesem Prozeß wird also mechanische Energie in elektrische Energie umgewandelt ($\rightarrow$ Abb. 5.9).

ω sei die Winkelgeschwindigkeit. Der zum Zeitpunkt t umfaßte Fluß ist

$$\Psi_m = B a l \cos(\omega t) \quad (5.30)$$

und somit

$$U_i = \oint \vec{E} d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\Psi_m = -\dot{\Psi}_m = B\omega a l \sin(\omega t) \quad (5.31)$$

die induzierte Spannung. Das ist das **Prinzip des Wechselstromgenerators**.

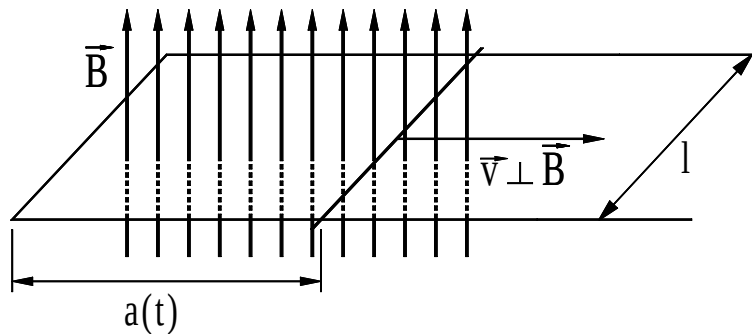


Abbildung 5.8: Erzeugung einer Ringspannung.

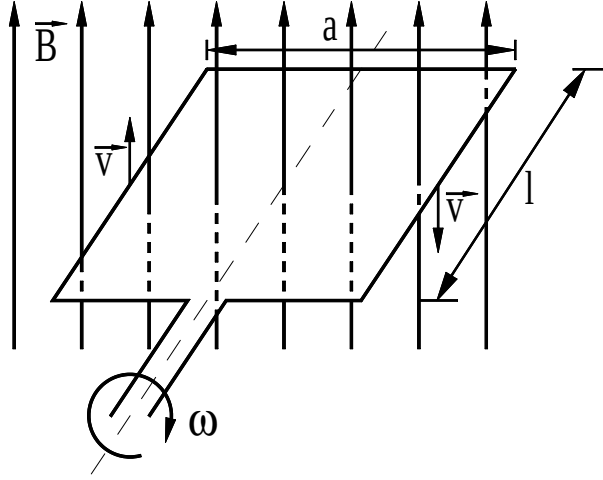


Abbildung 5.9: Prinzip des Wechselstromgenerators.

5.5.3 Induktion durch gleichzeitige Änderung von $\vec{B}$ und Ort des Leiters

Die beiden bisher behandelten Effekte können auch gleichzeitig auftreten. Sie addieren sich dann:

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} d\vec{s} &= -\frac{\partial}{\partial t} \iint_A \vec{B} d\vec{A} - \oint_S \vec{B} (\vec{v} \times d\vec{s}) \\ &= -\frac{d}{dt} \Psi_m \end{aligned} \quad (5.32)$$

wobei d/dt die Zeitableitung des **Gesamtflusses** meint.

Wir verwenden nun den Vektorpotentialansatz $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ sowie die Vertauschungsregel für das Kreuzprodukt und erhalten mit Hilfe des Satzes von Stokes

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} d\vec{s} &= -\frac{\partial}{\partial t} \iint_F \text{rot} \vec{A} d\vec{F} + \oint_S (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{s} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \iint_F \text{rot} \vec{A} d\vec{F} + \iint_F \text{rot} (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{F} \\ \Leftrightarrow \quad \iint_F \text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{v} \times \vec{B} \right) d\vec{F} &= 0 \end{aligned}$$

Da dies für jede beliebige Fläche F gilt, ist auch

$$\text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{v} \times \vec{B} \right) = 0.$$

Deshalb muß für eine geeignete skalare Funktion φ

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{v} \times \vec{B} = -\text{grad} \varphi \quad (5.33)$$

gelten. Dabei ist $\vec{E}$ das Feld, das ein Beobachter „sehen“ würde, der sich mit dem Leiter bewegt.

Ein ruhender Beobachter sieht das Feld

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (5.34)$$

(5.34) ist eine Verallgemeinerung von $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$ aus Kapitel 2.1.1 für den zeitabhängigen Fall.

5.6 Die Diffusion von elektromagnetischen Feldern

5.6.1 Die Diffusionsgleichungen für $\vec{E}$, $\vec{J}$, $\vec{B}$ und $\vec{A}$

In der Magneto-Quasistatik lauten die Maxwellschen Gleichungen

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.35)$$

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{J} \rightarrow^3 \quad (5.36)$$

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad (5.37)$$

$$\text{div}\vec{D} = \varrho \quad (5.38)$$

Zur Lösung werden noch die Materialgleichungen

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (5.39)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (5.40)$$

$$\vec{J}_L = \kappa \vec{E} \quad (5.41)$$

benötigt. Die Materialgrößen ε , μ , κ werden im folgenden als ortsunabhängig angenommen. Bei Nichtvorhandensein freier Ladungen ($\varrho = 0$) ergibt sich aus (5.38) und (5.39)

$$\text{div}\vec{E} = 0 \quad (5.42)$$

Aus (5.35), (5.40), (5.36), (5.41) folgt

$$\begin{aligned} \text{rot rot}\vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot}\vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t} \mu \text{rot}\vec{H} = -\frac{\partial}{\partial t} \mu \vec{J} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \mu \kappa \vec{E} \end{aligned}$$

Nun ist wegen (5.42) und nach der Vektorbeziehung

$$\text{rot rot}\vec{A} = \text{grad div}\vec{A} - \Delta \vec{A}$$

andererseits

$$\begin{aligned} \text{rot rot}\vec{E} &= \text{grad div}\vec{E} - \text{div grad}\vec{E} \\ &= \text{grad div}\vec{E} - \Delta \vec{E} \\ &= -\Delta \vec{E} \quad \text{wegen (5.42),} \end{aligned}$$

³Vernachlässigung des Verschiebungsstromes

so daß wir durch Vergleich die Gleichung

$$\Delta \vec{E} = \mu \kappa \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (5.43)$$

erhalten. Mit (5.41) folgt daraus auch

$$\Delta \vec{J} = \mu \kappa \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \quad (5.44)$$

In ähnlicher Weise erhalten wir für $\vec{B}$ aus den Gleichungen (5.36), (5.41), (5.35) und (5.37)

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \vec{H} &= \text{rot } \vec{J} = \text{rot } \kappa \vec{E} = \kappa \text{rot } \vec{E} \\ &= -\kappa \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \text{rot rot } \vec{B} \\ &= -\frac{1}{\mu} \text{div grad } \vec{B} = -\frac{1}{\mu} \Delta \vec{B} \end{aligned}$$

d. h.

$$\Delta \vec{B} = \mu \kappa \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.45)$$

Wegen $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ folgt aus (5.45) bei geeigneter Eichung von $\vec{A}$ auch

$$\Delta \vec{A} = \mu \kappa \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (5.46)$$

Durch Bildung der Rotation auf beiden Seiten von (5.46) ergibt sich wieder (5.45).

Wir erhalten also für $\vec{E}$, $\vec{J}$, $\vec{B}$ und $\vec{A}$ jeweils denselben Typ von Gleichung. (Die Randbedingungen unterscheiden sich aber.) Diese Gleichung, die sogenannte **Diffusionsgleichung**, ist von großer Bedeutung in der gesamten Physik. Der Name kommt daher, daß sie als skalare Gleichung die Diffusion von Teilchen beschreibt. Thermodynamisch betrachtet, beschreibt sie einen irreversiblen Prozeß. Auch die Wärmeleitungsgleichung ist vom Typ der Diffusionsgleichung. Bei den Gleichungen (5.43)-(5.46) haben wir es mit **Vektordiffusionsgleichungen** zu tun. Auch sie beschreiben irreversible Prozesse. Rein formal drückt sich die Irreversibilität in diesen Gleichungen im Vorkommen einer ersten Zeitableitung aus. Falls wir t durch $-t$ ersetzen, ändert sich nämlich die Gleichung, d. h. sie ist gegen Zeitumkehr nicht invariant. Der Prozeß kann also nicht einfach rückwärts ablaufen.

Später werden wir die sogenannte Wellengleichung behandeln. Die hat für $\vec{E}$ z. B. die Form

$$\Delta \vec{E} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (5.47)$$

Der einzige Unterschied zu (5.43) ist die zweite Zeitableitung, wodurch sie invariant gegenüber einer Zeitumkehr wird. Sie beschreibt Vorgänge (nämlich Wellen), die ebenso rückwärts wie vorwärts in der Zeit ablaufen können.

5.6.2 Typeneinteilung partieller Differentialgleichungen

Die Mathematik unterscheidet 3 Typen partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung: **elliptische**, **parabolische**, **hyperbolische**. Diese 3 Typen sind auch von wesentlicher Bedeutung in den Naturwissenschaften und beschreiben verschiedene Naturvorgänge.

Wir betrachten hier nur die beiden Variablen (x, y) bzw. (x, t) .

Die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0} \quad (\text{Poisson-Gleichung}) \quad (5.48)$$

ist eine elliptische Differentialgleichung. Aus Anwendungssicht handelt es sich um eine Potentialgleichung.

Die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (5.49)$$

ist eine parabolische Differentialgleichung. Es handelt sich um die skalare Diffusionsgleichung.

Die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (5.50)$$

ist eine hyperbolische Differentialgleichung. Es handelt sich um die skalare Wellengleichung.

Zusammenfassung

	math. Bezeichnung	Anwendungsbeispiel
$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0}$	elliptische DGL	Potentialgleichung
$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$	parabolische DGL	Diffusionsgleichung
$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$	hyperbolische DGL	Wellengleichung

5.6.3 Felddiffusion im Halbraum; Eindringtiefe

Die z-Achse zeige ins Innere des Leiters. Für die Feldstärke setzen wir Unabhängigkeit von x und y voraus ($\rightarrow$ Abb. 5.10):

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0, \quad (5.51)$$

d. h. sie erfahre weder in x- noch in y-Richtung eine Veränderung.

Bei harmonischer Zeitabhängigkeit und Benutzung der komplexen Schreibweise gemäß (5.4) erhalten wir für die Diffusionsgleichungen (5.43) und (5.45) zunächst

$$\Delta \underline{\vec{E}} = j\omega\mu\kappa \underline{\vec{E}} \quad (5.52)$$

$$\Delta \underline{\vec{B}} = j\omega\mu\kappa \underline{\vec{B}} \quad (5.53)$$

Unter Beachtung von (5.51) ergibt sich

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial z^2} = j\omega\mu\kappa \underline{E}_x \quad \text{analog für } \underline{E}_y \quad (5.54)$$

$$\frac{\partial^2 \underline{B}_x}{\partial z^2} = j\omega\mu\kappa \underline{B}_x \quad \text{analog für } \underline{B}_y \quad (5.55)$$

Weiterhin folgt mit (5.51) aus (5.35) und (5.36) durch Komponentenvergleich $\underline{B}_z = \underline{E}_z = 0$.

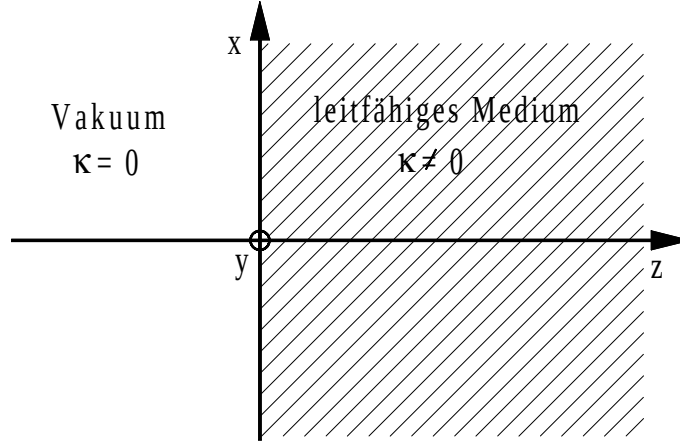


Abbildung 5.10: Leitfähiger Halbraum.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung 2. Ordnung (5.54) lautet bei Benutzung von

$$p^2 = j\omega\mu\kappa \quad (5.56)$$

$$\underline{E}_x = \underline{A}e^{pz} + \underline{B}e^{-pz} \quad (5.57)$$

Mit

$$\begin{aligned} p &= (1+j)k \\ k &= \sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}} \end{aligned} \quad (5.58)$$

erhalten wir

$$\underline{E}_x = \underline{A}e^{kz}e^{jkz} + \underline{B}e^{-kz}e^{-jkz}. \quad (5.59)$$

Aus (5.35) erhalten wir

$$\frac{\partial \underline{E}_x}{\partial z} = -j\omega\mu \underline{H}_y, \quad (5.60)$$

woraus wir $\underline{H}_y$ bestimmen:

$$\begin{aligned} \underline{H}_y &= -\frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial z} \\ &= -\frac{1+j}{j\omega\mu} \sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}} (\underline{A}e^{kz}e^{jkz} - \underline{B}e^{-kz}e^{-jkz}) \\ &= \frac{(j-1)\kappa}{2k} (\underline{A}e^{kz}e^{jkz} - \underline{B}e^{-kz}e^{-jkz}) \end{aligned} \quad (5.61)$$

Die Konstanten $\underline{A}$ und $\underline{B}$ ergeben sich aus den Randbedingungen:

1. Das Feld muß im Innern des Leiters für $z \rightarrow \infty$ auf Null abklingen, da im Medium eine Leistungsumwandlung in Joulesche Wärme stattfindet.
2. Die Randwerte an der Oberfläche des Leiters sind vorgegeben.

$$\underline{A} = 0, \quad \underline{B} = \underline{E}_0$$

Somit ist die elektrische Feldstärke gegeben durch

$$\underline{E}_x = \underline{E}_0 e^{-kz} e^{-jkz} \quad (5.62)$$

Mit (5.61) folgt für die magnetische Feldstärke

$$\underline{H}_y = \frac{\kappa \underline{E}_0}{2k} (1 - j) e^{-kz} e^{-jkz} \quad (5.63)$$

Die Amplitude von E_x nimmt also in z-Richtung exponentiell ab. Kennzeichnend für die Abnahme ist der Faktor $\delta = 1/k$

$$\frac{|\underline{E}_x(z = \delta)|}{|\underline{E}_0|} = e^{-1} \approx 0.37 \quad (5.64)$$

In der Entfernung δ von der Oberfläche ist die Amplitude auf den e -ten Teil, d. h. auf ca. 37% des Ausgangswertes abgefallen. Diese Entfernung wird als **Eindringtiefe** δ (engl. skin depth) bezeichnet und beträgt

$$\delta = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \kappa}} \quad (5.65)$$

Beispiel: Kupfer. Die Leitfähigkeit von Kupfer beträgt

$$\kappa = 5.8 \cdot 10^7 \frac{1}{\Omega \text{m}}$$

seine Permeabilität

$$\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

Für eine Frequenz $f = 50\text{Hz}$ (Kreisfrequenz $\omega = 2\pi 50\text{Hz}$) ergibt sich die Eindringtiefe

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{2\pi \cdot 50 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5.8 \cdot 10^7}} \text{m} \approx 1\text{cm}.$$

Nachfolgende Grafik zeigt die Eindringtiefe von Aluminium und Kupfer als Funktion der Frequenz. Es wird ersichtlich, daß die Eindringtiefe für technische Frequenzen in der Größenordnung von Zentimetern liegt, während sie für sehr hohe Frequenzen (z. B. Rundfunk) nur Bruchteile (Zehntel, Hundertstel) von Millimetern beträgt (→ Abb. 5.11).

Eindringtiefe vs Frequenz

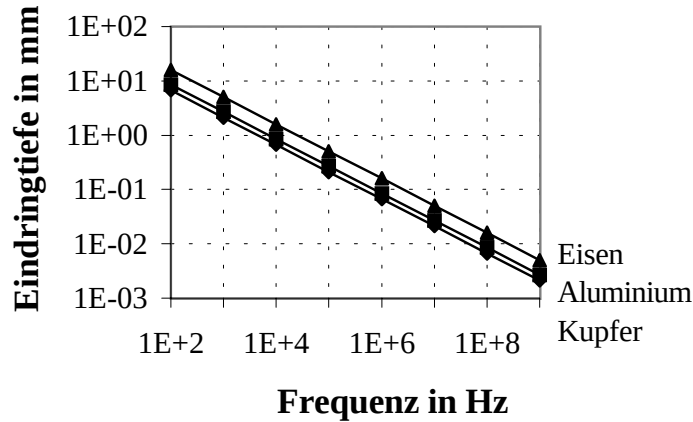


Abbildung 5.11: Frequenzabhängigkeit der Eindringtiefe für Aluminium und Kupfer.

5.6.3.1 Physikalische Deutung der Eindringtiefe

Die Abschätzung für die Eindringtiefe erlaubt es, den unendlichen ebenen Leiter als Näherung für eine zylindrische Leitung mit großem Durchmesser zu verwenden, die einen Wechselstrom der Frequenz f führt ($\rightarrow$ Abb. 5.12).

Die Achse des Zylinders sei parallel zur x -Achse. Die Rückleitung soll mit Hilfe eines anderen, koaxial angeordneten Leiters mit noch größerem Durchmesser realisiert werden.

Mit wachsender Frequenz konzentrieren sich die Felder immer stärker an der Leiteroberfläche und für hinreichend hohe Frequenzen stellt die Eindringtiefe nach Gleichung (5.65) auch für Drähte mit kreisförmigem Querschnitt ein brauchbare Näherung dar.

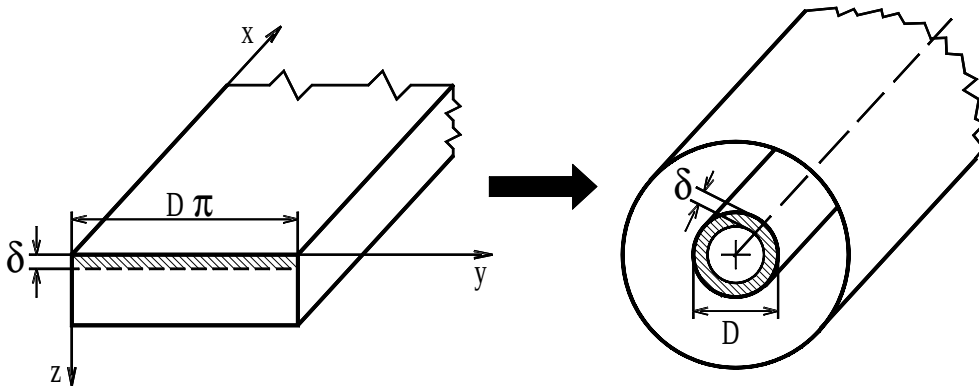


Abbildung 5.12: Halbraum als Näherung für einen runden Metalldraht.

5.6.3.2 Spezielle Welleneigenschaften der Lösung

Wenn wir die Zeitabhängigkeit explizit ausdrücken, erhalten wir aus (5.62) und (5.63)

$$\underline{E}_x, \underline{H}_y \sim e^{-kz} e^{j(\omega t - kz)} \quad (5.66)$$

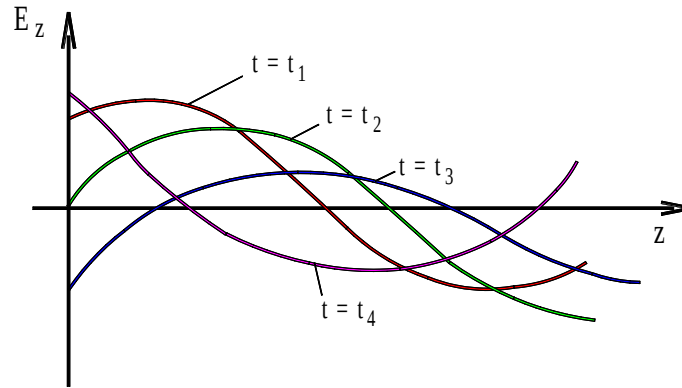


Abbildung 5.13: Verteilung der elektrischen Feldstärke zu verschiedenen Zeitpunkten.

bzw. nach Bildung des Realteils

$$\underline{E}_x, \underline{H}_y \sim e^{-kz} \cos(\omega t - kz). \quad (5.67)$$

Die Feldstärkewerte verändern sich wie fortschreitende ebene Wellen ($\rightarrow$ Abb. 5.13). Die **Fortpflanzungsgeschwindigkeit** v der Welle folgt aus der Beziehung

$$E_x, H_y \sim e^{-kz} \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] \quad (5.68)$$

durch den Vergleich mit Gleichung (5.67):

$$\boxed{v = \frac{\omega}{k}} \quad (5.69)$$

Die Feldstärken „wandern“, ähnlich wie eine elektromagnetische Welle, mit der Phasengeschwindigkeit v in positive z -Richtung. Weil der Vorfaktor e^{-kz} eine starke Dämpfung der Felder bewirkt, handelt es sich allerdings um eine sogenannte „**gedämpfte Welle**“. Mit der **Wellenlänge** λ

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (5.70)$$

schreibt sich der Dämpfungsfaktor für $z = \lambda$

$$e^{-kz} = e^{-2\pi} \approx 0.002 \ll 1,$$

d. h. bereits nach einer Entfernung von $z = \lambda$ sind die Felder aufgrund der Wärmeverluste im Material nahezu verschwunden.

Beispiel: Kupfer. Bei $f = 50\text{Hz}$ ist $\lambda = 2\pi\text{cm} \sim 6\text{cm}$. Bei höheren Frequenzen werden die Wellenlängen und damit die Eindringtiefe immer geringer. Aus

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J}$$

ergibt sich auch der zugehörige Strom. Dies soll hier nicht ausgeführt werden, sondern nur darauf hingewiesen werden, daß man sich modellmäßig vorstellen kann, daß der effektive Gesamtstrom in einer oberflächlichen Schicht der Dicke δ mit konstanter Stromdichte fließt (mehr hierzu: Lehner Seite 388).

Den Effekt, daß Feldstärke und Stromdichte außerhalb der Eindringtiefe nahezu verschwinden, bezeichnet man auch als **Skin-Effekt**, auf den wir noch einmal zurückkommen.

5.7 Energiedichte und Energieströmung

Im folgenden werden wir den reellen und den komplexen Poynting-Vektor einführen.

5.7.1 Der Poynting-Vektor

Die Maxwell'schen Gleichungen besagen, daß jede zeitliche Änderung eines magnetischen Feldes mit dem Entstehen oder Verschwinden eines elektrischen Wirbelfeldes verbunden ist und umgekehrt. Im zeitlich veränderlichen Feld ist demnach der felderfüllte Raum Träger elektrischer und magnetischer Energie der Dichte

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2}(\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}) \quad (5.71)$$

(Vergleiche (2.167) und (3.47).) Die Gesamtenergie innerhalb eines Volumens V ist

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V (\varepsilon |\vec{E}|^2 + \mu |\vec{H}|^2) dV. \quad (5.72)$$

Ihre zeitliche Änderung (z. B. Leistungsumsatz in Wärmestrahlung in einem stromdurchflossenen Leiter) ergibt sich hieraus unter Verwendung der Produktregel zu

$$\frac{dW}{dt} = \iiint_V \left(\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dV. \quad (5.73)$$

Werden die partiellen Ableitungen mit Hilfe der ersten beiden Maxwell'schen Gleichungen ersetzt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \iiint_V \left[\vec{E} (\text{rot} \vec{H} - \vec{J}) + \vec{H} (-\text{rot} \vec{E}) \right] dV \\ &= \iiint_V (\vec{E} \text{rot} \vec{H} - \vec{H} \text{rot} \vec{E} - \vec{E} \vec{J}) dV \end{aligned} \quad (5.74)$$

$$\text{Vektoranalysis} \rightarrow = - \iiint_V [\text{div} (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{E} \vec{J}] dV \quad (5.75)$$

Wir definieren nun die neue vektorielle Größe

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$$

(5.76)

Wegen

$$\iiint_V \text{div} \vec{P} dV = \oiint_{\partial V} \vec{P} d\vec{A} \quad (5.77)$$

ergibt $\vec{P}$ die **Flächendichte der Leistung** und heißt **Poynting-Vektor** (auch: Vektor der Energieströmung oder Strahlungsvektor). Damit schreibt sich Gleichung (5.75) zu

$$\frac{dW}{dt} = \oiint_{\partial V} \vec{P} d\vec{A} - \iiint_V \vec{E} \vec{J} dV$$

(5.78)

Dies ist der **Poyntische Satz**: Die durch die Oberfläche ∂V eines Volumens V eindringende Energieströmung im elektrostatischen Feld ist gleich der zeitlichen Änderung der eindringenden elektromagnetischen Energie (Blindleistung) vermehrt um die zur Wärmeentwicklung benötigte Leistung (Wirkleistung).

Existiert in V eine Quelle der Feldstärke $\vec{E}_q$, die das elektrische Feld $\vec{E}$ verursacht, ist also

$$\vec{J} = \kappa (\vec{E} + \vec{E}_q) \quad (5.79)$$

und damit

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\kappa} - \vec{E}_q, \quad (5.80)$$

können wir (5.78) schreiben als

$$\underbrace{\frac{dW}{dt}}_1 = - \underbrace{\oint_{\partial V} \vec{P} d\vec{A}}_2 - \underbrace{\iiint_V \frac{\vec{J}\vec{J}}{\kappa} dV}_3 + \underbrace{\iiint_V \vec{E}_q \vec{J} dV}_4. \quad (5.81)$$

Dies ist der **Erhaltungssatz** für die Energie des elektromagnetischen Feldes: Die Abnahme der Feldenergie im felderfüllten Volumen V (1) ist innerhalb eines Leiters eine Folge der Energieumwandlung in Joulesche Wärme (3), die nach außen abgestrahlt oder abgeleitet wird. Außerdem erhöht sich der Energiegehalt im Volumen V aufgrund einer in das Volumen eindringenden elektromagnetischen Strahlung (2) sowie infolge der Energieströmung einer Quelle (4).

Der Poynting-Vektor zeigt die Richtung einer Energieströmung an. Sein Betrag ergibt die Flächendichte der Leistung. Das Oberflächenintegral des Poynting-Vektors über die geschlossene Oberfläche ∂V eines Volumens muß folglich die gesamte durch ∂V ein- und austretende Leistung ergeben ($\rightarrow$ Abb. 5.14).

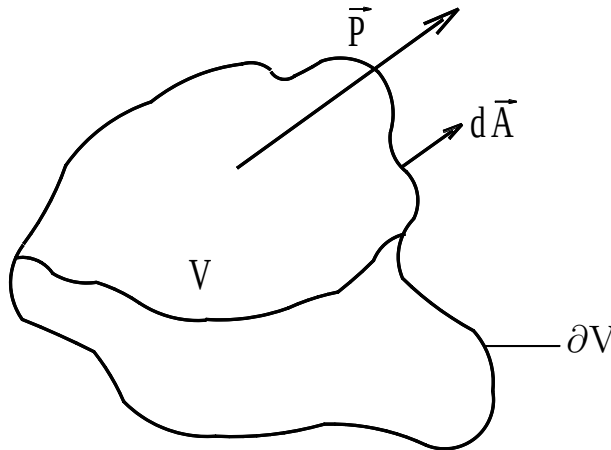


Abbildung 5.14: Das Oberflächenintegral des Poynting-Vektors.

Bei dem Poynting-Vektor handelt es sich um eine lokale Größe des elektromagnetischen Feldes, da er an jedem Raumpunkt die Strömung der elektromagnetischen Energie darstellt. Die Angabe des Poynting-Vektors setzt voraus, daß die elektrischen und magnetischen Feldvektoren miteinander verkettet sind (vergleiche Herleitung aus den Maxwellschen Gleichungen).

Sind $\vec{E}$ und $\vec{H}$ nicht miteinander verkettet, so kann zwar $\vec{E} \times \vec{H} \neq 0$ sein, ergibt aber nicht den Poynting-Vektor und auch das Integral

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \times \vec{H} d\vec{A}$$

hat dann keine physikalische Bedeutung. Ein Beispiel für diesen Fall stellt ein geladener Plattenkondensator dar, der in ein von einer Spule erzeugtes Magnetfeld gebracht wird ($\rightarrow$ Abb. 5.15).

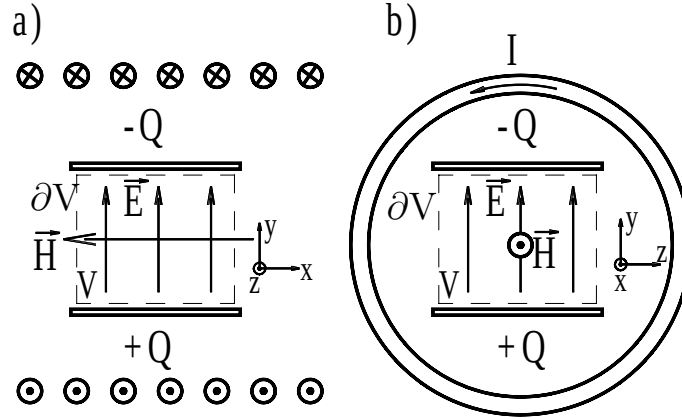


Abbildung 5.15: Geladener Plattenkondensator im statischen Magnetfeld a) xy-Ebene und b) zy-Ebene.

Beispiel zum Poynting-Vektor: In einem gleichstromdurchflossenen zylindrischen Draht liegt eine Verkettung von $\vec{E}$ und $\vec{H}$, die durch die endliche Leitfähigkeit verursacht wird ($\rightarrow$ Abb. 5.16).

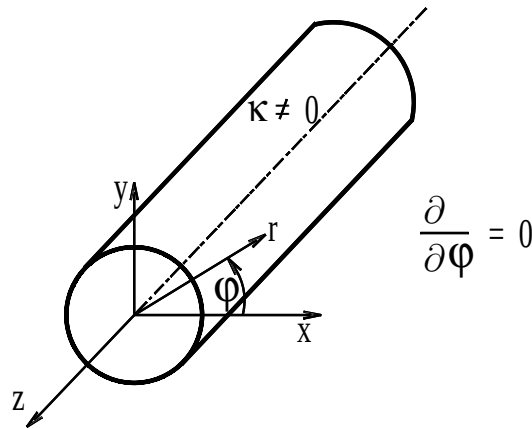


Abbildung 5.16: Gleichstromdurchflossener zylindrischer Draht.

Bei gleichmäßiger Stromdichteverteilung ergeben sich auf der Leiteroberfläche die Feldstärken

$$\vec{H} = H_{\varphi} \vec{e}_{\varphi} \quad (5.82)$$

$$\vec{E} = E_r \vec{e}_r + E_z \vec{e}_z \quad (5.83)$$

$$\text{mit } H_{\varphi} = \frac{I}{2\pi a} \quad (5.84)$$

$$E_z = \frac{I}{\pi \kappa a^2} \quad (5.85)$$

Die Normalkomponente P_n des Poynting-Vektors auf der Leiteroberfläche ergibt sich somit

$$P_n = E_z H_\varphi = \frac{I^2}{2\kappa\pi^2 a^3} \quad (5.86)$$

mit $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} P_n = 0$. Für die Verlustleistung N bezogen auf die Leiteroberfläche (hier Zylindermantelfläche $2\pi a l$) ergibt sich somit

$$N = P_n A = \frac{I^2 l}{\kappa\pi a^2} \quad (5.87)$$

als Folge der in Wärme umgesetzten Energie, bezogen auf die Zeit. Die Energiezufuhr kommt aus der Umgebung um den Leiter. Der Gleichstromwiderstand R des Leiters folgt wegen $N = RI^2$ direkt aus (5.87):

$$R = \frac{l}{\kappa\pi a^2} \quad (5.88)$$

Die durch die Radialkomponente E_r verursachte tangentielle Komponente des Poynting-Vektors

$$P_t = E_r H_\varphi \quad (5.89)$$

beschreibt die Energieströmung zu einem die Leitung abschließenden Verbraucher ($\rightarrow$ Abb. 5.17).

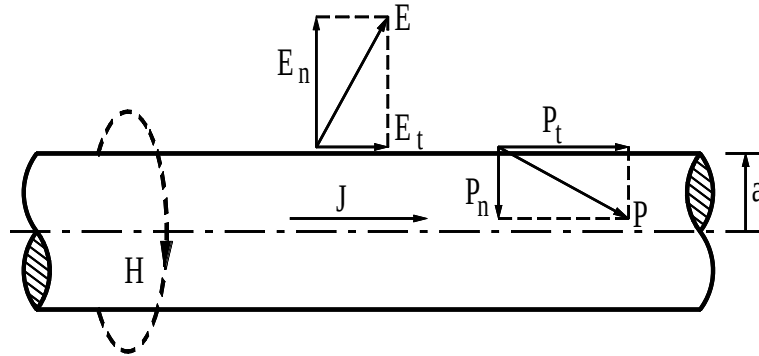


Abbildung 5.17: Energieströmung zu einem die Leitung abschließenden Verbraucher.

Beachte: Für einen guten Leiter (κ sehr groß) erfolgt der eigentliche Energietransport (P_t) entlang der Leitung im elektromagnetischen Feld außerhalb des Leiters. Bei der Energieübertragung besteht die Aufgabe des Leiters lediglich darin, eine solche Feldverteilung hervorzurufen, daß die Energieströmung gezwungen wird, dem Leiter räumlich zu folgen (Führung). Dabei wird ein Teil der elektromagnetischen Feldenergie dem Raum um den Leiter entzogen und vom Leiter in Wärme umgewandelt (Joulesche Wärmeverluste).

Zur Erläuterung der Energieströmung zum Verbraucher betrachten wir eine Doppeldrahtleitung ($\rightarrow$ Abb. 5.18). Wir müssen dabei beachten, daß die drei Vektoren $\vec{E}$, $\vec{H}$ und $\vec{J}$ aus dem vorigen Bild hier für den Rückleiter ihre Richtung umkehren, nicht jedoch P_t , welches auch im Rückleiter zum Verbraucher zeigt. Der **Energietransport** zum Verbraucher vollzieht sich **zwischen Hin- und Rückleiter**! Er wird durch die tangentielle Komponente des Poynting-Vektors beschrieben.

$$\iint_A \vec{P} d\vec{A} = \iint_A P_t d\vec{A} = \iint_A EH \xi d\eta \quad (5.90)$$

$$I = \oint H d\xi \quad \text{und} \quad U = \int_1^2 E d\eta \quad (5.91)$$

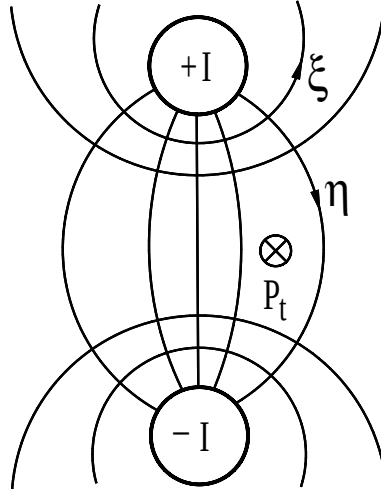


Abbildung 5.18: Zur Erläuterung der Energieströmung in einer Doppeldrahtleitung.

ergibt sich also für den Fluß des Poynting-Vektors:

$$\iint_A \vec{P} d\vec{A} = UI \quad (5.92)$$

5.7.2 Der komplexe Poynting-Vektor

Verwenden wir für zeitharmonische Feldgrößen die komplexe Schreibweise gemäß (5.4), so lauten die ersten beiden Maxwellschen Gleichungen unter Einbeziehung der Materialgleichungen

$$\text{rot} \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \quad (5.93)$$

$$\text{rot} \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E} + \kappa\vec{E} = j\omega\underline{\varepsilon}_k\vec{E} \quad (5.94)$$

mit einem komplexen $\underline{\varepsilon}_k$:

$$\underline{\varepsilon}_k = \varepsilon + \frac{\kappa}{j\omega} = \varepsilon(1 - j \tan \delta_\varepsilon), \quad (5.95)$$

wobei δ_ε den Verlustwinkel des Mediums bezeichnet. (Dielektrikum: $\tan \delta_\varepsilon \ll 1$, $\tan \delta_\varepsilon \approx \delta_\varepsilon$; Metall: $\tan \delta_\varepsilon \gg 1$, $\varepsilon \approx \varepsilon_0 \rightarrow \underline{\varepsilon}_k$ rein imaginär)

In permeablen Medien werden analog die Verluste in einem komplexen μ bzw. mit einem $\tan \delta_\mu$ berücksichtigt:

$$\underline{\mu}_k = \mu(1 - j \tan \delta_\mu) \quad (5.96)$$

Aus (5.93) und (5.94) ergibt sich dann

$$\text{rot} \vec{E} = -j\omega\underline{\mu}_k\vec{H} \quad (5.97)$$

$$\text{rot} \vec{H} = j\omega\underline{\varepsilon}_k\vec{E} \quad (5.98)$$

Durch skalare Multiplikation von links mit $\vec{H}^*$ bzw. $\vec{E}^*$ erhalten wir ($\vec{H}^*$ = komplex-konjugierter Wert von $\vec{H}$):

$$\vec{H}^* \text{rot} \vec{E} = -j\omega\underline{\mu}_k \vec{H} \cdot \vec{H}^* \quad (5.99)$$

$$\vec{E}^* \text{rot} \vec{H} = j\omega\underline{\varepsilon}_k \vec{E} \cdot \vec{E}^* \quad (5.100)$$

Mit Hilfe der Vektoranalysis folgt nach Subtraktion von (5.99) und (5.100)

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) &= \vec{H}^* \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H}^* \\ &= -j\omega \underline{\mu}_k \vec{H} \cdot \vec{H}^* + j\omega \underline{\varepsilon}_k \vec{E} \cdot \vec{E}^*\end{aligned}\quad (5.101)$$

Analog zu (5.76) definieren wir den Poynting-Vektor

$$\vec{P} = \operatorname{Re}\{\vec{E}e^{j\omega t}\} \times \operatorname{Re}\{\vec{H}e^{j\omega t}\} \quad (5.102)$$

Gleichung (5.102) ist physikalisch sinnvoll, aber meistens wird nicht das harmonische Feld zu einem bestimmten Zeitpunkt gesucht, sondern ein **zeitlich gemittelter Fluß**. Deswegen berechnen wir die Änderung des Energieflusses während einer zeitlichen Umlaufperiode $2\pi/\omega$ und dividieren durch diese Periode:

$$\begin{aligned}\overline{\vec{P}} &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \operatorname{Re}\{\vec{E}e^{j\omega t}\} \times \operatorname{Re}\{\vec{H}e^{j\omega t}\} dt \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\vec{E} \times \vec{H}^*\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\vec{E}^* \times \vec{H}\}\end{aligned}\quad (5.103)$$

Der Vektor

$$\vec{P}_k = \frac{1}{2}(\vec{E} \times \vec{H}^*) \quad (5.104)$$

heißt **komplexer Poynting-Vektor**. Sein Realteil ist gleich dem zeitlichen Mittel des Energieflusses. Er kann auch in der Form

$$\vec{P}_k = \frac{1}{4}(\vec{E} \times \vec{H}^* + \vec{E}^* \times \vec{H}) \quad (5.105)$$

angegeben werden. Durch die Berücksichtigung der Definition (5.104) in Gleichung (5.101) erhalten wir den **komplexen Poyntingschen Satz**:

$$\begin{aligned}\oint_{\partial V} \vec{P}_k d\vec{A} &= -2j\omega \iiint_V \left(\frac{\underline{\mu}_k |\vec{H}|^2}{4} - \frac{\underline{\varepsilon}_k^* |\vec{E}|^2}{4} \right) dV \\ &= -2\omega \tan \delta_\mu \iiint_V \frac{\underline{\mu}}{4} |\vec{H}|^2 dV - 2\omega \tan \delta_\varepsilon \iiint_V \frac{\underline{\varepsilon}}{4} |\vec{E}|^2 dV \\ &\quad - 2\omega \left(\iiint_V \frac{\underline{\mu}}{4} |\vec{H}|^2 dV - \iiint_V \frac{\underline{\varepsilon}}{4} |\vec{E}|^2 dV \right) \\ &= -N_W - jN_B \\ &= -N_W - j2\omega(W_m - W_e)\end{aligned}\quad (5.106)$$

mit der Wirkleistung N_W (der mittleren im Volumen V erzeugten Wärme) und der Blindleistung N_B (der Differenz zwischen mittlerer magnetischer und elektrischer Energie bezogen auf die Zeiteinheit). In guten Leitern ist $W_e \ll W_m$. In Metallen wird deshalb aus Gleichung (5.106)

$$\begin{aligned}\oint_{\partial V} \vec{P}_k d\vec{A} &= - \iiint_V \frac{1}{2} \kappa |\vec{E}|^2 dV - j2\omega W_m \\ &= -N_W - jN_B\end{aligned}\quad (5.107)$$

Hieraus können wir den Wirkwiderstand R_W und die innere Induktivität L_i von Leitern berechnen – insbesondere bei hohen Frequenzen. Wegen

$$\underline{I}^* = \oint \vec{H}^* d\vec{s} \quad (5.108)$$

$$\underline{U} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \underline{I}(R_W + j\omega L_i) = \underline{I}\underline{Z} \quad (5.109)$$

folgt

$$N_W = \frac{1}{2} \underline{I}^2 R_W \quad (5.110)$$

$$N_B = \frac{1}{2} \underline{I}^2 \omega L_i \quad (5.111)$$

Beispiel: Hochfrequenz-Widerstand eines leitenden Halbraums ($\rightarrow$ Abb. 5.19). Anfangswerte auf der Oberfläche: E_0

$$(5.62): \quad \vec{E}_x = \underline{E}_0 e^{-kz} e^{-jkz} \quad (5.112)$$

$$(5.53): \quad \vec{H}_y = \frac{\kappa E_0}{2k} (1-j) e^{-kz} e^{-jkz} \quad (5.113)$$

$$(5.112) \rightarrow \vec{J} = \underline{J}_x \vec{e}_x = \kappa \vec{E}_x \quad \text{mit } \omega\varepsilon \ll \kappa \quad (5.114)$$

$$\rightarrow I = \int_{y=0}^a \int_{z=0}^{\infty} \underline{J}_x dz dy = \dots = \frac{a \underline{E}_0 \kappa}{(1+j)k} \quad (5.115)$$

$$\text{Mit } \delta = \frac{1}{k} \rightarrow |\underline{I}| = \frac{\kappa a}{\sqrt{2}} \delta |\underline{E}_0| \quad (5.116)$$

$$\vec{P}_k = \frac{1}{2} (\vec{E} \times \vec{H}^*) = \dots = \frac{1}{4} \underline{E}_0^2 \kappa (1+j) \delta e^{-2kz} \quad (5.117)$$

Der gemittelte Leistungsfluß = $\text{Re}\{\vec{P}_k\}$:

$$P_W = \frac{1}{4} \underline{E}_0^2 \kappa \delta e^{-2kz} \quad (5.118)$$

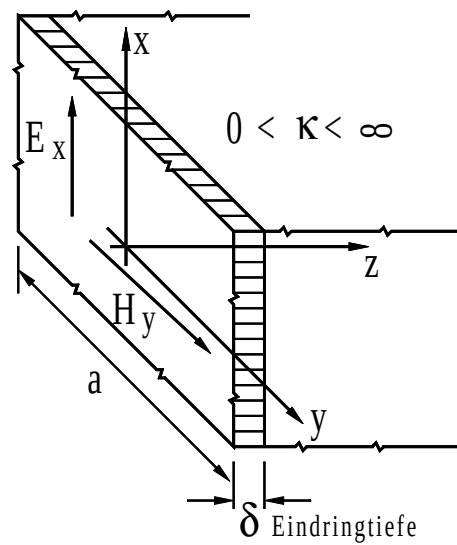


Abbildung 5.19: Hochfrequenz-Widerstand eines leitenden Halbraums.

Bei $z = 0$ erhalten wir daraus die einströmende Leistung pro m^2 von

$$P_W = \frac{1}{4} \underline{E}_0^2 \kappa \delta. \quad (5.119)$$

Aus (5.110) folgt mit $N_W = P_W A = P_W a x$ für den Hochfrequenz-Widerstand R_W

$$R_W = \frac{2N_W}{|\underline{I}|^2} = \frac{2axP_W}{|\underline{I}|^2}. \quad (5.120)$$

Das Einsetzen von Gleichung (5.116) und (5.119) in (5.120) liefert

$$R'_W = \frac{R_W}{x} = \frac{1}{\kappa a \delta}, \quad (5.121)$$

den Widerstandswert pro Längeneinheit in x -Richtung. Mit (5.65), der Definition der Eindringtiefe δ , folgt

$$R'_W = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\kappa}} \sim \sqrt{\omega}. \quad (5.122)$$

Für eine Platte der Dicke δ und gleichmäßige Stromverteilung ergibt sich gemäß (5.121) der gleiche HF-Widerstand.

5.7.3 Strom- und Feldverdrängung

5.7.3.1 Gleichstromleiter

Annahme: Äquipotentialflächen bei $z = 0$ und $z = l$ ($\rightarrow$ Abb. 5.20), $\omega = 0 \rightarrow$ Strom verteilt sich gleichmäßig im Leiter. Im stationären Zustand ist

$$|\vec{E}| = \frac{U}{l} \quad (5.123)$$

$$(5.41) \rightarrow |\vec{J}_L| = \kappa |\vec{E}| = \kappa \frac{U}{l} \quad (5.124)$$

Der Gesamtstrom im Leiterinnern ist

$$I = |\vec{J}_L| A = \kappa \frac{U}{l} h d. \quad (5.125)$$

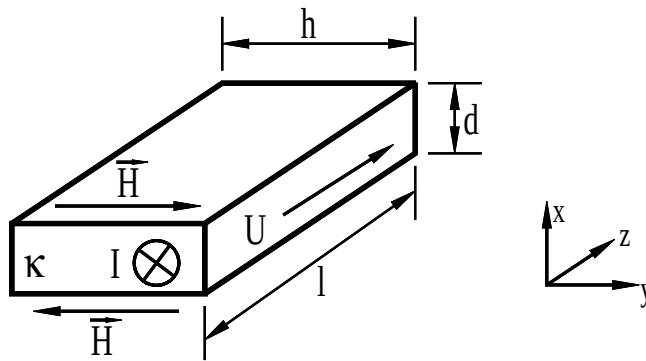


Abbildung 5.20: Gleichstromleiter.

Bei Leitern mit sehr kleinen Querschnittsabmessungen gegenüber ihrer Länge l sind die Annahmen sehr gut erfüllt. Aus (5.125) folgt für den Gleichstromwiderstand pro Längeneinheit

$$R'_0 = \frac{R_0}{l} = \frac{U}{lI} = \frac{1}{\kappa h d} = \frac{1}{\kappa A} . \quad (5.126)$$

5.7.3.2 Wirbelströme in dünnen Platten

In Kapitel 5.7.2 haben wir im Beispiel der leitenden Halbebene gesehen, daß die Stromleitung bei **Wechselstrom** im wesentlichen in einer Schicht unter der Leiteroberfläche erfolgt und daß diese Schicht mit wachsender Frequenz immer dünner wird. Diese Erscheinung wird **Strom- und Feldverdrängung** bzw. **Skineffekt** genannt. Ein anschauliches Bild für das Zustandekommen der Stromleitung in Leitern ergibt sich, sofern davon ausgegangen wird, daß der felderfüllte Raum Sitz und Träger der Energie ist und der elektrische Nichtleiter den eigentlichen „Leiter“ für die elektromagnetische Energie darstellt ($\rightarrow$ Abb. 5.21). Es dringt in $\pm y$ -Richtung von beiden Blechseiten eine ebene Welle ins Innere ein.

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_z \vec{e}_z \\ \vec{H} &= H_x \vec{e}_x \end{aligned} \quad (5.126)$$

Es wird der Hochfrequenz-Widerstand für hohe Frequenzen gesucht ($\delta \ll d$). Die Gleichungen für die Magneto-Quasistatik lauten:

$$\text{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (5.127)$$

$$\text{rot} \vec{H} = \kappa \vec{E} \quad (5.128)$$

Wegen der harmonischen Zeitabhängigkeit folgt aus der Diffusionsgleichung (5.45)

$$\Delta \vec{H} - j\omega\mu\kappa \vec{H} = 0. \quad (5.129)$$

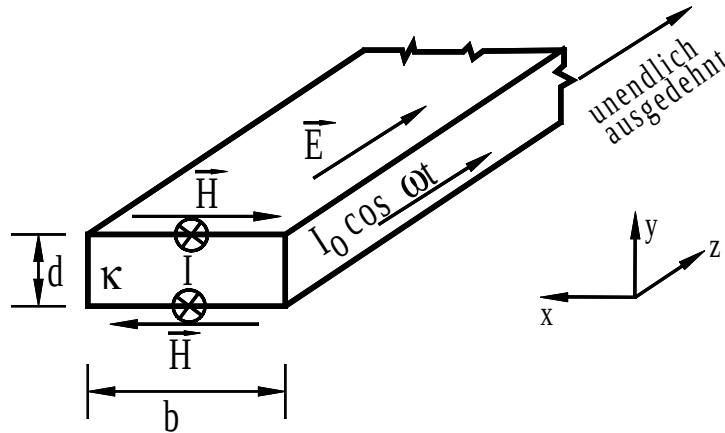


Abbildung 5.21: Dünne leitfähige Blechplatte.

Unter der Annahme, daß H_x nur von y abhängt, folgt hieraus

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \underline{H}_x - k^2 \underline{H}_x = 0 \quad (5.130)$$

$$\text{mit} \quad k = \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega \kappa \mu} = \frac{1+j}{\delta} \quad (5.131)$$

als Kreiswellenzahl und der Eindringtiefe δ nach (5.65). Die Gleichung (5.130) entspricht der Helmholtzgleichung, die wir in Kapitel 6 ausführlicher behandeln werden. Über der Querschnittsfläche $\vec{A} \perp \vec{e}_z$ liefert das Durchflutungsgesetz

$$\begin{aligned} \iint_A (\text{rot} \vec{H} - \kappa \vec{E}) d\vec{A} &= 0 \\ \int_{x=-b/2}^{b/2} \underline{H}_x|_{y=-\frac{d}{2}} dx + \int_{x=b/2}^{-b/2} -\underline{H}_x|_{y=-\frac{d}{2}} dx &= I_0 \\ \rightarrow \quad H_x|_{y=-\frac{d}{2}} &= \frac{I_0}{2b}, \end{aligned} \quad (5.132)$$

wobei der Beitrag der Schmalseiten d der Querschnittsfläche zum Umlaufintegral vernachlässigt wurde. Der Lösungsansatz für die skalare Helmholtzgleichung nach Gleichung (5.130) lautet

$$H_x = C_1 e^{ky} + C_2 e^{-ky} \quad \text{mit} \quad -\frac{d}{2} < y < \frac{d}{2} \quad (5.133)$$

Die Konstanten C_1 und C_2 sind die zu bestimmenden Amplituden der hin- und rücklaufenden Welle. Für die Randbedingungen auf der Plattenoberfläche ergibt sich mit Gleichung (5.133)

$$\begin{aligned} H_x(y = -d/2) &= -H_x(y = d/2) = \frac{I_0}{2b} \\ \rightarrow \quad C_1 &= -C_2 = C \\ C &= \frac{I_0/2b}{e^{-kd/2} - e^{kd/2}} \end{aligned} \quad (5.134)$$

$$\rightarrow \quad H_x(y) = \frac{I_0}{2b} \frac{e^{ky} - e^{-ky}}{e^{-kd/2} - e^{kd/2}} = -\frac{I_0}{2b} \frac{\sinh(ky)}{\sinh(kd/2)} \quad (5.135)$$

$$(5.128) \rightarrow \quad E_z(y) = -\frac{1}{\kappa} \frac{\partial}{\partial y} H_x = \frac{I_0 k}{2b\kappa} \frac{\cosh(ky)}{\sinh(kd/2)} \quad (5.136)$$

Die Feldverteilung über dem Plattenquerschnitt ist in Abb. 5.22 aufgezeigt.

Für sehr hohe Frequenzen wird der Strom praktisch vollständig an die Oberfläche $y = \pm d/2$ verdrängt (Skin-Effekt). Im folgenden werden der Wirkwiderstand R_W und die innere Induktivität L_i zugeordnet:

$$U = I_0(R_W + j\omega L_i) = \int_{z=0}^l E_z dz = E_z l \quad (5.137)$$

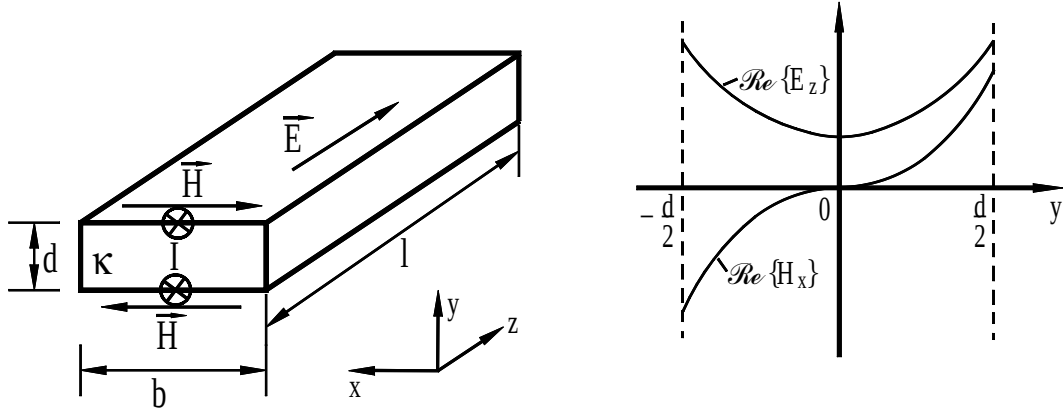


Abbildung 5.22: Feldverteilung über dem Plattenquerschnitt.

Mit $E_z \approx E_z(y = d/2)$ folgt

$$I_0(R_W + j\omega L_i) = \frac{I_0 k \cosh(kd/2)}{2b\kappa \sinh(kd/2)} l. \quad (5.138)$$

$$(5.131) \rightarrow \frac{R_W}{l} + j\omega \frac{L_i}{l} = \frac{1+j}{2b\kappa\delta} \coth\left(\frac{1+j}{\delta} \frac{d}{2}\right) \quad (5.139)$$

$$\coth u = \frac{e^u + e^{-u}}{e^u - e^{-u}} \rightarrow \lim_{\alpha \gg 1} \coth(1+j)\alpha \approx 1 \quad (5.140)$$

$$R'_W = \frac{1}{2b\kappa\delta} \sim \sqrt{\omega} \quad (5.141)$$

$$L'_i = \frac{1}{2b\kappa\delta\omega} \sim \frac{1}{\sqrt{\omega}} \quad (5.142)$$

für den längennormierten Wirkwiderstand R'_W und die innere Induktivität L_i (ebenfalls längennormiert). Für $I = 0$ in der Mitte der Platte ergibt sich

$$R'_W = \frac{1}{b\kappa\delta}. \quad (5.143)$$

Sein Betrag ist doppelt so groß wie in (5.142).

Eine unsymmetrische Feldverteilung ist in Abb. 5.23 dargestellt.

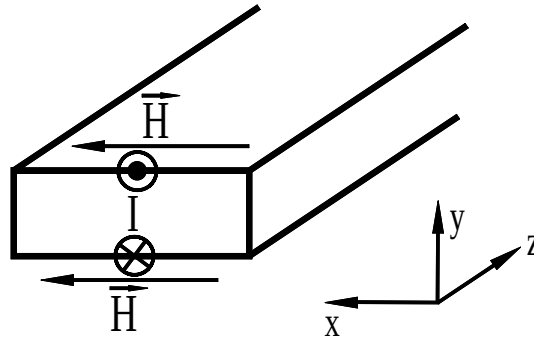


Abbildung 5.23: Unsymmetrische Feldverteilung.

5.7.3.3 Einseitige Stromverdrängung auf einer Bandleitung

Für $d \gg \delta$ gilt (5.143) für eine einzelne Schiene. Der gesamte Widerstand der Bandleitung (je Längeneinheit) ist also ($\rightarrow$ Abb. 5.24)

$$R'_W = \frac{2}{b\kappa\delta} \quad (5.144)$$

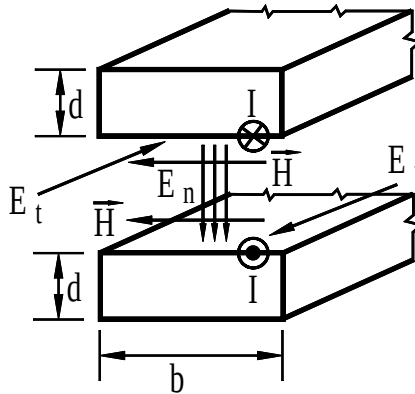


Abbildung 5.24: Wechselstrom auf 2 Schienen.

5.7.3.4 Stromverdrängung in Ankernuten

Zur Begrenzung des hohen Anlaufstromes bei Asynchronmotoren werden Tiefnutstromläufer verwendet. Im Augenblick des Ausschaltens beträgt die Läuferfrequenz $f = 50\text{Hz}$ und somit $\delta \approx 1\text{cm}$ (vgl. Abschnitt 5.6.3).

Bei der sehr geringen Läuferfrequenz des laufenden Motors (Schlupffrequenz) kann mit $\delta \rightarrow \infty$, d. h. mit dem Gleichstromwiderstand R_0 des Läufers gerechnet werden ($\rightarrow$ Abb. 5.25).

Wegen $\mu_{\text{Fe}} \gg \mu_0$ gilt annähernd $\vec{H} \perp \text{Fe}$. Bei genügender Dichte $d \gg \delta$ ist der untere Teil der Schiene stromlos. Entsprechend (5.143) gilt daher

$$R'_W = \frac{1}{b\kappa\delta} = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{\mu_0\omega}{2\kappa}} \quad (5.145)$$

Falls d nicht genügend groß ist, muß eine reflektierte Welle berücksichtigt werden. Das Resultat wird dann komplizierter.

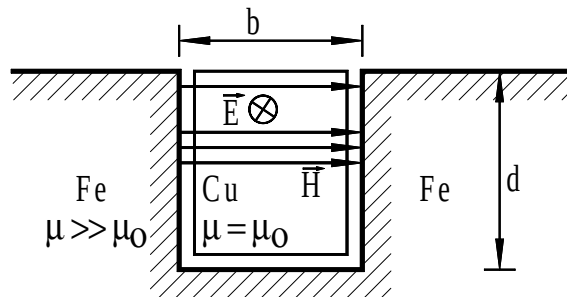


Abbildung 5.25: Nut eines Tiefnutstromläufers.

5.7.3.5 Stromverdrängung in einem unendlich langen Zylinder

In einer sehr langen längshomogenen Spule entlang der z -Achse befinde sich ein sehr langer, koaxial angeordneter Zylinder mit kreisförmigen Querschnitt und endlicher Leitfähigkeit κ ($\rightarrow$ Abb. 5.26).

In der Spule fließe der Strom $I(t) = \text{Re}\{I_0 e^{j\omega t}\}$. Die Frequenz ω ist so gewählt, daß die Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k = 2\pi/(\omega/v)$ sehr viel größer als die geometrischen Abmessungen ist. Wir gehen von Gleichung (5.129)

$$\Delta \vec{H} - j\omega\mu\kappa \vec{H} = 0, \quad (5.146)$$

der Helmholtzgleichung aus.

Angenommen wird nun, daß das Magnetfeld in longitudinale Richtung weist. Dann lösen wir (5.146) in Zylinderkoordinaten. Mit $\vec{H} = (0, 0, \underline{H}_z)$ erhalten wir

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \underline{H}_z) - j\omega\mu\kappa \underline{H}_z = 0 \quad (5.147)$$

Dies ist ein Spezialfall der Besselschen Differentialgleichung (2.128) (für $m = 0$, $n = r$, $f = r\text{Hz}$). Die Lösung von Gleichung (5.147) ergibt sich daher zu

$$\underline{H}_z(r) = C J_0(\alpha r) \quad (5.148)$$

$$\text{mit } \alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}}(1 - j). \quad (5.149)$$

Die Konstante C läßt sich durch das Integral über $\vec{H}$ längs der geschlossenen Kurve $\mathcal{C}$ bestimmen ($\rightarrow$ Abb. 5.27). Sein Wert ist gleich dem umfängenen Strom. Bei n Windungen pro Längeneinheit gilt nach dem Durchflutungsgesetz

$$l \underline{H}_0 = l C J_0(\alpha R) = n I \quad (5.150)$$

$$\rightarrow C = \frac{n I}{J_0(\alpha R)}. \quad (5.151)$$

$$\rightarrow \underline{H}_z(r) = \frac{n I}{J_0(\alpha R)} J_0(\alpha r) \quad (5.152)$$

$$\text{und } \underline{J}_\varphi(r) = -\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial r} = \frac{\alpha n I}{J_0(\alpha R)} J_1(\alpha r). \quad (5.153)$$

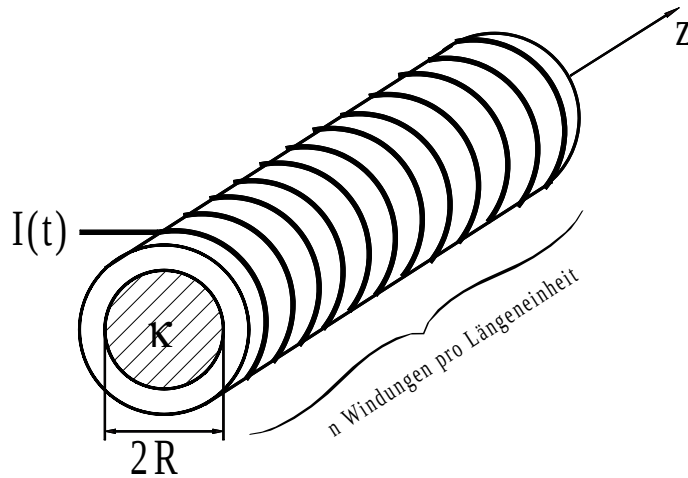
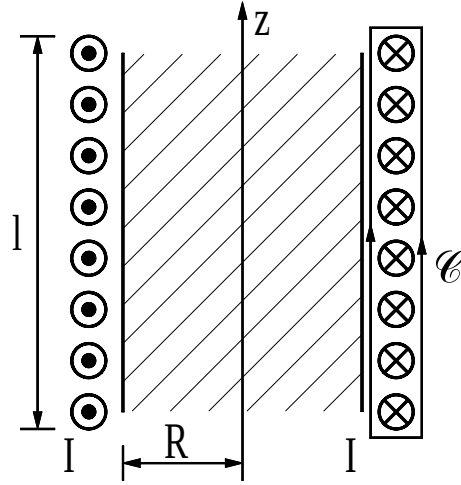


Abbildung 5.26: Unendlich langer Zylinder.

Abbildung 5.27: Bestimmung der Konstanten C durch das Umlaufintegral.

Für das elektrische Feld folgt somit schließlich

$$\underline{E}_\varphi(r) = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\kappa}}(1-j)\frac{nI}{J_0(\alpha R)}J_1(\alpha r). \quad (5.154)$$

Für die pro Längeneinheit im Zylinder in Wärme umgewandelte Verlustleistung finden wir dann zu

$$\underline{P}_J = 2\pi\kappa \int_0^R E_\varphi(r)E_\varphi^*(r)r dr \quad (5.155)$$

$$= 2\pi \left[\frac{nI}{J_0(\alpha R)} \right]^2 \omega\mu \int_0^R J_1(\alpha r)J_1^*(\alpha r)r dr. \quad (5.156)$$

Mit Hilfe des Verlaufs von P_y als Funktion von R/δ kann z. B. der Zylinder so im Verhältnis zur Eindringtiefe dimensioniert werden, daß ein zulässiger Höchstwert von P_y nicht überschritten wird.

Kapitel 6

Ebene Wellen

Im Fall schnell veränderlicher Felder, in dem weder die zeitliche Änderung der magnetischen Induktion $\partial \vec{B}/\partial t$ noch die der Verschiebungsstromdichte $\partial \vec{D}/\partial t$ vernachlässigt werden kann, muß das vollständige System der Maxwellschen Gleichungen gelöst werden.

Die Maxwellschen Gleichungen besagen, daß die elektrischen und magnetischen Felder wechselseitig miteinander verknüpft sind. Die **zeitliche Zustandsänderung der Felder** breitet sich mit endlicher Geschwindigkeit im Raum aus. Sie wird als **elektromagnetische Welle** bezeichnet. Im Vakuum entspricht ihre Ausbreitungsgeschwindigkeit gerade der Lichtgeschwindigkeit. In der Technik werden elektromagnetische Wellen zum Zweck der Energie- und Signalübertragung erzeugt. Nach den Maxwellschen Gleichungen

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (6.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \quad (6.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \varrho \quad (6.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (6.4)$$

erzeugt die zeitabhängige elektrische Feldstärke über den Leitungsstrom $\vec{J}_L$ und den Verschiebungsstrom $\partial \vec{D}/\partial t$ ein Magnetfeld und dieses durch Induktionswirkung ($\partial \vec{B}/\partial t$) wieder ein elektrisches Feld.

Die zur räumlichen und zeitlichen Beschreibung der elektromagnetischen Welle, also des sich im Raum ausbreitenden Auf- und Abbaus des elektrischen und magnetischen Feldes, dienende Funktion ist die zugehörige **Wellenfunktion**. Sie ergibt sich als Lösung der sogenannten Wellengleichung.

6.1 Die Wellengleichungen

Im folgenden wollen wir die Wellengleichung für die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ und die magnetische Feldstärke $\vec{H}$ herleiten. Dies geschieht durch **Entkopplung der Differentiation**. Auf die Wellengleichungen für das Vektorpotential $\vec{A}$ und das skalare Potential φ werden wir später noch eingehen.

Wie bei der Herleitung der Diffusionsgleichungen gehen wir von den allgemeinen Maxwellschen Gleichungen aus und lösen sie direkt mit den elektromagnetischen Feldstärken. Wieder werden ε , μ und κ als konstant angenommen und es sei $\vec{J} = \vec{J}_L$.

Durch Anwendung der Rotation auf (6.1), zeitliche Differentiation von (6.2) und das Einsetzen der Materialgleichungen für $\vec{D}$ und $\vec{H}$ sowie der Definition von $\vec{J}_L$ ergibt sich

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \kappa \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (6.5)$$

Analog folgt

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \kappa\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (6.6)$$

Für Vektorfelder $\vec{F}$ gilt allgemein

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{F} = -\nabla^2 \vec{F} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{F}.$$

Diese Beziehung wird für $\vec{F} = \vec{E}$ bzw. $\vec{H}$ in (6.5) bzw. (6.6) eingesetzt, wobei für $\vec{H}$ der grad div-Term wegen (6.4) und $\mu = \text{const.}$ verschwindet. Wir erhalten somit

$$\nabla^2 \vec{E} - \operatorname{grad} \underbrace{\operatorname{div} \vec{E}}_{\varrho/\varepsilon} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \kappa\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (6.7)$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} + \kappa\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (6.8)$$

Falls die Ladungsträgerdichte $\varrho = 0$ ist und damit kein anregender Term vorhanden ist, verschwindet auch der grad div-Term für $\vec{E}$ wegen (6.3). Dann erfüllen $\vec{E}$ und $\vec{H}$ jeweils die Gleichung für eine gedämpfte Welle:

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \kappa\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (6.9)$$

$$\nabla^2 \vec{H} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \kappa\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (6.10)$$

Die Gleichungen (6.7) und (6.8) sind die allgemeinen **Wellengleichungen**, die Gleichungen (6.9) und (6.10) die Wellengleichungen im Fall verschwindender Raumladungsdichte.

Für Isolatoren, also im Fall $\kappa = 0$, vereinfachen sich (6.9) und (6.10) weiterhin und wir erhalten die speziellen Wellengleichungen

$$\nabla^2 \vec{E} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (6.11)$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad (6.12)$$

Es handelt sich jeweils um ein Paar entkoppelter, hyperbolischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

6.1.1 Ebene Wellen im Isolator

Zunächst betrachten wir die Wellengleichungen (6.11) und (6.12), die in einem ladungsfreien, nichtleitendem Dielektrikum, wie z. B. dem Vakuum, gelten. Außerdem wollen wir annehmen, daß $\vec{E}$ und $\vec{B}$ nur von **einer** der drei kartesischen Koordinaten, z. B. z , und von der Zeit t abhängen:

$$\vec{E} = \vec{E}(z, t) = [E_x(z, t), E_y(z, t), E_z(z, t)],$$

analog für $\vec{B}$. $\vec{E}$ und $\vec{B}$ heißen **ebene Wellen**¹. Wegen $\varrho = 0$, müssen beide Felder quellenfrei sein, d. h.

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (6.13)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (6.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0 \quad \text{wegen reiner } z\text{-Abhängigkeit}$$

$$\rightarrow E_z = E_z(t) \quad (6.15)$$

$$\rightarrow B_z = B_z(t). \quad (6.16)$$

Wir nehmen nun an, daß E_z und B_z auch nicht von der Zeit t abhängen, ja sogar, daß gilt

$$E_z = 0 \quad (6.17)$$

$$B_z = 0. \quad (6.18)$$

Ebene Wellen, die keine Feldkomponenten in ihrer Ausbreitungsrichtung (hier in z -Richtung) haben, werden als **transversale Wellen** bezeichnet. Bei dem Vorhandensein von Raumladungen (z. B. in Plasmen) sind auch ebene Wellen mit Feldkomponenten in Ausbreitungsrichtung, sogenannte **longitudinale Wellen**, möglich.

Die hier betrachteten transversalen Wellen mit der Ausbreitungsrichtung z haben nur die transversalen Komponenten E_x , E_y , B_x und B_y . Für diese Komponenten gilt dann z. B.

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad (6.19)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}. \quad (6.20)$$

Mit

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \quad (6.21)$$

haben wir also eine Differentialgleichung der Form

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f(z, t) = 0, \quad (6.22)$$

die sogenannte homogene Wellengleichung, vorliegen. Nach **d' Alembert** führen wir nun die Transformation

$$\xi = z - vt \quad (6.23)$$

$$\eta = z + vt \quad (6.24)$$

durch. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(z, t)}{\partial z} &= \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 f(z, t)}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 f(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 f(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 f(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 f(z, t)}{\partial t^2} &= v^2 \left[\frac{\partial^2 f(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 f(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 f(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \right] \end{aligned}$$

¹ Allgemein werden Felder, die bei geeignet gewähltem Koordinatensystem, von nur einer Koordinate und der Zeit abhängen, als ebene Wellen bezeichnet.

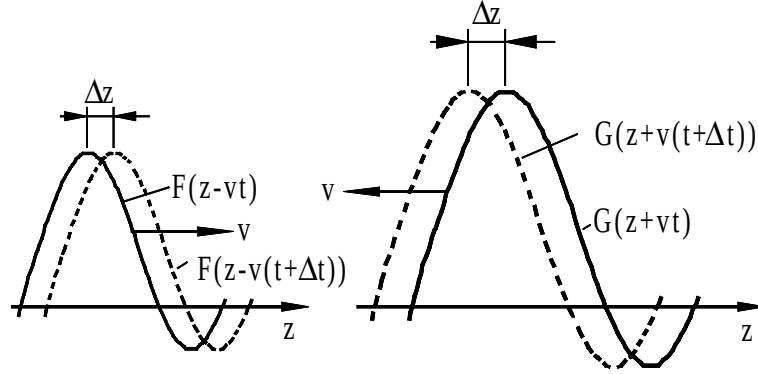


Abbildung 6.1: Zwei entgegengesetzt zueinander wandernde Anteile der ebenen Welle.

wonach Gleichung (6.22)

$$\frac{\partial^2 f(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (6.25)$$

ergibt. Die **allgemeine Lösung** dieser Differentialgleichung lautet

$$f(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta), \quad (6.26)$$

wobei F nur eine Funktion von ξ und G nur eine Funktion von η ist. Folglich sind die Feldkomponenten E_x , E_y , B_x und B_y alle von der Form

$$f_i(z, t) = F_i(z - vt) + G_i(z + vt). \quad (6.27)$$

Der Anteil F_i der ebenen Welle wandert mit der Geschwindigkeit v in positive z -Richtung, d. h. in Ausbreitungsrichtung, ohne eine Formänderung zu erfahren: Ein Wert, den F_i zur Zeit $t = 0$ in der Ebene $x = x_0$ hat, wird zur Zeit t_0 in der Ebene $x = x_0 + vt_0$ erneut angenommen. Der Anteil G_i läuft mit ebenso unveränderter Form in Richtung der negativen z -Achse ($\rightarrow$ Abb. 6.1). Mit der Lichtgeschwindigkeit c des Vakuums ($c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$) gilt die **Phasengeschwindigkeit**

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}. \quad (6.28)$$

Der Zusammenhang zwischen der Phasengeschwindigkeit v und der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum c ist gegeben durch

$$v = \frac{c}{n} \quad (6.29)$$

mit dem **Brechungsindex** n und $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Mit der Wellengleichung (6.22) haben wir für jede Feldkomponente eine zunächst unabhängige Differentialgleichung vorliegen. Andererseits sind die Feldkomponenten von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ nicht unabhängig voneinander, sondern müssen die Maxwellschen Gleichungen erfüllen. Aus der ersten Maxwellschen Gleichung folgt

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z}, 0 \right) \\ &\stackrel{!}{=} -\left(\frac{\partial B_x}{\partial t}, \frac{\partial B_y}{\partial t}, \frac{\partial B_z}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort, daß auch B_z zeitunabhängig sein muß. Im übrigen ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_x}{\partial t} &= \frac{\partial E_y}{\partial z} = F'_y(z - vt) + G'_y(z + vt) \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} &= -\frac{\partial E_x}{\partial z} = -F'_x(z - vt) - G'_x(z + vt).\end{aligned}$$

Die Integration nach der Zeit ergibt

$$B_x = -\frac{1}{v}F_y(z - vt) + \frac{1}{v}G_y(z + vt) + \tilde{F}_x(z) \quad (6.30)$$

$$B_y = \frac{1}{v}F_x(z - vt) - \frac{1}{v}G_x(z + vt) + \tilde{F}_y(z) \quad (6.31)$$

Andererseits folgt aus der 2. Maxwellschen Gleichung (6.2) im Isolator für $\vec{J} = 0$:

$$\begin{aligned}\text{rot}\vec{H} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial H_y}{\partial z}, \frac{\partial H_x}{\partial z}, 0 \right) \\ &\stackrel{!}{=} \left(\frac{\partial D_x}{\partial t}, \frac{\partial D_y}{\partial t}, \frac{\partial D_z}{\partial t} \right).\end{aligned}$$

Hieraus folgt, daß D_z und damit auch E_z nicht zeitabhängig sind. Die Annahmen (6.17) und (6.18) waren somit bezüglich der Zeitabhängigkeit wohl begründet. Unter der Verwendung von (6.30) und (6.31) ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_x}{\partial z} &= \mu\varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{v^2} [-vF'_y(z - vt) + vG'_y(z + vt)] \\ &= -\frac{1}{v}F'_y(z - vt) + \frac{1}{v}G'_y(z + vt) \\ \frac{\partial B_y}{\partial z} &= -\mu\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{v^2} [-vF'_x(z - vt) + vG'_x(z + vt)] \\ &= +\frac{1}{v}F'_x(z - vt) - \frac{1}{v}G'_x(z + vt)\end{aligned}$$

Die Integration nach z liefert dann

$$B_x = -\frac{1}{v}F_y(z - vt) + \frac{1}{v}G_y(z + vt) + \tilde{G}_x(t) \quad (6.32)$$

$$B_y = \frac{1}{v}F_x(z - vt) - \frac{1}{v}G_x(z + vt) + \tilde{G}_y(t). \quad (6.33)$$

Durch den Vergleich von (6.30) mit (6.32) und (6.31) mit (6.33) folgt für die „Integrationskonstanten“

$$\left. \begin{aligned} \tilde{F}_x(z) &= \tilde{G}_x(t) \\ \tilde{F}_y(z) &= \tilde{G}_y(t), \end{aligned} \right\} \quad (6.34)$$

d. h. sie müssen räumlich und zeitlich konstant sein, da sie unabhängig von z und t sind.

Von solchen konstanten Feldern abgesehen, erhalten wir somit für das Feld der ebenen Welle:

$$\begin{aligned}
 E_x &= F_x(z - vt) + G_x(z + vt) \\
 E_y &= F_y(z - vt) + G_y(z + vt) \\
 E_z &= 0 \\
 B_x &= -\frac{1}{v}F_y(z - vt) + \frac{1}{v}G_y(z + vt) \\
 B_y &= \frac{1}{v}F_x(z - vt) - \frac{1}{v}G_x(z + vt) \\
 B_z &= 0
 \end{aligned} \tag{6.35}$$

Bemerkung: $(z - vt)$ = Anteil, der in positive z -Richtung läuft
 $(z + vt)$ = Anteil, der in negative z -Richtung läuft

Mit den Ausbreitungsrichtungen $\vec{e}_a = (0, 0, 1)$ bzw. $(0, 0, -1)$ können wir die Felder einer ebenen Welle auch unabhängig vom speziell gewählten Koordinatensystem darstellen:

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_a \times \vec{E}}{v} \tag{6.36}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{e}_a \times \vec{E}}{\mu v} = \frac{\vec{e}_a \times \vec{E}}{\sqrt{\mu/\varepsilon}} = \frac{\vec{e}_a \times \vec{E}}{Z} \tag{6.37}$$

Mit dem **Wellenwiderstand**

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{6.38}$$

des Mediums. Umgekehrt gilt

$$\vec{E} = v(\vec{B} \times \vec{e}_a) = Z(\vec{H} \times \vec{e}_a), \tag{6.39}$$

d. h. die drei Vektoren $\vec{E}$, $\vec{B}$ (bzw. $\vec{H}$) und $\vec{e}_a$ bilden (in dieser Reihenfolge) ein Rechtssystem. Für das Vakuum ist der Wellenwiderstand

$$Z = Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{Vs/Am}}{8.855 \cdot 10^{-12} \text{As/Vm}}} \approx 377\Omega \approx 120\pi\Omega. \tag{6.40}$$

Ist in den Gleichungen (6.35) $E_x = 0$ ($\rightarrow B_y = 0$) bzw. $E_y = 0$ ($\rightarrow B_x = 0$), so schwingen elektrisches und magnetisches Feld nur in einer Ebene. Solche Wellen heißen **linear polarisiert**.

Die allgemeine ebene Welle gemäß (6.35) kann aus zwei zueinander senkrecht polarisierten Wellen zusammengesetzt werden. Ergänzende Informationen über die Wellengleichungen finden Sie in Anhang A.

6.1.2 Zeitharmonische ebene Wellen

Die oben gezeigten Wellen werden häufig auch als „Wellenpakete“ (oder „Wellenzüge“) bezeichnet, da sie sich als Überlagerung geeigneter sinus- und cosinusartiger Wellen mit bestimmten Wellenlängen darstellen lassen: Jede beliebige zeitabhängige Funktion lässt sich als Fourier-Integral, d. h. als Überlagerung zeitharmonischer Vorgänge darstellen. Deshalb können wir uns ohne Beschränkung der Allgemeinheit im folgenden auf solche Vorgänge konzentrieren.

$$\left. \begin{aligned}
 E_x(z, t) &= E_{x0} \cos(\omega t - kz + \varphi) \\
 H_y(z, t) &= H_{y0} \cos(\omega t - kz + \varphi) \\
 H_{y0} &= \frac{E_{x0}}{Z}
 \end{aligned} \right\} \tag{6.41}$$

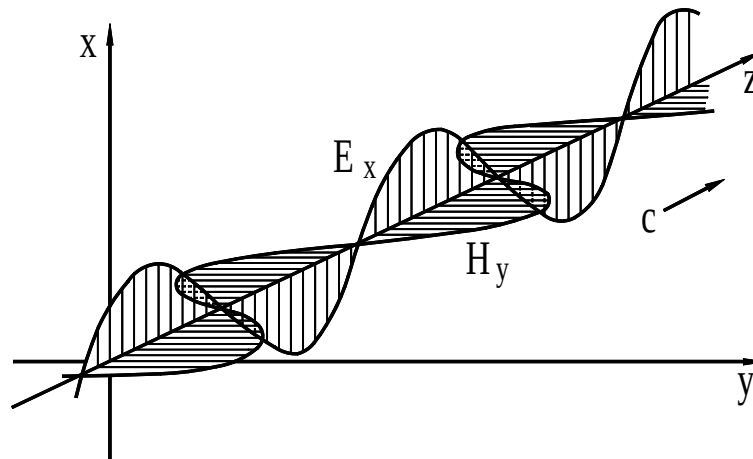
Abbildung 6.2: Ebene Welle in Richtung der z -Achse.

Abb. 6.2 ist ein Beispiel für eine zeitharmonische ebene Welle. E_{x0} und H_{y0} sind die **Amplituden der Felder**. Der **Phasenwinkel** φ hängt vom gewählten Ursprung ab. Folgende Zusammenhänge bestehen zwischen der **Kreisfrequenz** ω der Welle, ihrer **Frequenz** f , ihrer **Periode** τ , ihrer **Wellenzahl** k und ihrer **Wellenlänge** λ :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{\tau} \quad (6.42)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \text{Anzahl der Perioden je Längeneinheit.} \quad (6.43)$$

Zur **Phasengeschwindigkeit** v_{ph} bestehen folgende Beziehungen

$$v_{ph} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \lambda f = \frac{2\pi}{k} \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega}{k}. \quad (6.44)$$

Die Beziehung (6.44) ergibt sich auch aus der Wellengleichung (6.11) für den Lösungsansatz (6.41):

$$-k^2 E_x = -\frac{1}{v^2} \omega^2 E_x.$$

Weiterhin kann (6.41) als Spezialfall von (6.27) aufgefaßt werden, da

$$\cos(\omega t - kz + \varphi) = \cos\left[\varphi - k\left(z - \frac{\omega}{k}t\right)\right] = \cos[\varphi - k(z - vt)]$$

d. h. eine Funktion von $(z - vt)$ ist. Nach (6.44) ist²

$\omega = vk$

(6.45)

Diese Beziehung zwischen Kreisfrequenz ω und Wellenzahl k heißt **Dispersionsbeziehung**. Im allgemeinen lautet die Dispersionsbeziehung

$\omega = \omega(k)$

(6.46)

²häufig wird β statt k verwendet.

Der Welle sind im allgemeinen also verschiedene Geschwindigkeiten zugeordnet.

Nun wollen wir uns die allgemeine Definition der Phasengeschwindigkeit herleiten. Sie ist die Geschwindigkeit, mit der sich die Phasen der Welle fortpflanzen. Die Phase $\omega(k)t - kz + \varphi$ bleibt für $z = z_0 + \frac{\omega(k)}{k}t$ konstant, denn

$$\omega(k)t - kz_0 - \omega(k)t + \varphi = \varphi - kz_0.$$

Die **Phasengeschwindigkeit** ist somit definiert als

$$v_{ph} = \frac{\omega(k)}{k} \quad (6.47)$$

Als **Dispersion** wird die Tatsache bezeichnet, daß die Phasengeschwindigkeit abhängig von der Frequenz bzw. der Wellenlänge sein kann (vergleiche (6.47)).

Im Fall der Dispersionsbeziehung (6.45) mit $v = c$ ist die Phasengeschwindigkeit für alle Frequenzen bzw. Wellenlängen gleich. Hier wird vom „**dispersionsfreien**“ Fall gesprochen.

Eine weitere wesentliche Größe ist die **Gruppengeschwindigkeit**. Die Gruppengeschwindigkeit – nicht die Phasengeschwindigkeit – ist im allgemeinen für den Energietransport wesentlich. Sie ist definiert als

$$v_g = \frac{d\omega(k)}{dk} \quad (6.48)$$

Für die Phasengeschwindigkeit gilt

$$v_{ph} = \frac{\omega(k)}{k} = \frac{c}{n}$$

mit der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit c und dem Brechungsindex n . Die Phasengeschwindigkeit kann größer oder kleiner c sein, je nachdem ob n kleiner oder größer als 1 ist. Für die meisten optischen Wellenlängen ist der Brechungsindex n in nahezu allen Substanzen größer als 1.

Für die Gruppengeschwindigkeit und damit für die Geschwindigkeit des Energietransports gilt bei normaler Dispersion, daß sie kleiner als die Phasengeschwindigkeit und insbesondere auch kleiner als die Lichtgeschwindigkeit c ist. Dies erfordern auch die Grundprinzipien der speziellen Relativitätstheorie.

Im hier behandelten dispersionsfreien Fall ($v = c$ in Gleichung (6.45)) sind beide Geschwindigkeiten gleich

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = c = \frac{d\omega}{dk} = v_g. \quad (6.49)$$

Die Gruppengeschwindigkeit bezieht sich auf eine **Wellengruppe (Wellenpaket)**, das aus Wellen verschiedener Frequenzen aufgebaut ist. Im dispersionsfreien Fall bewegen sich alle Teilwellen mit derselben Phasengeschwindigkeit $V_{ph} = c$ vorwärts und das Wellenpaket verändert seine Gestalt nicht. Im dispersiven Fall sind im allgemeinen Aussagen über das Verhalten des Wellenpakets kaum möglich. Falls allerdings die im Paket vertretenen Frequenzen in einem „schmalen“ Intervall $(\omega, \Delta\omega)$ mit $\Delta\omega \ll \omega$ liegen – man spricht von einem „schmalbandigen“ Wellenpaket –, bewegt sich das Maximum des Wellenpakets mit der Gruppengeschwindigkeit v_g ($\rightarrow$ Abb. 6.3).

Die zeitharmonischen ebenen Wellen sind von grundlegender Bedeutung, da alle möglichen Wellen durch eine Überlagerung zeitharmonischer ebener Wellen darstellbar sind.

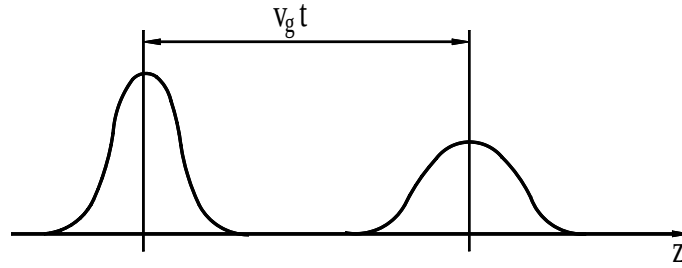


Abbildung 6.3: Verhalten eines Wellenpakets im dispersiven Fall.

Die **Richtung des Energietransports** einer fortschreitenden elektromagnetischen Welle steht senkrecht auf den Vektoren der elektrischen und magnetischen Feldstärke und ist gemäß Gleichung (5.104) durch die Richtung des Poynting-Vektors $\vec{P}_k = \frac{1}{2}(\vec{E} \times \vec{H}^*)$ gegeben. Bei komplexer Schreibweise

$$\begin{aligned}\vec{E}_x(t, z) &= \vec{E}_{x0} e^{j(\omega t - \gamma z)} \\ \vec{H}_y(t, z) &= \vec{H}_{y0} e^{j(\omega t - \gamma z)}\end{aligned}$$

mit der komplexen Ausbreitungskonstante

$$\begin{aligned}\gamma &= \beta - j\alpha, & \alpha &= \text{Dämpfungskonstante} \\ & & &= \text{Abnahme der Amplitude je Länge} \\ & & &\text{in Ausbreitungsrichtung} \\ \beta &= \text{Phasenkonstante} \\ &= \text{Phasenänderung in} \\ &\quad \text{Ausbreitungsrichtung} \\ &\rightarrow \text{Wellenzahl } k \text{ wie oben}\end{aligned}$$

erhalten wir für eine in positive z -Richtung fortschreitende Welle

$$\begin{aligned}\vec{P}_k &= \frac{1}{2} (\vec{E} \times \vec{H}^*) = \frac{1}{2} (\vec{E}_{x0} e^{-\gamma z} \vec{e}_x \times \vec{H}_{y0}^* e^{\gamma z} \vec{e}_y) \\ &= \vec{e}_z \\ \frac{H_{y0}}{Z} &= \frac{E_{x0}}{Z} \rightarrow P_k = \frac{1}{2} \frac{|E_{x0}|^2}{Z^*} \vec{e}_z \\ Z &= \text{Feldwellenwiderstand,}\end{aligned} \tag{6.50}$$

d. h. der Energiefluß erfolgt unabhängig von x und y in Ausbreitungsrichtung $\vec{e}_z$.

6.1.3 Polarisation und Wellenform

Die Ebene, in der der elektrische Feldvektor $\vec{E}$ schwingt, wird als **Polarisationsebene** bezeichnet.

Betrachten wir eine ebene Welle, die sich in positiver z -Richtung ausbreitet. Das Zusammenwirken der Feldkomponenten E_x und E_y beim Fortschreiten der Welle entscheidet über den Polarisierungstyp ($\rightarrow$ Abb. 6.4):

1. Sind beide Komponenten **gleichphasig**, so bewegt sich ihre Vektorsumme auf einer Geraden. Solche Wellen heißen **linear polarisiert**.
2. Bewegt sich ihre Vektorsumme beim Fortschreiten der Welle auf einer kreisförmigen Schraubenlinienbahn, so heißt die Welle **zirkular polarisiert**. Dann gilt $|\vec{E}_x| = |\vec{E}_y|$ und die **Phasenverschiebung beträgt** $\pi/2$.

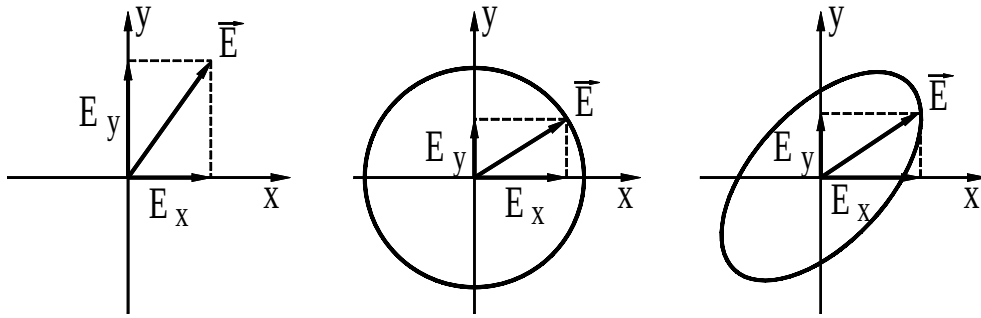


Abbildung 6.4: Die drei verschiedenen Polarisationsarten.

3. Bewegt sich ihre Vektorsumme und damit die Spitze des $\vec{E}$ -Vektors für $z = \text{const.}$ auf einer ellipsenförmigen Schraubenlinienbahn, so heißt die Welle **elliptisch polarisiert**. In diesem Fall ist $|\vec{E}_x| \neq |\vec{E}_y|$ **oder** die Phasenverschiebung ist ungleich $\pi/2$.

Sind bei einer Welle Phasen- und Äquiampplitudenflächen um einen räumlichen Winkel $\vartheta \neq 0$ gedreht, so liegt eine **inhomogene ebene Welle** vor. Solche Wellen haben zwingend eine longitudinale Feldkomponente in Ausbreitungsrichtung.

Bei einer Einteilung von Wellen gemäß der Form ihrer Phasenflächen werden neben den **ebenen Wellen** noch **Zylinderwellen** und **Kugelwellen** unterschieden. Letztere lassen sich als Überlagerung ebener Wellen darstellen.

6.1.4 Ebene Wellen mit beliebiger Ausbreitungsrichtung

Für ebene Wellen mit Ausbreitungsrichtung in eine kartesische Koordinatenrichtung haben wir gesehen, daß die elektrischen und magnetischen Feldstärken senkrecht aufeinander **und** senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stehen ($\rightarrow$ Abb. 6.5).

Nun betrachten wir den Fall, daß die Ausbreitungsrichtung durch einen beliebigen Einheits-

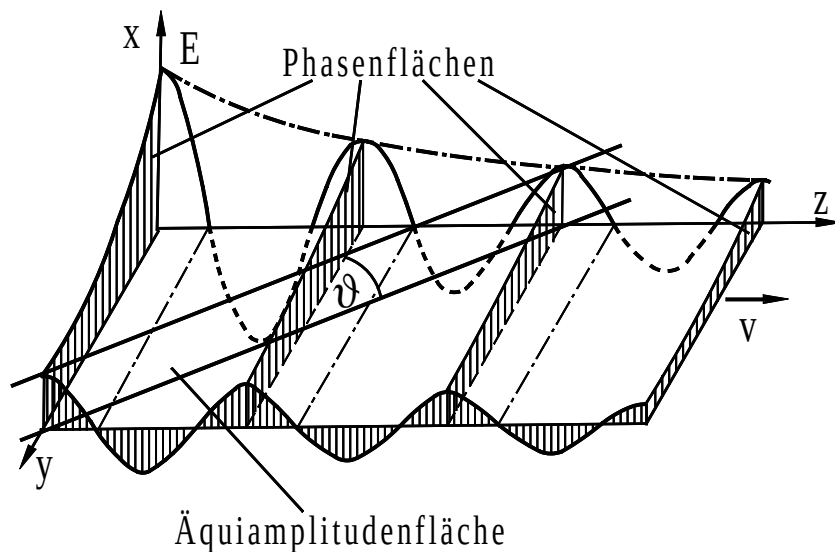


Abbildung 6.5: Inhomogene ebene Welle.

vektor $\vec{n}$ gegeben ist. Dann lautet die Lösung der Wellengleichung

$$f(\vec{r}, t) = f\left(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{v}\right). \quad (6.51)$$

Die Funktion liefert zu einem gegebenen Zeitpunkt t für alle Punkte mit $\vec{n} \cdot \vec{r} = \text{const.}$ den gleichen Wert, d. h. wir erhalten nun eine Ebene senkrecht zu $\vec{n}$. Der **Wellenvektor** $\vec{k}$ (**Wellenzahlvektor**, **Ausbreitungsvektor**) gibt durch seine Richtung die Ausbreitungsrichtung an und sein Betrag ist gerade gleich der Wellenzahl:

$$\vec{k} = k\vec{n} \quad \text{mit} \quad |\vec{k}| = k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} \quad (6.52)$$

Eine zeitharmonische Welle ist dann (in komplexer Schreibweise) charakterisiert durch ihre komplexe Amplitude

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r}) = (\underline{E}_1 \vec{e}_1 + \underline{E}_2 \vec{e}_2) e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (6.53)$$

mit den beiden aufeinander und zu $\vec{k}$ senkrecht stehenden Einheitsvektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$

$$\vec{e}_1 \vec{k} = \vec{e}_2 \vec{k} = \vec{e}_1 \vec{e}_2.$$

Die komplexe Amplitude des zugehörigen magnetischen Feldes ergibt sich aus

$$\underline{\vec{H}} = \frac{1}{Z} (\vec{n} \times \underline{\vec{E}}). \quad (6.54)$$

Die physikalischen Felder ergeben sich dann aus

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ (\underline{E}_1 \vec{e}_1 + \underline{E}_2 \vec{e}_2) e^{-j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right\} \quad (6.55)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ \frac{1}{Z} (\vec{n} \times \underline{\vec{E}}) e^{+j\omega t} \right\} \quad (6.56)$$

6.1.5 Stehende Wellen

Wenn zwei ebene Wellen mit gleicher Amplitude, gleicher Wellenlänge und gleicher Polarisation einander entgegenlaufen, so ergibt sich

$$\underline{E}_x(z, t) = \underline{E}_{x0} \left[e^{j(\omega t - kz + \varphi_1)} + e^{j(\omega t + kz + \varphi_2)} \right] \quad (6.57)$$

$$\underline{H}_y(z, t) = \frac{\underline{E}_{x0}}{Z} \left[e^{j(\omega t - kz + \varphi_1)} - e^{j(\omega t + kz + \varphi_2)} \right]. \quad (6.58)$$

Durch geeignete Wahl der Nullpunkte von z und t kann $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ erreicht werden, woraus folgt (Definition der Cosinus-Funktion: $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$)

$$\underline{E}_x(z, t) = 2\underline{E}_{x0} \cos(kz) e^{j\omega t} \quad (6.59)$$

$$\underline{H}_y(z, t) = 2j \frac{\underline{E}_{x0}}{Z} \sin(kz) e^{j\omega t}. \quad (6.60)$$

Wir erhalten also eine „**stehende Welle**“, die sozusagen „auf der Stelle“ schwingt und keine Energie transportiert ($\rightarrow$ Abb. 6.6). Die Nullstellen von $\underline{E}_x$, die sogenannten **Schwingungsknoten**, liegen bei

$$\begin{aligned} kz &= \frac{2n+1}{2} \pi \\ z &= \frac{(2n+1)\pi}{2k} = \frac{2n+1}{4} \lambda, \end{aligned}$$

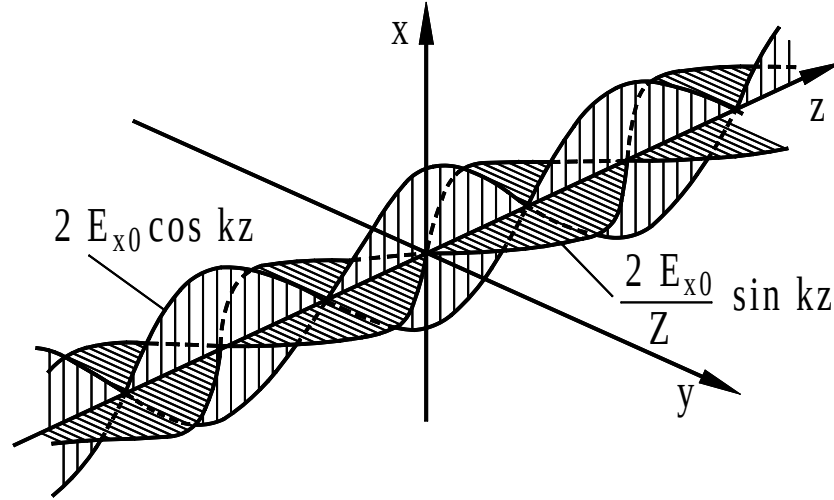


Abbildung 6.6: Das Felddbild einer stehenden Welle.

also ungeradzahligen Vielfachen von $\lambda/4$:

$$z = \pm \frac{\lambda}{4}, \pm \frac{3}{4}\lambda, \pm \frac{5}{4}\lambda, \dots$$

Die Knoten des magnetischen Feldes sind bei

$$\begin{aligned} kz &= \frac{n\pi}{2} \\ z &= \frac{n\pi}{k} = \frac{n}{2}\lambda, \end{aligned}$$

also Vielfachen von $\lambda/2$:

$$z = 0, \pm \frac{\lambda}{2}, \pm \lambda, \pm \frac{3}{2}\lambda, \dots$$

Zur Zeit $t = 0$ z. B. ist $\underline{H}_y = 0$, während $\underline{E}_x$ seinen maximalen Wert annimmt. zur Zeit $t = \tau/4$ dagegen ist $\underline{E}_x = 0$ und $\underline{H}_y$ nimmt seinen Maximalwert an, usw.

6.1.6 TE-Wellen und TM-Wellen

Wir betrachten nun zwei ebene Wellen gleicher Frequenz, gleicher Amplitude und gleicher Polarisation aber unterschiedlicher Ausbreitungsrichtung ($\rightarrow$ Abb. 6.7).

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= \vec{E}_0 e^{(j\omega t - j\vec{k}_1 \vec{r})} \\ \vec{B}_1 &= \frac{1}{v_{ph}} (\vec{n}_1 \times \vec{E}_0 e^{-j\vec{k}_1 \vec{r}}) e^{j\omega t} \quad \text{vgl. (6.55), (6.56)} \end{aligned}$$

($\vec{n}_1$ = Einheitsvektor in Ausbreitungsrichtung, $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$, $v_{ph} = 1/\sqrt{\varepsilon\mu} \rightarrow Z/v_{ph} = \mu$) wobei wir

$$\begin{aligned} \vec{k}_1 &= (0, -k_y, k_z) \\ \vec{E}_0 &= (\underline{E}_{x0}, 0, 0) \end{aligned}$$

annehmen.

$$\begin{aligned} \vec{E}_2 &= \vec{E}_0 e^{(j\omega t - j\vec{k}_2 \vec{r})} \\ \vec{B}_2 &= \frac{1}{v_{ph}} (\vec{n}_2 \times \vec{E}_0 e^{-j\vec{k}_2 \vec{r}}) e^{j\omega t} \end{aligned}$$

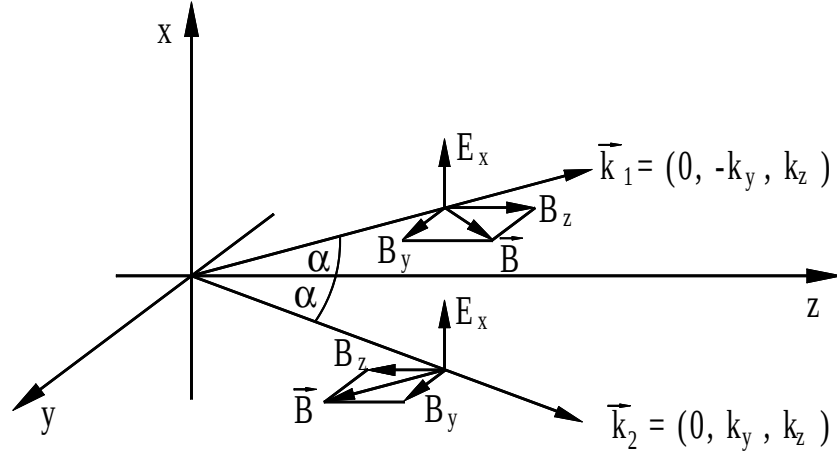


Abbildung 6.7: Zwei ebene Wellen mit unterschiedlicher Ausbreitungsrichtung.

mit $\vec{k}_2 = (0, k_y, k_z)$. Die Überlagerung dieser beiden ebenen Wellen ergibt

$$\vec{E} = 2\vec{E}_0 \cos(k_y y) e^{-j k_z z} e^{j \omega t} \quad (6.61)$$

$$\vec{B} = \frac{1}{v_{ph}} \left[\left(\vec{n}_1 \times \vec{E}_0 e^{-j \vec{k}_1 \vec{r}} \right) + \left(\vec{n}_2 \times \vec{E}_0 e^{-j \vec{k}_2 \vec{r}} \right) \right] e^{j \omega t} \quad (6.62)$$

bzw. komponentenweise³

$$\left. \begin{aligned} \underline{E}_x &= 2\underline{E}_{x0} \cos(k_y y) e^{-j k_z z} e^{j \omega t} \\ \underline{E}_y &= 0 \\ \underline{E}_z &= 0 \\ \underline{B}_x &= 0 \\ \underline{B}_y &= 2\underline{E}_{x0} \cos(k_y y) \frac{k_z}{\omega} e^{-j k_z z} e^{j \omega t} \\ \underline{B}_z &= -2j \underline{E}_{x0} \sin(k_y y) \frac{k_y}{\omega} e^{-j k_z z} e^{j \omega t} \end{aligned} \right\} \quad (6.63)$$

($k = |\vec{k}_1| = |\vec{k}_2| = \omega/v_{ph}$) Die resultierende Welle breitet sich somit in z -Richtung aus und ist keine ebene Welle, denn neben den transversalen Feldkomponenten E_x und B_y besitzt sie eine longitudinale Magnetfeldkomponente B_z . Eine solche Welle wird als **transversal elektrische Welle**, kurz **TE-Welle** (oder **H-Welle**), bezeichnet, weil sie bezüglich des elektrischen Feldes transversal ist (nicht jedoch bezüglich des Magnetfeldes). Die Amplituden der TE-Welle sind eine Funktion von y .

Analog existieren **transversal magnetische Wellen**, kurz **TM-Wellen** (oder **E-Welle**), die transversal bezüglich des Magnetfeldes, aber nicht des elektrischen Feldes sind. Ihre Ausbreitungsrichtung ist wiederum die z -Richtung und ihre Amplituden sind eine Funktion von y .

Die TM-Wellen entstehen durch Überlagerung der beiden folgenden Wellen:

$$\begin{aligned} \vec{B}_1 &= \vec{B}_0 e^{(j \omega t - j \vec{k}_1 \vec{r})} \\ \vec{E}_1 &= v_{ph} \left(\vec{n}_1 \times \vec{B}_0 e^{-j \vec{k}_1 \vec{r}} \right) e^{j \omega t} \end{aligned}$$

mit $\vec{k}_1 = (0, -k_y, k_z)$; $\vec{B}_0 = (\underline{B}_{x0}, 0, 0)$ sowie

$$\begin{aligned} \vec{B}_2 &= \vec{B}_0 e^{(j \omega t - j \vec{k}_2 \vec{r})} \\ \vec{E}_2 &= v_{ph} \left(\vec{n}_2 \times \vec{B}_0 e^{-j \vec{k}_2 \vec{r}} \right) e^{j \omega t} \end{aligned}$$

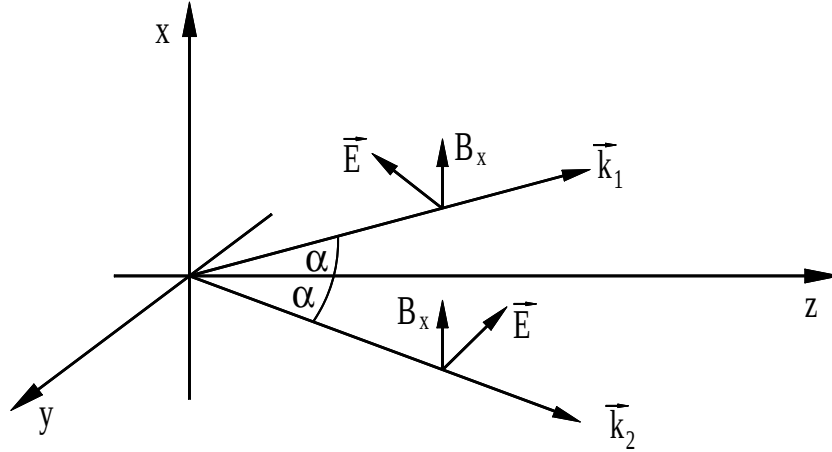


Abbildung 6.8: Feldvektoren zweier sich überlagernden ebenen Wellen.

mit $\vec{k}_2 = (0, k_y, k_z)$ ($\rightarrow$ Abb. 6.8). Es ergibt sich komponentenweise

$$\left. \begin{aligned} \underline{B}_x &= 2\underline{B}_{x0} \cos(k_y y) e^{-jk_z z} e^{j\omega t} \\ \underline{B}_y &= 0 \\ \underline{B}_z &= 0 \\ \underline{E}_x &= 0 \\ \underline{E}_y &= -2\underline{B}_{x0} \cos(k_y y) \frac{v_{ph} k_z}{k} e^{-jk_z z} e^{j\omega t} \\ \underline{E}_z &= 2j\underline{B}_{x0} \sin(k_y y) \frac{v_{ph} k_y}{k} e^{-jk_z z} e^{j\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (6.64)$$

($k = |\vec{k}_1| = |\vec{k}_2| = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}$) TE- und TM-Wellen werden wir im Zusammenhang mit Hohlleitern noch ausführlich behandeln. Ihre Phasengeschwindigkeit ist

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k_z}$$

und ihre Wellenzahl ist

$$k^2 = k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Hieraus folgt

$$k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_y^2} \quad (6.65)$$

womit

$$v_{ph} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_y^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{k_y^2 c^2}{\omega^2}}} \geq c \quad (6.66)$$

gilt. Die Phasengeschwindigkeit der TE- und TM-Wellen liegt also über der Lichtgeschwindigkeit des betreffenden Mediums, im Vakuum also oberhalb der Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 . Dies ist möglich (ohne Widerspruch zur Relativitätstheorie), denn bei der Gruppen – und nicht der Phasengeschwindigkeit – handelt es sich um die Signalgeschwindigkeit der Welle. Für diese gilt

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_z} = \frac{1}{\frac{dk_z}{d\omega}} = c^2 \frac{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_y^2}}{\omega} = \frac{c^2}{v_{ph}}. \quad (6.67)$$

³ Definition von $\cos x$ und $\sin x \rightarrow \cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$, $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$

Daher ist

$$v_g \cdot v_{ph} = c^2 \quad (6.68)$$

und gemäß (6.66) gilt

$$v_g \leq c, \quad (6.69)$$

was nach der Relativitätstheorie für jegliche Signalgeschwindigkeiten gelten muß. Gleichung (6.68) kann auch aus der Dispersionsrelation abgeleitet werden.

6.2 Ebene zeitharmonische Wellen in verlustbehafteten Medien

Als nächstes seien nun Medien betrachtet, die durch die Dielektrizitätskonstante ε , die Permeabilität μ und die Leitfähigkeit κ gekennzeichnet seien. Freie Raumladungen sollen nicht existieren.

Gemäß (6.9) und (6.10) gelten die Wellengleichungen

$$\Delta \vec{E} = \mu \kappa \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (6.70)$$

$$\Delta \vec{B} = \mu \kappa \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}. \quad (6.71)$$

In Anpassung an die oben gewählte komplexe Schreibweise der Felder, führen wir nach Gleichung (5.95) eine **komplexe Dielektrizitätskonstante** ein:

$$\underline{\varepsilon}_k = \varepsilon + \frac{\kappa}{j\omega} = \varepsilon(1 - j \tan \delta_\varepsilon). \quad (6.72)$$

Die Leitungsstromdichte wird in ihr als Imaginärteil berücksichtigt.

Dann tritt an die Stelle der reellen Wellenzahl k die bereits in Abschnitt 6.1.2 eingeführte **komplexe Wellenzahl** $\underline{k}$ (dort als γ bezeichnet):

$$\underline{k} = \omega \sqrt{\mu \underline{\varepsilon}_k} = \beta - j\alpha \quad (6.73)$$

mit der Dämpfungskonstanten α und der Phasenkonstanten β . Das elektrische Feld schreibt sich dann zu

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \underline{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \vec{r})} \\ &= \underline{E}_0 e^{j(\omega t - \beta z)} e^{-\alpha z}, \end{aligned}$$

sofern wir für $\vec{k}$ einen Vektor in z -Richtung annehmen. Die Energie, die die Wellen durch die Dämpfung verlieren, wird in Stromwärme umgewandelt (vergleiche Energiesatz).

6.3 Reflexion ebener Wellen

6.3.1 Reflexion an einem unendlichen Halbraum

Eine ebene monochromatische Halbwelle falle aus dem Halbraum $z < 0$ auf die ebene Trennfläche der beiden Medien 1 und 2 ein ($\rightarrow$ Abb. 6.9). Ein Teil der Welle wird an der Trennschicht ins Medium 1 zurückreflektiert, während der andere Teil ins Medium 2 eindringt. An der Trennfläche bei $z = 0$ müssen die tangentialen Feldkomponenten die Stetigkeitsbedingungen erfüllen (vergleiche Abschnitt 2.1.5 und 3.4).

Gemäß obiger Darstellung gilt für die einfallende und reflektierte Welle in Medium 1

$$\underline{E}_{y1} = \underline{E}_0 (e^{-jk_1 z} + \underline{r} e^{jk_1 z}) \quad (6.74)$$

$$\underline{H}_{x1} = \frac{\underline{E}_0}{Z_1} (e^{-jk_1 z} - \underline{r} e^{jk_1 z}) \quad (6.75)$$

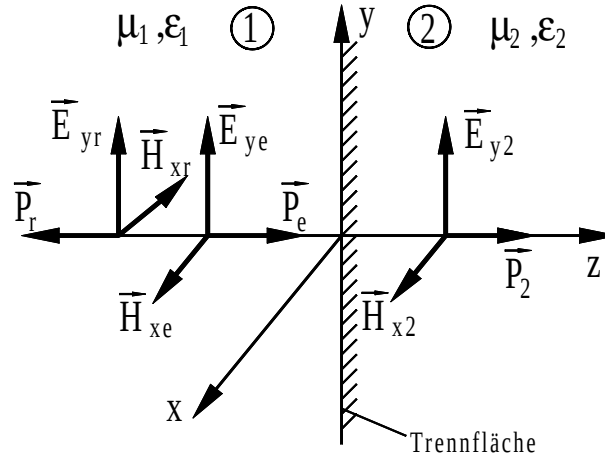


Abbildung 6.9: Reflexion und Transmission bei senkrechtem Einfall.

mit

$$k_1 = \omega \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} \quad \text{und} \quad Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}.$$

$\underline{E}_0$ ist die komplexe Amplitude des einfallenden elektrischen Feldes, k_1 die Wellenzahl und Z_1 der Wellenwiderstand von Medium 1. $\underline{r}$ ist der sogenannte **Reflexionsfaktor**. Für das in Medium 2 eindringende Feld können wir den Ansatz

$$\underline{E}_{y2} = \underline{E}_0 \underline{d} e^{-jk_2 z} \quad (6.76)$$

$$\underline{H}_{x2} = \frac{\underline{E}_0}{Z_2} \underline{d} e^{-jk_2 z} \quad (6.77)$$

machen mit

$$k_2 = \omega \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} \quad \text{und} \quad Z_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}.$$

k_2 ist die Wellenzahl und Z_2 der Wellenwiderstand von Medium 2. $\underline{d}$ wird als **Durchgangsfaktor** bezeichnet.

Die Stetigkeitsbedingung führt (bei verschwindender Flächenstromdichte) in der Trennfläche $z = 0$ zu

$$\left. \begin{aligned} \underline{E}_0(1 + \underline{r}) &= \underline{E}_0 \underline{d} \\ \frac{\underline{E}_0}{Z_1}(1 - \underline{r}) &= \frac{\underline{E}_0}{Z_2} \underline{d} \end{aligned} \right\} \quad (6.78)$$

Die Auflösung von (6.78) liefert

$$\underline{r} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad (6.79)$$

$$\underline{d} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}. \quad (6.80)$$

Im Falle, daß Medium 2 ein idealer Leiter und Medium 1 ein Dielektrikum ist, erhalten wir $\underline{r} = -1$ und $\underline{d} = 0$. Die einfallende Welle wird also unter Phasendrehung um π total reflektiert und wir erhalten eine stehende Welle (vergleiche Analogie zu Abschnitt 6.1.5).

6.3.2 Reflexion an dielektrischer Platte

Durch eine dielektrische Platte kann eine Reflexion einer senkrecht einfallenden Welle verhindert werden, indem die Teilreflexion in Medium 1 an der dielektrischen Platte (= Medium 2) durch die weitere Reflexion an Medium 3 gerade ausgelöscht wird ($\rightarrow$ Abb. 6.10). Es ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \underline{E}_{y1} &= \underline{E}_0 (e^{-jk_1 z} + \underline{r}_1 e^{jk_1 z}) \\ \underline{H}_{x1} &= \frac{\underline{E}_0}{Z_1} (e^{-jk_1 z} - \underline{r}_1 e^{jk_1 z}) \end{aligned} \right\} \quad (6.81)$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{E}_{y2} &= \underline{E}_0 (\underline{d}_2 e^{-jk_2 z} + \underline{r}_2 e^{jk_2 z}) \\ \underline{H}_{x2} &= \frac{\underline{E}_0}{Z_2} (\underline{d}_2 e^{-jk_2 z} - \underline{r}_2 e^{jk_2 z}) \end{aligned} \right\} \quad (6.82)$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{E}_{y3} &= \underline{E}_0 \underline{d}_3 e^{-jk_3 z} \\ \underline{H}_{x3} &= \frac{\underline{E}_0}{Z_3} \underline{d}_3 e^{-jk_3 z} \end{aligned} \right\} \quad (6.83)$$

Mittels der Stetigkeitsbedingungen an den Trennflächen ergeben sich die Reflexions- und Durchgangsfaktoren.

1. Stetigkeit bei $z = 0$:

$$\left. \begin{aligned} 1 + \underline{r}_1 &= \underline{d}_2 + \underline{r}_2 \\ \frac{1}{Z_1}(1 - \underline{r}_1) &= \frac{1}{Z_2}(\underline{d}_2 - \underline{r}_2) \end{aligned} \right\} \quad (6.84)$$

$$\rightarrow \frac{1 + \underline{r}_1}{1 - \underline{r}_1} = \frac{Z_2 \underline{d}_2 + \underline{r}_2}{Z_1 \underline{d}_2 - \underline{r}_2} \quad (6.85)$$

2. Stetigkeit bei $z = b$:

$$\left. \begin{aligned} \underline{d}_2 e^{-jk_2 b} + \underline{r}_2 e^{jk_2 b} &= \underline{d}_3 e^{-jk_3 b} \\ \frac{1}{Z_2}(\underline{d}_2 e^{-jk_2 b} - \underline{r}_2 e^{jk_2 b}) &= \frac{1}{Z_3} \underline{d}_3 e^{-jk_3 b} \end{aligned} \right\} \quad (6.86)$$

$$\rightarrow \frac{\underline{d}_2 e^{-jk_2 b} + \underline{r}_2 e^{jk_2 b}}{\underline{d}_2 e^{-jk_2 b} - \underline{r}_2 e^{jk_2 b}} = \frac{Z_3}{Z_2} \quad (6.87)$$

Wird nun gemäß (6.79) die **Eingangswellenimpedanz** Z_e an der Stelle $z = 0$ durch

$$\begin{aligned} \underline{r}_1 &= \frac{Z_e - Z_1}{Z_e + Z_1} \\ \rightarrow \frac{Z_e}{Z_1} &= \frac{1 + \underline{r}_1}{1 - \underline{r}_1} \end{aligned} \quad (6.88)$$

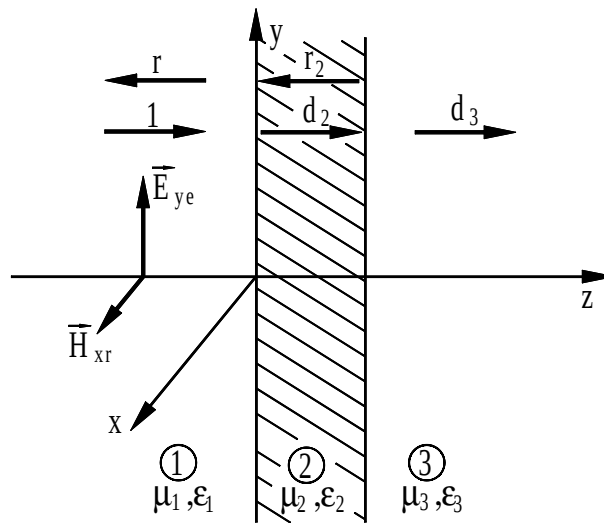


Abbildung 6.10: Reflexion und Transmission an und in einer dielektrischen Platte.

definiert, so folgt mit der Gleichung (6.85) aus (6.88)

$$\frac{Z_e}{Z_1} = \frac{Z_2}{Z_1} \frac{\underline{d}_2 + \underline{r}_2}{\underline{d}_2 - \underline{r}_2}. \quad (6.89)$$

Andererseits ergibt sich aus Gleichung (6.87)

$$\frac{\underline{r}_2}{\underline{d}_2} = \frac{Z_3 - Z_2}{Z_3 + Z_2} e^{-2jk_2 b} \quad (6.90)$$

und aus Gleichung (6.90) und (6.89) folgt

$$Z_e = Z_2 \frac{Z_3 + Z_2 + (Z_3 - Z_2)e^{-2jk_2 b}}{Z_3 + Z_2 - (Z_3 - Z_2)e^{-2jk_2 b}} \quad (6.91)$$

und mit $\gamma = jk_2$

$$Z_e = Z_3 \frac{1 + \frac{Z_2}{Z_3} \tanh \gamma b}{1 + \frac{Z_3}{Z_2} \tanh \gamma b}. \quad (6.92)$$

Damit kann das aus der Leitungstheorie bekannte Ersatzschaltbild angegeben werden ($\rightarrow$ Abb. 6.11). Durch die Wahl der Plattendicke b zu einem Vielfachen von $\lambda_2/4$ kann $\underline{r}_1$ zum Verschwinden ge-

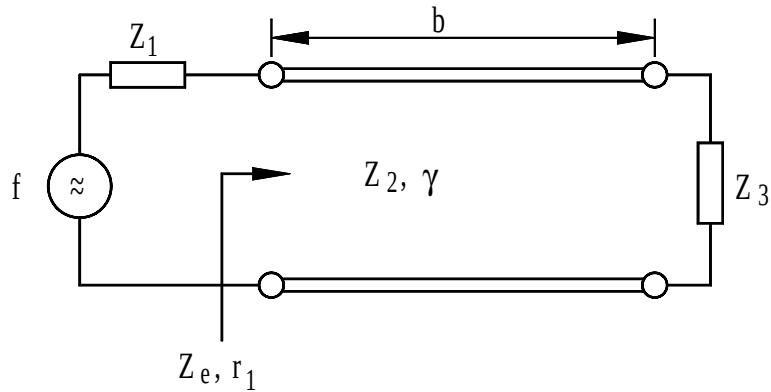


Abbildung 6.11: Ersatzschaltbild einer dielektrischen Platte.

bracht werden. Für $b = \lambda_2/4$ wird vom $\lambda/4$ -Transformator gesprochen. In der Optik werden Linsen mit $\lambda/4$ dicken Schichten vergütet, um Reflexionen zu verhindern. Auf diese Thematik sei hier nicht weiter eingegangen, so sei allerdings noch einmal an die getroffene Annahme einer monochromatisch senkrecht einfallende Welle erinnert.

6.3.3 Reflexion ebener Wellen bei schiefem Einfall auf eine Grenzfläche

Als nächsten Fall untersuchen wir den schiefen Einfall ebener Wellen an einer ebenen Trennfläche zweier Medien. Dieses einfache Modell erlaubt Rückschlüsse auf das Verhalten komplizierter Wellen an Grenzflächen, da seine Ergebnisse auf allgemeinere Fälle übertragen werden können.

Ein Teil der einfallenden Welle wird als gebrochene Welle von Medium 1 in Medium 2 eindringen.

6.3.3.1 Definition der einfallenden Welle

Im allgemeinen wird die einfallende ebene Welle, welche wir mit $E_e(\vec{r}, t)$ und $H_e(\vec{r}, t)$ bezeichnen wollen, elliptisch polarisiert sein. Eine solche Welle kann immer so in zwei Anteile zerlegt werden, daß der eine nur eine E_z -Komponente und der andere nur eine H_z -Komponente hat. Die Zerlegung können wir folgendermaßen charakterisieren ($\rightarrow$ Abb. 6.12):

Fall p: $\vec{E}_e$ liegt in der Einfallsebene

Fall s: $\vec{H}_e$ liegt in der Einfallsebene

Die einfallende Welle erhalte den Index „e“, die reflektierte den Index „r“ und die durchgehende den Index „d“. Das Medium in dem Halbraum $y > 0$ sei als Medium 1 bezeichnet, das Medium im Halbraum $y < 0$ als Medium 2. Deren Materialkonstanten μ_1, ε_1 bzw. μ_2, ε_2 .

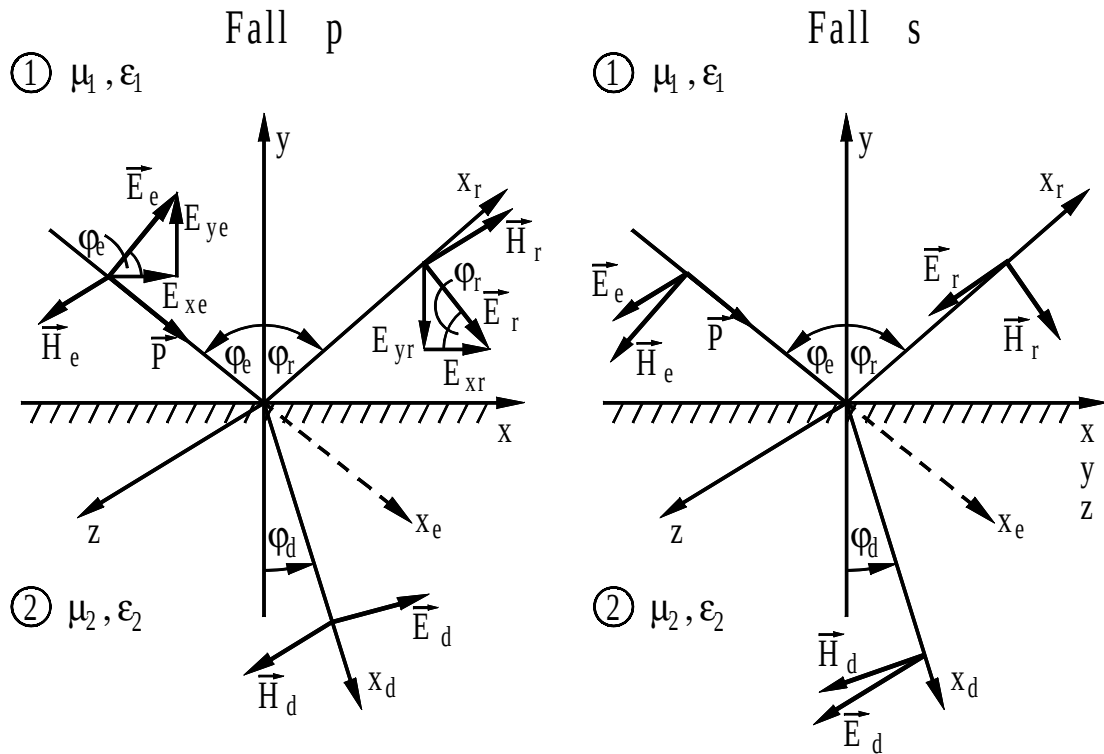


Abbildung 6.12: Der schiefe Einfall auf eine Trennfläche.

Im folgenden wird auf die explizite Angabe der Zeitabhängigkeit gemäß $e^{j\omega t}$ verzichtet. Wir verwenden die komplexen Ausbreitungskonstanten $\gamma_i = jk_i$ und den Feldwellenwiderstand Z_i .

$$\begin{aligned}\gamma_i &= j\omega\sqrt{\mu_i\varepsilon_i} \quad i = 1, 2, \dots \\ Z_i &= \sqrt{\frac{\mu_i}{\varepsilon_i}}\end{aligned}\quad (6.93)$$

Gemäß Abbildung 6.12 erhalten wir folgende Richtungen

1. einfallende Richtung x_e :

$$x_e = x \sin \varphi_e - y \cos \varphi_e \quad (6.94)$$

2. durchgehende Richtung x_d :

$$x_d = x \sin \varphi_d - y \cos \varphi_d \quad (6.95)$$

3. reflektierte Richtung x_r :

$$x_r = x \sin \varphi_r + y \cos \varphi_r \quad (6.96)$$

6.3.3.2 Herleitung der Fresnelschen Formeln

1. Fall p

Die einfallende Welle hat in diesem Fall die Komponenten E_x , E_y und H_z . Da durch die Trennfläche keine zusätzlichen Feldkomponenten hervorgerufen werden, machen wir die Annahmen

- (a) Einfallende Welle; Medium 1:

$$\underline{E}_{xe} = \underline{E}_0 \cos \varphi_e e^{-\gamma_1 x_e} \quad (6.97)$$

$$\underline{E}_{ye} = \underline{E}_0 \sin \varphi_e e^{-\gamma_1 x_e} \quad (6.98)$$

$$\underline{H}_{ze} = \frac{\underline{E}_0}{Z_1} e^{-\gamma_1 x_e} \quad (6.99)$$

- (b) Reflektierte Welle, Medium 1:

$$\underline{E}_{xr} = \underline{E}_0 \underline{r}_p \cos \varphi_r e^{-\gamma_1 x_r} \quad (6.100)$$

$$\underline{E}_{yr} = -\underline{E}_0 \underline{r}_p \sin \varphi_r e^{-\gamma_1 x_r} \quad (6.101)$$

$$\underline{H}_{zr} = -\frac{\underline{E}_0}{Z_1} \underline{r}_p e^{-\gamma_1 x_r} \quad (6.102)$$

- (c) Durchgehende Welle; Medium 2:

$$\underline{E}_{xd} = \underline{E}_0 \underline{d}_p \cos \varphi_d e^{-\gamma_2 x_d} \quad (6.103)$$

$$\underline{E}_{yd} = \underline{E}_0 \underline{d}_p \sin \varphi_d e^{-\gamma_2 x_d} \quad (6.104)$$

$$\underline{H}_{zd} = \frac{\underline{E}_0}{Z_2} \underline{d}_p e^{-\gamma_2 x_d} \quad (6.105)$$

Hierin sind $\underline{r}_p$ und $\underline{d}_p$ die noch zu bestimmenden Größen des Reflexion- bzw. Durchgangsfaktors. Der Index „p“ verweist auf den Fall p mit dem in der Einfallsebene liegenden $\vec{E}_e$.

Für die Tangentialkomponenten des gesamten elektrischen Feldes muß die Stetigkeit an der Grenzfläche $y = 0$ erfüllt sein. Diese Forderung ergibt dann z. B. für die E_x -Komponente:

$$\cos \varphi_e e^{-\gamma_1 x \sin \varphi_e} + \underline{r}_p \cos \varphi_r e^{-\gamma_1 x \sin \varphi_r} = \underline{d}_p \cos \varphi_d e^{-\gamma_2 x \sin \varphi_d} \quad (6.106)$$

Diese Gleichung kann nur dann für **alle** x erfüllt sein, wenn die Exponentialfunktionen gleich sind, d. h.

$$\gamma_1 \sin \varphi_e = \gamma_1 \sin \varphi_r = \gamma_2 \sin \varphi_d \quad (6.107)$$

gilt.

Hieraus folgt direkt das **Reflexionsgesetz**

$$\boxed{\varphi_e = \varphi_r}, \quad (6.108)$$

das besagt, daß der Einfallswinkel und der Reflexionswinkel gleich sind. Weiterhin folgt daraus das **Brechungsgesetz**

$$\boxed{\frac{\sin \varphi_e}{\sin \varphi_d} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}}. \quad (6.109)$$

Das Brechungsgesetz können wir wegen $k_i = n_i k_0$ (Brechungsindex n_i ; vergleiche (6.29)) auch in der Form

$$n_1 \sin \varphi_e = n_2 \sin \varphi_d \quad (6.110)$$

angegeben. Mit Hilfe der Stetigkeitsbedingungen für die E_x - bzw. H_z -Komponente können wir den Reflexionsfaktor $\underline{r}_p$ und den Durchgangsfaktor $\underline{d}_p$ bestimmen. Unter Verwendung des Reflexionsgesetzes (6.109) erhalten wir

$$\begin{aligned} \cos \varphi_e (1 + \underline{r}_p) &= \underline{d}_p \cos \varphi_d \\ \frac{1}{Z_1} (1 - \underline{r}_p) &= \frac{1}{Z_2} \underline{d}_p. \end{aligned}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen liefert uns

$$\underline{r}_p = \frac{Z_2 \cos \varphi_d - Z_1 \cos \varphi_e}{Z_2 \cos \varphi_d + Z_1 \cos \varphi_e} \quad (6.111)$$

$$\underline{d}_p = \frac{2 Z_2 \cos \varphi_e}{Z_2 \cos \varphi_d + Z_1 \cos \varphi_e} \quad (6.112)$$

2. Fall s

Im Fall s hat das einfallende Feld die Komponenten H_x , H_y und E_z . Auch in diesem Fall führt die Stetigkeitsbedingung an der Grenzfläche auf das Brechungsgesetz (6.109). Aus den Stetigkeitsbedingungen (manchmal auch als Übergangsbedingungen bezeichnet) ergibt sich dann wieder der Reflexionsfaktor, nun $\underline{d}_s$, und der Durchgangsfaktor, nun $\underline{r}_s$, gemäß

$$\underline{r}_s = \frac{Z_2 \cos \varphi_e - Z_1 \cos \varphi_d}{Z_2 \cos \varphi_e + Z_1 \cos \varphi_d} \quad (6.113)$$

$$\underline{d}_s = \frac{2 Z_2 \cos \varphi_e}{Z_2 \cos \varphi_e + Z_1 \cos \varphi_d} \quad (6.114)$$

Die Formeln (6.111) bis (6.114) für die Reflexions- und Durchgangsfaktoren in den Fällen p und s heißen **Fresnelsche Formeln**. Sie gelten sowohl für nichtleitende als auch für leitende Medien unter der Bedingung, daß die Frequenz der einfallenden Welle sich deutlich von der Plasmafrequenz beider Medien unterscheidet.

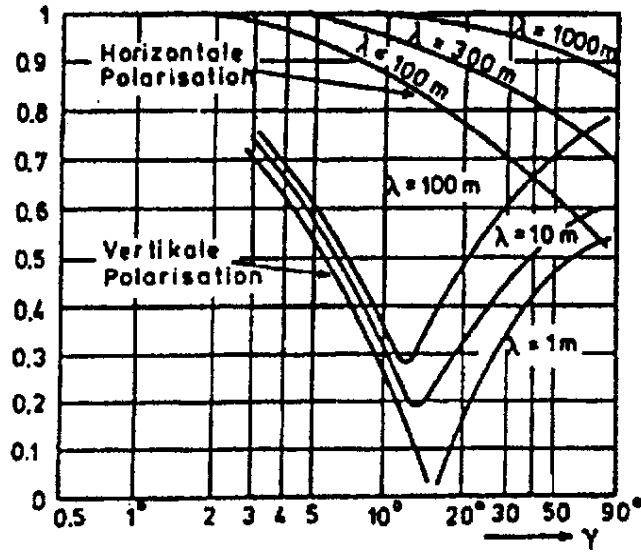


Abbildung 6.13: Betrag der Reflexionfaktoren r_s bei horizontaler und r_p bei vertikaler Polarisation als Funktion vom Streifenwinkel $\gamma = \frac{\pi}{2} - \phi_c$.

Die Abhängigkeiten der Reflexionfaktoren r_s bei horizontaler und r_p bei vertikaler Polarisation als Funktion vom Streifenwinkel ist in Abb. 6.13 dargestellt.

6.3.3.3 Bedingungen für das Verschwinden der Reflexion

1. Fall p

Gemäß (6.111) verschwindet die Reflexion, d. h. es gilt $\underline{r}_p = 0$, falls

$$Z_2 \cos \varphi_d = Z_1 \cos \varphi_e. \quad (6.115)$$

Das Einsetzen in das Brechungsgesetz liefert die Bedingung

$$\frac{\tan \varphi_e}{\tan \varphi_d} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad (6.116)$$

für das Verschwinden der Reflexion.

2. Fall s

Analog ergibt sich aus (6.113) die Bedingung

$$\frac{\tan \varphi_e}{\tan \varphi_d} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \quad (6.117)$$

für das Verschwinden von $\underline{r}_s$.

An einer Grenzfläche idealer Dielektrika kann es wegen $\mu_1 = \mu_2$ und $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ nie zum Verschwinden von $\underline{r}_s$ kommen. Bei beliebiger Polarisation der ebenen Welle (Fall p und Fall s) werden für $\mu_1 = \mu_2$ und $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ bei dem Erfüllen von (6.116) die Reflexionsfaktoren $\underline{r}_p = 0$ und $\underline{r}_s \neq 0$, d. h. die reflektierte Welle ist linear polarisiert. Der zugehörige Einfallswinkel φ_e wird **Brewsterwinkel** genannt und mit φ_B bezeichnet.

Der Brewsterwinkel ist also der Winkel, bei dem die reflektierte Welle bei dem Einfall auf einen dielektrischen Halbraum unabhängig von der Polarisation der einfallenden Welle linear polarisiert ist. Der magnetische Feldvektor des reflektierten Anteil liegt in der Einfallsebene.

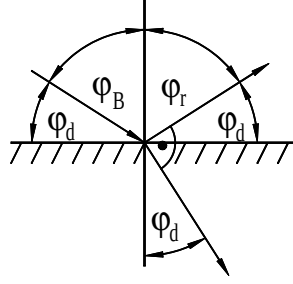


Abbildung 6.14: Der Brewstersche Polarisationswinkel.

Gemäß (6.116) berechnet sich der Brewsterwinkel φ_B unter Beachtung von (6.93) und dem Brechungsgesetz (6.109) wegen

$$\frac{\tan \varphi_B}{\tan \varphi_d} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2} = \frac{\sin^2 \varphi_B}{\sin^2 \varphi_d} \quad (6.118)$$

$$\text{d. h.} \quad \frac{\sin \varphi_B \cos \varphi_B}{\sin \varphi_d \cos \varphi_d} = \frac{\sin(2\varphi_B)}{\sin(2\varphi_d)} = 1 \quad (6.119)$$

$$\text{zu} \quad \varphi_B + \varphi_d = \frac{\pi}{2}. \quad (6.120)$$

Folglich steht in diesem Fall nach dem Reflexionsgesetz (6.108) mit $\varphi_e = \varphi_r$ der durchgehende Strahl senkrecht auf dem reflektierten, welcher bei beliebiger Polarisation durch den Fall s gegeben ist.

Wegen $\cos \alpha = \sin(\pi/2 - \alpha)$ erhalten wir nach dem Einsetzen von (6.120) schließlich aus dem Brechungsgesetz

$$\tan \varphi_B = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \quad (6.121)$$

für den Brewsterwinkel ($\rightarrow$ Abb. 6.14).

6.3.3.4 Reflexion am unendlich gut leitenden Halbraum

Fall p

Im „guten“ Leiter ist $\kappa \gg \omega \varepsilon_0$, so daß in den meisten Fällen $Z_2 \approx 0$ gesetzt werden kann. Mit den Fresnelschen Formeln (6.111) und (6.112) folgt dann

$$\underline{r}_p = -1; \quad \underline{d}_p = 0. \quad (6.122)$$

Unter den gemachten Voraussetzungen existiert somit keine ins zweite Medium eindringende Welle. Im Medium 1 ergibt die Überlagerung von einfallender und reflektierter Welle das resultierende Feld. Die Verwendung der Gleichungen (6.97)-(6.102) unter Beachtung von $\varphi_e = \varphi_r = \varphi$ ergibt das Gesamtfeld

$$\underline{E}_x = j \underline{E}_1 \frac{k_y}{k_1} e^{-jk_x x} \sin(k_y y) \quad (6.123)$$

$$\underline{E}_y = \underline{E}_1 \frac{k_x}{k_1} e^{-jk_x x} \cos(k_y y) \quad (6.124)$$

$$\underline{H}_z = \frac{\underline{E}_1}{Z_1} e^{-jk_x x} \cos(k_y y) \quad (6.125)$$

wobei folgende Abkürzungen verwendet wurden

$$\underline{E}_1 = 2 \underline{E}_0 \quad (6.126)$$

$$k_x = k_1 \sin \varphi \quad (6.127)$$

$$k_y = k_1 \cos \varphi$$

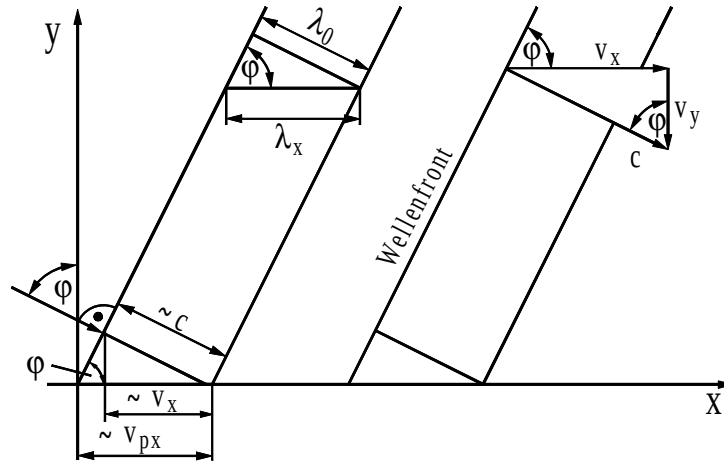


Abbildung 6.15: Erläuterung der Phasengeschwindigkeit.

mit der Separationsgleichung

$$k_1^2 = k_x^2 + k_y^2. \quad (6.128)$$

Wir haben somit eine resultierende Welle vorliegen, die bezüglich der y -Richtung eine „stehende Welle“ mit Flächen konstanter Amplitude bei $y = \text{const.}$ darstellt, während sie sich in x -Richtung ausbreitet und Flächen konstanter Phase bei $x = \text{const.}$ hat. Es handelt sich also um eine inhomogene Welle mit der „Spezialität“, daß Phasen- und Amplitudenflächen senkrecht aufeinander stehen. Ihre Phasengeschwindigkeit ist ($\rightarrow$ Abb. 6.15)

$$v_{ph}^{(x)} = \frac{c_1}{\sin \varphi} \geq c_1. \quad (6.129)$$

Im zugehörigen Feldlinienbild erkennen wir, daß der Feldlinienverlauf nicht gestört wird, falls wir bei $y = \lambda_y/2$ eine elektrisch gut leitende Platte einbringen ($\rightarrow$ Abb. 6.16).

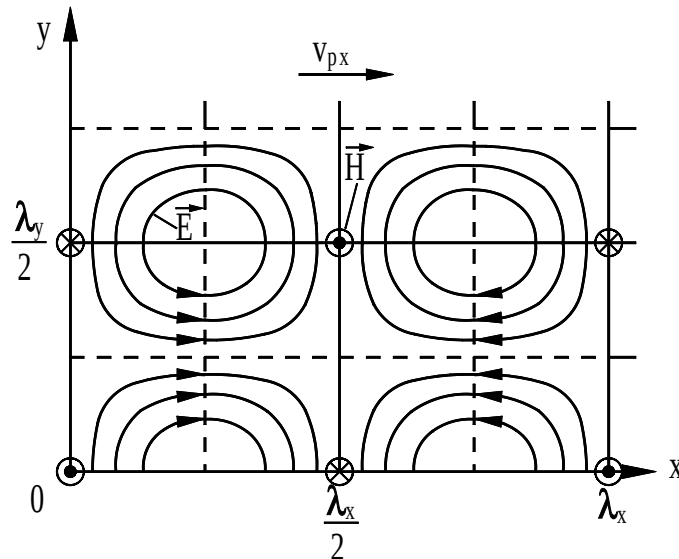


Abbildung 6.16: Feldlinienverlauf im Halbraum (Fall p).

Kapitel 7

Wellen in Hohlleitern und Resonatoren

Ein **Wellenleiter** ist eine Anordnung aus leitenden und/oder dielektrischen Stoffen zur verlustarmen Führung elektromagnetischer Wellen hoher Frequenz in axialer Richtung.

Wellenleiter sind keine elektrischen Leiter im engeren Sinne. Im Gegensatz zu gewöhnlichen Doppelleitungen, bei denen der hin- und zurückfließende Strom die Leitungsströme (Elektronenbewegung) im Metall sind, wird bei den Wellenleitern einer der beiden Ströme durch den **Verschiebungsstrom** ersetzt. Die Wellenleiter werden mit einem **Führungsfeld** betrieben, d. h. entweder die elektrische oder die magnetische Feldstärke besitzt eine Komponente in Fortpflanzungsrichtung. Einfache Wellenleiter sind Volleiter, d. h. ein Draht aus Metall oder einem Isolator oder ein Draht-Wellenleiter mit einer dünnen Oberflächenschicht aus verlustarmem Dielektrikum. Die wichtigsten Wellenleiter sind

- die Koaxialleitung,
- der Hohlleiter,
- die Mikrostreifenleitung;

als extrem breitbandiges Medium zur Nachrichtenübertragung dienen optische Wellenleiter in Form von Glasfaserleitungen (Lichtleiter).

Ein **Hohlleiter** ist ein in der Nachrichtentechnik (Fernsehen, Richtfunk, Radar) verwendeter Wellenleiter mit meist rechteckigem oder kreisrundem, seltener elliptischen Querschnitt und elektrisch leitenden Innenwänden (ohne Innenleiter, im Gegensatz zur Koaxialleitung).

Hohlleiter dienen zur dämpfungsarmen Fortleitung hochfrequenter elektromagnetischer Wellen (Dezimeter-, Zentimeterwellen), z. B. zwischen Sender und Richtstrahlantenne.

Voraussetzung für die Ausbreitung von Hohlleiterwellen ist das Überschreiten einer vom Wellentyp, dem Querschnitt und dem Dielektrikum abhängigen Grenzfrequenz; unterhalb dieser Frequenz klingt die zugeführte Schwingung aperiodisch ab.

Die angeregten elektromagnetischen Wellen besitzen neben Komponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke $\vec{E}$ bzw. $\vec{H}$ senkrecht zur Ausbreitungsrichtung (transversale Komponenten) auch eine Feldkomponente in Ausbreitungsrichtung (axiale Komponente). Je nachdem, welche Art Feldkomponente in Ausbreitungsrichtung vorhanden ist, unterscheidet man im Hohlleiter zwei Feldtypen: TE- oder H-Wellen (TE_{mn} - oder H_{mn} -Wellen), bei denen eine magnetische Feldkomponente in Ausbreitungsrichtung existiert, während die elektrischen Feldlinien nur in der transversalen Ebene verlaufen (TE: transversal-elektrisch), und E- oder TM-Wellen (E_{mn} - oder TM_{mn}), bei denen eine elektrische Feldkomponente in Ausbreitungsrichtung existiert, während die magnetischen Feldlinien in der Transversalebene verlaufen (TM: transversal-magnetisch). Die Indizes m und n charakterisieren den Verlauf des jeweiligen Transversalfeldes in den Querschnittsebenen, d. h. sie geben an, welche Wellentypen (Moden) sich in einem Hohlleiter ausbilden können.

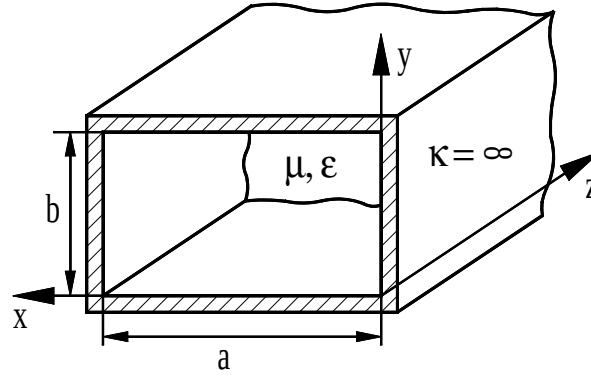


Abbildung 7.1: Querschnitt eines rechteckigen Hohlleiters.

Beim rechteckigen Hohlleiter bedeutet m die Anzahl der Halbwellen in seiner Breite und n die Anzahl der Halbwellen in seiner Höhe. Für den Kreisquerschnitt gibt m die Anzahl der Halbwellen längs des halben Umlaufs, n diejenige längs des Radius an.

Als Ausgangspunkt wählen wir die Maxwellschen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow^1 \\
 \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \rightarrow^2 \\
 \operatorname{div} \vec{D} &= \varrho \rightarrow^3 \\
 \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \rightarrow^4
 \end{aligned}$$

Das Medium im Hohlleiter wird im weiteren als homogen, isotrop und linear angenommen. Permeabilität μ und Permittivität ε seien konstant ($\rightarrow$ Abb. 7.1). Es sollen keine elektrischen Raumladungen vorliegen. Wir nehmen harmonische Zeitabhängigkeit gemäß $e^{j\omega t}$ für die Feldgrößen an. Damit lauten die Maxwellschen Gleichungen dann (im Frequenzbereich):

$$\operatorname{rot} \underline{\vec{E}} = -j\omega\mu\underline{\vec{H}} \quad (7.1)$$

$$\operatorname{rot} \underline{\vec{H}} = j\omega\varepsilon\underline{\vec{E}} \quad (7.2)$$

$$\operatorname{div} \underline{\vec{E}} = \operatorname{div} \underline{\vec{H}} = 0. \quad (7.3)$$

Zunächst betrachten wir den obigen Rechteckhohlleiter, dessen Längsachse mit der z -Richtung übereinstimme. Wir wollen davon ausgehen, daß in ihm grundsätzlich die beiden Wellentypen TM_z -Welle mit einer elektrischen longitudinalen Komponente und TE_z -Welle mit magnetischer longitudinaler Komponente existiere. Die Maxwellschen Gleichungen führen also auf zwei verschiedene Teillösungen, deren Überlagerung die allgemeine Lösung ergibt.

7.1 Die Wellengleichungen des Vektorpotentials

Es ist zweckmäßig, die Lösungen für den Fall der TM_z - bzw. TE_z -Wellen mit Hilfe der beiden voneinander unabhängigen, einkomponentigen Vektorpotentiale $\underline{\vec{A}}^E$ und $\underline{\vec{A}}^H$ abzuleiten. Dies bedeutet

¹ Faradaysches Induktionsgesetz

² Amperèsches Gesetz plus Amperèsches Verkettungsgesetz (Durchflutung)

³ Coulombgesetz

⁴ Quellenfreiheit der magnetischen Flußdichte $\rightarrow$ Nichtexistenz magnetischer Ladungen

zwar eine Beschränkung der Allgemeinheit, aber auch eine große Vereinfachung.

Gemäß Gleichung (7.3) können wir folgenden Ansatz machen, ohne gegen die Vektoridentität $\text{div rot } \vec{A} = 0$ zu verstoßen

1. TE_z-Wellen (H-Wellen):

$$\vec{E} = \text{rot } \vec{A}^H \quad (7.4)$$

2. TM_z-Wellen (E-Wellen):

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A}^E. \quad (7.5)$$

Zunächst betrachten wir nun den Fall der H-Wellen.

1. TE_z-Fall:

Wenn wir den Ansatz (7.4) in die Feldgleichungen (7.1) und (7.2) einsetzen ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} = \text{rot rot } \vec{A}^H &= \text{grad div } \vec{A}^H - \Delta \vec{A}^H \\ &= -j\omega\mu\vec{H} \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$\text{rot } \vec{H} = j\omega\epsilon\text{rot } \vec{A}^H \quad (7.7)$$

Die Integration von (7.7) führt zu

$$\vec{H} = j\omega\epsilon\vec{A}^H + \text{grad}\Phi^H \quad (7.8)$$

mit einer freien „Integrationskonstanten“ $\text{grad}\Phi^H$ (denn $\text{rot grad}\Phi^H \equiv 0$). Das Einsetzen von (7.8) in (7.6) liefert

$$\text{grad div } \vec{A}^H - \Delta \vec{A}^H = \omega^2\epsilon\mu\vec{A}^H - j\omega\mu\text{grad}\Phi^H. \quad (7.9)$$

Die frei wählbare skalare Funktion Φ^H wird zweckmäßigerweise so gewählt, daß sich die Rechnung vereinfacht. Dies ist bei Verwendung der **Lorentzkonvention** der Fall. Ihr folgend setzen wir

$$\text{div } \vec{A}^H = -j\omega\mu\Phi^H. \quad (7.10)$$

Mit (7.10) folgt aus (7.9) die **vektorielle Wellengleichung**

$$\Delta \vec{A}^H + k^2 \vec{A}^H = 0 \quad (7.11)$$

mit der Wellenzahl k gemäß

$$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (7.12)$$

Im Spezialfall $\vec{A}^H = (0, 0, \underline{A}_z^H)$, bei dem das Vektorpotential nur eine Komponente in Ausbreitungsrichtung besitzt, führt die vektorielle Wellengleichung (7.11) auf die skalare Wellengleichung, auch **Helmholtzgleichung**:

$$\frac{\partial^2 \underline{A}_z^H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{A}_z^H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{A}_z^H}{\partial z^2} + k^2 \underline{A}_z^H = 0 \quad (7.13)$$

2. TM_z-Fall:

Nun setzen wir Gleichung (7.5) in die Feldgleichungen (7.1) und (7.2) ein. Die weitere Rechnung erfolgt analog zum TE_z-Fall. Im Spezialfall $\vec{A}^E = (0, 0, \underline{A}_z^E)$ führt dies wieder auf die Helmholtzgleichung

$$\frac{\partial^2 \underline{A}_z^E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{A}_z^E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{A}_z^E}{\partial z^2} + k^2 \underline{A}_z^E = 0 \quad (7.14)$$

7.2 Lösung der Helmholtzgleichung

Wegen der Analogie von (7.13) und (7.14) lassen wir im folgenden vorerst die Kennzeichnung mit ' E ' und ' H ' weg. Gemäß dem **Bernoullischen Produktsatz** (vergleiche Abschnitt 2.2.5 Gleichung (2.95)) schreibt sich die Lösung der Helmholtzgleichung (7.13) bzw. (7.14) formal zu

$$\underline{A}_z(x, y, z) = \underline{f}(x)\underline{g}(y)\underline{h}(z), \quad (7.15)$$

wobei $\underline{f}$, $\underline{g}$, $\underline{h}$ jeweils nur von einer Koordinate abhängig sein sollen. Somit folgen aus der Helmholtzgleichung die drei Gleichungen

$$\frac{1}{\underline{f}} \frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x^2} = -k_x^2 \quad (7.16)$$

$$\frac{1}{\underline{g}} \frac{\partial^2 \underline{g}}{\partial y^2} = -k_y^2 \quad (7.17)$$

$$\frac{1}{\underline{h}} \frac{\partial^2 \underline{h}}{\partial z^2} = -k_z^2 \quad (7.18)$$

mit der Bedingung

$$k_z^2 = k^2 - k_x^2 - k_y^2 = \frac{2\pi}{\lambda_L}, \quad (7.19)$$

der sogenannten **Separationsgleichung**. Früher hatten wir bereits die Lösungsansätze der Gleichung (7.16)-(7.18) abgeleitet. Sie lauten:

$$\underline{f}(x) = \underline{A}_1 \cos k_x x + \underline{A}_2 \sin k_x x \quad (7.20)$$

$$\underline{g}(y) = \underline{B}_1 \cos k_y y + \underline{B}_2 \sin k_y y \quad (7.21)$$

$$\underline{h}(z) = \underline{C} e^{\pm j k_z z} \quad (7.22)$$

Wenn wir nun zum Produktansatz (7.15) noch das Zeitglied $e^{j\omega t}$ anfügen, erhalten wir als allgemeine Lösung für die beiden Potentiale $\underline{A}_z^E$ und $\underline{A}_z^H$:

$$\underline{A}_z(x, y, z, t) = \underline{C} \left\{ \begin{array}{l} \underline{A}_1 \cos k_x x \\ \underline{A}_2 \sin k_x x \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \underline{B}_1 \cos k_y y \\ \underline{B}_2 \sin k_y y \end{array} \right\} e^{j(\omega t \pm k_z z)} \quad (7.23)$$

Die Konstanten $\underline{C}$, $\underline{A}_i$, $\underline{B}_i$ ($i = 1, 2$) sind dimensionsbehaftet und im allgemeinen komplex. In der Exponentialfunktion ergibt das obere Vorzeichen eine Welle in negativer z -Richtung und das untere Vorzeichen eine Welle in positiver z -Richtung.

Aus Gleichung (7.4) und (7.5) ergeben sich nun die Feldkomponenten für TE- und TM-Wellen. Dabei wird genutzt, daß das zugehörige „duale“ Feld ($\vec{H}$ bzw. $\vec{E}$) über die entsprechende Maxwell'sche Gleichung als Differentiationsvorschrift gewonnen werden kann. Im einzelnen ergibt sich

1. **TE_z-Wellen** ($\underline{A}_z = \underline{A}_z^H$):

$$\underline{E}_x = \frac{\partial \underline{A}_z}{\partial y} \quad (7.24)$$

$$\underline{E}_y = -\frac{\partial \underline{A}_z}{\partial x} \quad (7.25)$$

$$\underline{E}_z = 0 \quad (7.26)$$

$$\underline{H}_x = \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial z} = -\frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial^2 \underline{A}_z}{\partial x \partial z} \quad (7.27)$$

$$\underline{H}_y = -\frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial z} = -\frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial^2 \underline{A}_z}{\partial y \partial z} \quad (7.28)$$

$$\underline{H}_z = -\frac{1}{j\omega\mu} \left(\frac{\partial \underline{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y} \right) = -\frac{k^2 - k_z^2}{j\omega\mu} \underline{A}_z \quad (7.29)$$

2. TM_z-Wellen ($\underline{A}_z = \underline{A}_z^E$):

$$\underline{H}_x = \frac{\partial \underline{A}_z}{\partial y} \quad (7.30)$$

$$\underline{H}_y = -\frac{\partial \underline{A}_z}{\partial x} \quad (7.31)$$

$$\underline{H}_z = 0 \quad (7.32)$$

$$\underline{E}_x = -\frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial z} = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{\partial^2 \underline{A}_z}{\partial x \partial z} \quad (7.33)$$

$$\underline{E}_y = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial z} = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{\partial^2 \underline{A}_z}{\partial y \partial z} \quad (7.34)$$

$$\underline{E}_z = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \left(\frac{\partial \underline{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial y} \right) = +\frac{k^2 - k_z^2}{j\omega\varepsilon} \underline{A}_z \quad (7.35)$$

Der kürzeren Schreibweise wegen wird im folgenden der Zeitfaktor $e^{j\omega t}$ aus Gleichung (7.23) fortgelassen. Aus den Differentiationsvorschriften (7.24)-(7.35) ergibt sich dann für die Feldkomponenten:

1. TE_z-Wellen

$$\underline{E}_x = \underline{C}^H k_y \begin{Bmatrix} \sin k_x x \\ \cos k_x x \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos k_y y \\ -\sin k_y y \end{Bmatrix} e^{\pm jk_z z} \quad (7.36)$$

$$\underline{E}_y = \underline{C}^H k_x \begin{Bmatrix} -\cos k_x x \\ \sin k_x x \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin k_y y \\ \cos k_y y \end{Bmatrix} e^{\pm jk_z z} \quad (7.37)$$

$$\underline{E}_z = 0 \quad (7.38)$$

$$\underline{H}_x = -\underline{C}^H \frac{k_x}{j\omega\mu} (\pm jk_z) \begin{Bmatrix} \cos k_x x \\ -\sin k_x x \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin k_y y \\ \cos k_y y \end{Bmatrix} e^{\pm jk_z z} \quad (7.39)$$

$$\underline{H}_y = -\underline{C}^H \frac{k_y}{j\omega\mu} (\pm jk_z) \begin{Bmatrix} \sin k_x x \\ \cos k_x x \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos k_y y \\ -\sin k_y y \end{Bmatrix} e^{\pm jk_z z} \quad (7.40)$$

$$\underline{H}_z = -\underline{C}^H \frac{k^2 - k_z^2}{j\omega\mu} \begin{Bmatrix} \sin k_x x \\ \cos k_x x \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin k_y y \\ \cos k_y y \end{Bmatrix} e^{\pm jk_z z} \quad (7.41)$$

2. TM_z-Wellen

$$\underline{H}_x = \underline{C}^E k_y \begin{Bmatrix} \sin k_x x \\ \cos k_x x \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos k_y y \\ -\sin k_y y \end{Bmatrix} e^{\pm jk_z z} \quad (7.42)$$

$$\underline{H}_y = \underline{C}^E k_x \begin{Bmatrix} -\cos k_x x \\ \sin k_x x \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin k_y y \\ \cos k_y y \end{Bmatrix} e^{\pm jk_z z} \quad (7.43)$$

$$\underline{H}_z = 0 \quad (7.44)$$

$$\underline{E}_x = -\underline{C}^E \frac{k_x}{j\omega\varepsilon} (\pm jk_z) \begin{Bmatrix} \cos k_x x \\ -\sin k_x x \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin k_y y \\ \cos k_y y \end{Bmatrix} e^{\pm jk_z z} \quad (7.45)$$

$$\underline{E}_y = -\underline{C}^E \frac{k_y}{j\omega\varepsilon} (\pm jk_z) \begin{Bmatrix} \sin k_x x \\ \cos k_x x \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos k_y y \\ -\sin k_y y \end{Bmatrix} e^{\pm jk_z z} \quad (7.46)$$

$$\underline{E}_z = -\underline{C}^E \frac{k^2 - k_z^2}{j\omega\varepsilon} \begin{Bmatrix} \sin k_x x \\ \cos k_x x \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin k_y y \\ \cos k_y y \end{Bmatrix} e^{\pm jk_z z} \quad (7.47)$$

Bei einem speziellen Randwertproblem werden diese allgemeinen Beziehungen dann angepaßt.

7.3 Wellenmoden in verlustlosen Rechteckhohlleitern

Für den zu Anfang gezeigten einfachen Rechteckhohlleiter ($\rightarrow$ Abb. 7.1) lauten die Randbedingungen (für alle z):

1. $\underline{E}_x = 0$ für $y = \begin{cases} 0 \\ b \end{cases}$ und alle $x \in [0, a]$
2. $\underline{E}_y = 0$ für $x = \begin{cases} 0 \\ a \end{cases}$ und alle $y \in [0, b]$
3. $\underline{E}_z = 0$ für $\begin{cases} y = \begin{cases} 0 \\ b \end{cases} \text{ und } \forall x \in [0, a] \\ x = \begin{cases} 0 \\ a \end{cases} \text{ und } \forall y \in [0, b] \end{cases}$

da die Tangentialkomponenten an der ideal leitenden Wand verschwinden.

Im **TE-Fall** kann die 1. und die 2. Randbedingung wegen

$$\underline{E}_x \sim \frac{\partial \underline{A}_z^H}{\partial y} \quad \text{und} \quad \underline{E}_y \sim \frac{\partial \underline{A}_z^H}{\partial x}$$

nur erfüllt werden, wenn im Produktansatz (7.23) für das Vektorpotential $\underline{A}_z^H$ alle Sinusglieder verschwinden, d. h. wenn

$$\underline{A}_z^H \sim \cos k_x x \cos k_y y.$$

Dann gilt

$$\left. \begin{aligned} \underline{E}_x &\sim \cos k_x x \sin k_y y \\ \underline{E}_y &\sim \sin k_x x \cos k_y y \end{aligned} \right\} \quad \text{für alle } z$$

Weiterhin fordern die Randbedingungen

$$\sin k_x a = 0 \quad \text{und} \quad \sin k_y b = 0.$$

Diese Bedingung kann durch die speziellen Werte

$$\boxed{\begin{aligned} k_x &= \frac{m\pi}{a} & m &= 0, 1, 2, \dots \\ k_y &= \frac{n\pi}{b} & n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}} \quad (7.48)$$

außer $m = n = 0$ erfüllt werden. Der Fall $m = n = 0$ wird ausgeschlossen, da sonst **alle** Felder verschwinden würden. Diese Trivallösung sei hier ausgeschlossen.

Die Werte für k_x , k_y gemäß (7.48) werden auch als **Eigenwerte** bezeichnet.

Im **TM-Fall** kann die dritte Bedingung wegen $\underline{E}_z \sim \underline{A}_z^E$ nur erfüllt werden, wenn im Produktansatz (7.23) für das Vektorpotential $\underline{A}_z^E$ alle Cosinusterme verschwinden, d. h.

$$\underline{A}_z^E \sim \sin k_x x \sin k_y y.$$

Weiterhin fordern die Randbedingungen auch hier wieder

$$\begin{aligned} \sin k_x a &= 0 \\ \sin k_y b &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgen die **gleichen Eigenwerte** wie im TE-Fall

$$\boxed{\begin{aligned} k_x &= \frac{m\pi}{a} & m &= 0, 1, 2, \dots \\ k_y &= \frac{n\pi}{b} & n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}} \quad (7.49)$$

wobei die triviale Lösung erneut ausgeschlossen wird. Somit gilt:

Sowohl im TE- als auch im TM-Fall, also bei beiden Wellenarten, ergibt sich eine unendliche Anzahl diskreter Wellenformen, der sogenannten **Moden**, die durch die Parameter m und n gekennzeichnet sind. Häufig wird die Kennzeichnung TE_{zmn} (H_{zmn}) bzw. TM_{zmn} (E_{zmn}) benutzt.

Nach obigen Überlegungen sind wir nun in der Lage, die Feldkomponenten anzugeben:

1. TE_{zmn} -Wellen:

$$\underline{E}_x = -\underline{C}^H \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{\pm jk_z z} \quad (7.50)$$

$$\underline{E}_y = \underline{C}^H \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{\pm jk_z z} \quad (7.51)$$

$$\underline{E}_z = 0 \quad (7.52)$$

$$\underline{H}_x = \pm \frac{k_z}{\omega\mu} \underline{E}_y \quad (7.53)$$

$$\underline{H}_y = \mp \frac{k_z}{\omega\mu} \underline{E}_x \quad (7.54)$$

$$\underline{H}_z = -\underline{C}^H \frac{k^2 - k_z^2}{j\omega\mu} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{\pm jk_z z} \quad (7.55)$$

2. TM_{zmn} -Wellen:

$$\underline{H}_x = \underline{C}^E \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{\pm jk_z z} \quad (7.56)$$

$$\underline{H}_y = -\underline{C}^E \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{\pm jk_z z} \quad (7.57)$$

$$\underline{H}_z = 0 \quad (7.58)$$

$$\underline{E}_x = \mp \frac{k_z}{\omega\varepsilon} \underline{H}_y \quad (7.59)$$

$$\underline{E}_y = \pm \frac{k_z}{\omega\varepsilon} \underline{H}_x \quad (7.60)$$

$$\underline{E}_z = \underline{C}^E \frac{k^2 - k_z^2}{j\omega\varepsilon} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{\pm jk_z z} \quad (7.61)$$

Der **Feldwellenwiderstand** Z_F der freien, ebenen elektromagnetischen Welle ist allgemein definiert als der orts- und zeitunabhängige Quotient der Beträge von elektrischer Feldstärke $\vec{E}$ und der magnetischen Feldstärke $\vec{H}$, was sich allgemein zu $Z_F = \sqrt{\mu/\varepsilon_k}$ ergibt.

Für den Rechteckhohlleiter ist der Feldwellenwiderstand $\underline{Z}_F$ allgemein aus den transversalen Feldkomponenten definiert:

$$\underline{Z}_F = \frac{\underline{E}_T}{\underline{H}_T} = \sqrt{\frac{|\underline{E}_x|^2 + |\underline{E}_y|^2}{|\underline{H}_x|^2 + |\underline{H}_y|^2}} \quad (7.62)$$

Das Einsetzen der entsprechenden Ausdrücke für die Feldkomponenten gemäß (7.53) und (7.54) bei TE- bzw. (7.59) und (7.60) bei TM-Wellen liefert

$$\underline{Z}_F = \begin{cases} \underline{Z}^H = \frac{\omega\mu}{k_z} & \text{für TE-Wellen} \\ \underline{Z}^E = \frac{k_z}{\omega\varepsilon} & \text{für TM-Wellen} \end{cases} \quad (7.63)$$

Die **Grundwellen**, d. h. die Wellen mit der niedrigsten Grenzfrequenz f_c , sind:

- TE-Grundwelle ist der TE_{z10} -Mode mit $m = 1$ und $n = 0$ (hierbei wird $a > b$ vorausgesetzt)

- TM-Grundwelle ist der TM_{z11} -Mode.

Zum Begriff der Grenzfrequenz sei folgendes betrachtet. Falls für eine Frequenz f

$$k^2 < k_x^2 + k_y^2$$

gilt, so wird k_z in der Separationsgleichung (7.19) imaginär. Dies bedeutet eine exponentielle Dämpfung (der zugehörigen Welle) in der z -Richtung. Im Grenzfall

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2$$

ergibt sich aus der Definition (7.12) $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = 2\pi/\lambda$ der Wellenzahl k sowie mit $k_x = m\pi/a$ und $k_y = n\pi/b$ die **Grenzfrequenz des Wellenleiters**

$$f_{cmn} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n}{2b}\right)^2} \quad (7.64)$$

(In der Nachrichtentechnik und allgemein bei elektronischen Schaltungen gibt die Grenzfrequenz die obere und untere Schranke eines Frequenzbandes an.) Unterhalb der Grenzfrequenz ist eine Ausbreitung von Wellen in Rechteckhohlleitern nicht mehr möglich – die Wellen werden aperiodisch gedämpft. Der Grenzfrequenz f_{cmn} entspricht die **Grenzwellenlänge**

$$\lambda_{cmn} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n}{2b}\right)^2}}. \quad (7.65)$$

Für Frequenzen f oberhalb der Grenzfrequenz f_{cmn} laufen entsprechend $e^{\pm jk_z z}$ Wellen in positive oder negative z -Richtung längs der Leitung.

Die Wellen haben dabei im Hohlleiter die in Ausbreitungsrichtung gemessene Wellenlänge, die sogenannte **Hohlleiterwellenlänge** λ_L :

$$\lambda_L = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}} \quad (7.66)$$

mit der zugehörigen Freiraumwellenlänge im unbegrenzten freien Raum λ und der Grenzwellenlänge λ_c .

Somit erhalten wir schließlich für die Feldwellenwiderstände nach Gleichung (7.63)

$$\underline{Z}_F = \begin{cases} \underline{Z}^H &= \frac{Z}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}} & \text{für TE-Wellen} \\ \underline{Z}^E &= Z\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2} & \text{für TM-Wellen} \end{cases} \quad (7.67)$$

mit dem Feldwellenwiderstand $Z = \sqrt{\mu/\epsilon}$ des freien Raumes.

Unter Berücksichtigung der Separationsgleichung ergibt sich die **Phasengeschwindigkeit** v_{ph} der in einem Hohlleiter fortschreitenden TE- oder TM-Welle:

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k_z} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}}. \quad (7.68)$$

Zur Erinnerung. Das Feldbild der Welle verschiebt sich mit v_{ph} in Ausbreitungsrichtung, hier also in z -Richtung.

Für die Moden des **verlustlosen** Hohlleiters ist die Gruppengeschwindigkeit gleich der Energiegeschwindigkeit⁵. Gemäß der Definition (6.48) der Gruppengeschwindigkeit erhalten wir:

$$v_g = v_E = \frac{d\omega}{dk_z} = \frac{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (7.69)$$

⁵Die Lichtgeschwindigkeit ist das geometrische Mittel zwischen Phasen- und Gruppengeschwindigkeit.

Das Produkt aus Phasen- und Gruppengeschwindigkeit ergibt wiederum das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit:

$$v_{ph} \cdot v_g = \frac{1}{\mu\epsilon} = c^2 \quad (7.70)$$

7.3.1 Feldlinienbild des Grundmodes

Die technisch wichtigste Welle im Rechteckhohlleiter ist für $a > b$ die TE_{z10} -Welle mit den Feldkomponenten E_y , H_x und H_z . Dieser Mode hat von allen möglichen Wellen die niedrigste Grenzfrequenz

$$f_{c10} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (7.71)$$

bzw. die größte Grenzwellenlänge

$$\lambda_{c10} = 2a \quad (7.72)$$

Dieser Mode wird auch als Haupt- oder **Grundmode** bezeichnet.

In der Regel liegt das Interesse darin, einen möglichst großen Betriebsfrequenzbereich für einen gegebenen Hohlleiter zu erreichen. Der Betriebsfrequenzbereich wird nach unten durch die Grenzfrequenz f_{c10} des Grundmodes und nach oben durch die Grenzfrequenzen höherer Wellentypen (TE_{z20} -Typ mit $f_{c20} = 1/(a\sqrt{\mu\epsilon})$ und der TE_{z01} -Typ mit $f_{c01} = 1/(2b\sqrt{\mu\epsilon})$) eingeschränkt.

Störungen in der Hohlleitergeometrie, wie z. B. Knicke, Übergänge, Verdrehungen, etc. regen diese zusätzlichen Feldtypen an. Daher wird ein „Sicherheitsabstand“ nach oben von den Grenzfrequenzen höherer Moden eingehalten, um z. B. einen Energieübertrag in diese Moden (Modenkongression) zu verhindern.

In realen verlustbehafteten Hohlleitern steigt die Dämpfung der Grundwelle bei Annäherung an ihre Grenzfrequenz stark an, so daß auch ein entsprechender Abstand nach unten eingehalten werden sollte.

Ein weiterer Gesichtspunkt bei der Wahl der Querschnittsabmessungen a und b ist die durch die Spannungsfestigkeit gegebene maximal übertragbare Leistung. Üblicherweise wird daher

$$a = 2b \quad \text{und} \quad 1.25f_{c10} < f_B < 1.90f_{c10}$$

als Bereich für die Betriebsfrequenz bzw. das Verhältnis zwischen Breite und Höhe des Rechteckhohlleiters gewählt. Solche Hohlleiter finden Anwendung im Frequenzbereich $f = 320\text{MHz} \cdots 330\text{GHz}$. Der Feldlinienverlauf des TE_{z10} -Modes im Rechteckhohlleiter ist in Abb. 7.2 dargestellt.

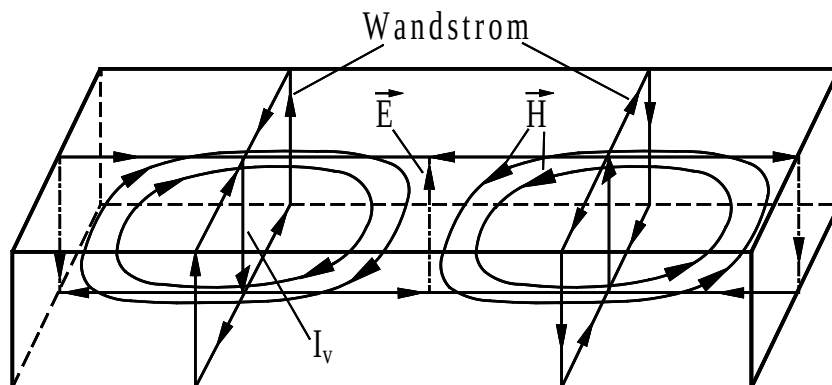


Abbildung 7.2: TE_{z10} -Welle im Rechteckhohlleiter.

Anmerkung zu qualitativen Feldbildern

In den qualitativ aufgezeichneten Feldern zu verschiedenen Wellentypen handelt es sich um eine Projektion der Feldbilder auf die Querschnittsfläche.

Bei der Interpretation solcher Feldbilder ist zu beachten, daß das Magnetfeld der TE-Wellen und das elektrische Feld der TM-Wellen auch z -Komponenten haben, die in diesen Projektionen nicht sichtbar sind. Vielmehr täuscht die Projektion an Stellen, in denen das Feld in die z -Richtung umgelenkt wird, Quellen oder Senken im Innern des Hohlleiterquerschnitts vor. Das liegt, wie gesagt, aber nur an den in dieser Projektion nicht sichtbaren z -Komponenten des Feldes.

Die an den Oberflächen vorhandenen normalen elektrischen und tangentialen magnetischen Felder rufen dort Flächenladungen und Strombeläge hervor, die sich aus den Randbedingungen berechnen lassen und sich mit den Feldern zeitlich ändern.

Die magnetischen Felder der Welle erzeugen Verschiebungsströme.

7.4 Hohlraumresonatoren und Filter

Bei Abschluß eines Hohlleiters durch eine leitende Wand senkrecht zur Ausbreitungsrichtung überlagern sich hinlaufende und reflektierte Wellen zu einer stehenden Welle. Es verschwinden an dieser Wand und in Abständen von $\lambda_L/2$ die tangentiale elektrische und die normale magnetische Feldstärke. Daher kann in einer solchen Knotenebene eine zweite Metallwand angebracht werden, ohne das Feld zu stören. Das Ergebnis ist ein **Hohlraumresonator**. Bei Anregung des Hohlraumresonators (z. B. durch ein Koppelloch) wird die Stärke des sich in ihm aufgebauten Feldes maximal, wenn die Länge des Resonators

$$h = p \frac{\lambda_L}{2} \quad p = 1, 2, \dots \quad (7.73)$$

beträgt. Das Einsetzen von (7.73) in die Beziehung für die Hohlleiterwellenlänge (7.66) und Auflösen nach $\lambda = \lambda_R$ ergibt die **Resonanzwellenlänge**

$$\lambda_R = \frac{\lambda_c}{\sqrt{1 + \left(\frac{p\lambda_c}{2h}\right)^2}}. \quad (7.74)$$

Als Beispiel ist der prinzipielle Feldverlauf der TE_{z101} -Resonanz in Abb. 7.3 dargestellt.

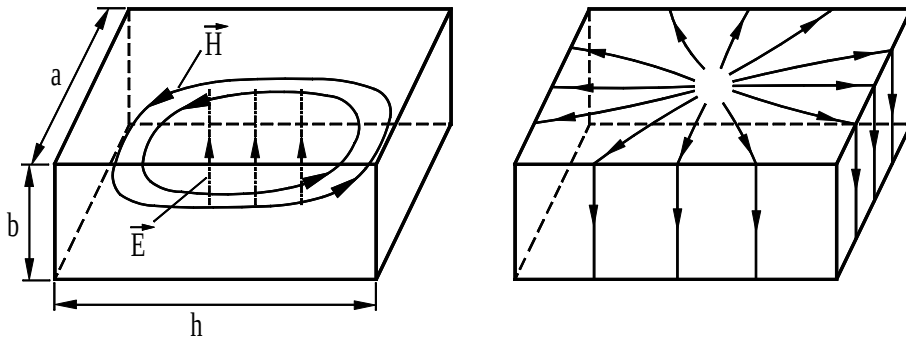


Abbildung 7.3: TE_{z101} -Resonanz im Rechteckhohlraumresonator.

Blindwiderstände und Blindleitwerte, wie sie z. B. zum Aufbau von Filtern benötigt werden, lassen sich auch durch den Einbau von metallischen Blenden und Stiften in eine Hohlleitung realisieren ($\rightarrow$ Abb. 7.4). Je nachdem, ob die in dem an der Blende angeregten Feld gespeicherte elektrische oder magnetische Feldenergie überwiegt, verhält sich die Störung wie ein kapazitiver oder induktiver Leitwert. Sind elektrische und magnetische Energie gleich, so entsteht Resonanz.

Die Kennwerte der konzentrierten Bauelemente einer Ersatzschaltung, die die Wirkung einer solchen Störstelle beschreibt, hängen sowohl von der Geometrie der Blende als auch von der Frequenz der betrachteten Welle ab.

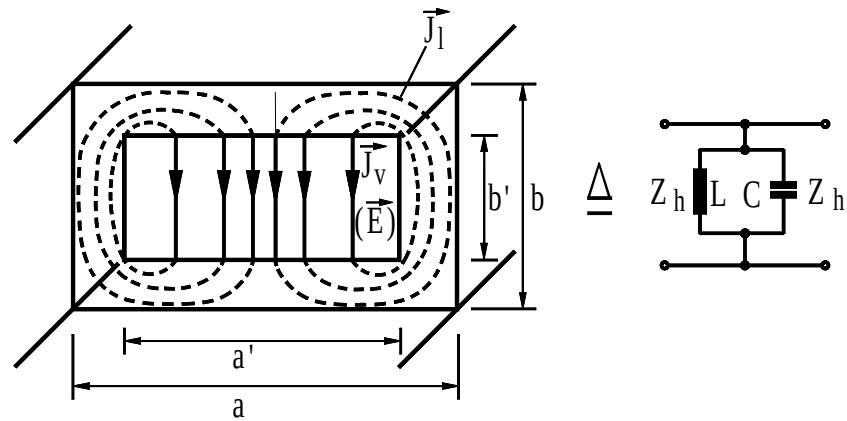


Abbildung 7.4: Inhomogene Hohlleiterblende im Rechteckhohlleiter.

Kapitel 8

Das kartesische Dreischichtenproblem

Eine oft gestellte feldtheoretische Aufgabe ist die Berechnung der elektromagnetischer Felder auf Leiterbahnen, wie sie z. B. bei integrierten Schaltungen vorkommen. Der geometrische Aufbau eines solchen Problems ist in Abb. 8.1 gezeigt.

Bei lokaler Betrachtung der Wellenausbreitung in $\pm z$ -Richtung im Bereich der Leiterbahn und Vernachlässigung der Ränder in $\pm x$ -Richtung ergibt sich das **allgemeine Dreischichtenproblem** ($\rightarrow$ Abb 10.1). Besitzen Medium 2 und Medium 3 gleiche Materialeigenschaften, also $\kappa_3 = \kappa_2$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_2$, $\mu_3 = \mu_2$, so spricht man vom **symmetrischen Dreischichtenproblem**. Bandleitungen, Streifenleitungen oder dielektrische Platten können zumindest lokal durch ein symmetrisches Dreischichtenproblem angenähert werden.

Betrachtet man Wellen, die sich parallel zur Schichtung ausbreiten, so läßt die Symmetrie der Anordnung zu, daß alle Felder sich als Überlagerung von zwei Feldtypen („odd“ und „even“) darstellen lassen. Für jeden der beiden Feldtypen läßt sich das symmetrische Dreischichtenproblem in ein einfacheres Problem mit nur zwei Schichten und ideal leitender Berandung (elektrisch bzw. magnetisch leitend) überführen.

Für 3-Komponenten-Wellen wird ein Vektorpotential in Ausbreitungsrichtung angesetzt. Für 5-Komponenten-Wellen führt der Vektorpotentialansatz in Ausbreitungsrichtung (z) auf Schwierigkeiten bei der Erfüllung der Stetigkeit an der Grenzschicht. In diesem Fall ist der Ansatz des Vektorpotentials senkrecht zur Schichtung wesentlich geeigneter zur Bestimmung der Eigenlösungen. Aus der Graphik in Abb. 8.3 wird ersichtlich, daß lineare Superposition aller (unendlich vielen) Eigenlösungen von 8 Teilproblemen zur allgemeinen Lösung des symmetrischen Dreischichtenproblems führt.

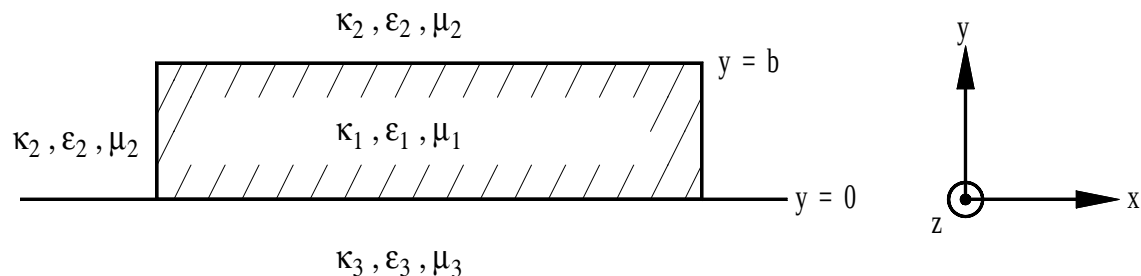


Abbildung 8.1: Querschnitt durch eine Leiterbahn.

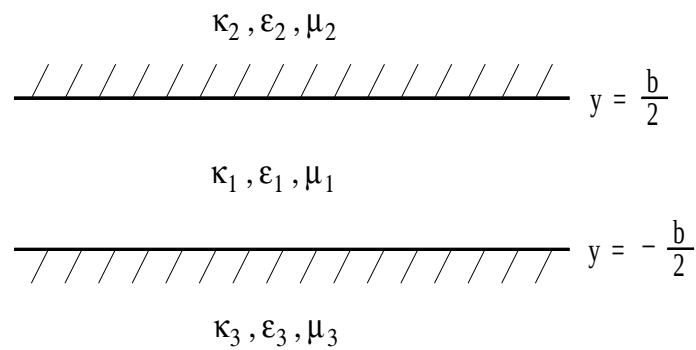


Abbildung 8.2: Das allgemeine Dreischichtenproblem.

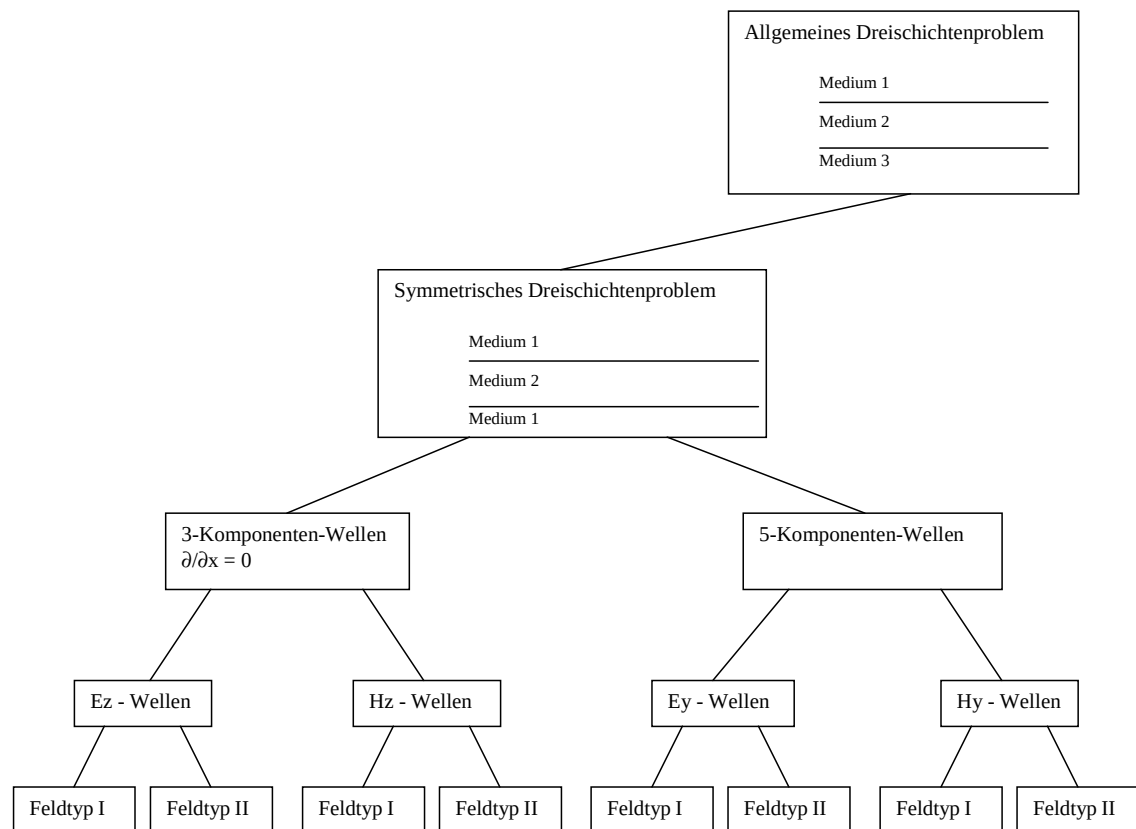


Abbildung 8.3: Superposition von 8 Teilproblemen zur allgemeinen Lösung des symmetrischen Dreischichtenproblems.

Kapitel 9

Wellen in kreiszylindrischen Strukturen

Zur Behandlung einfach oder mehrfach zusammenhängender kreiszylindrischer Hohlleiter und Resonatoren werden am besten Zylinderkoordinaten verwendet.

9.1 Lösung der Wellengleichung

Wie im kartesischen Fall wird wieder der Ansatz

$$\vec{E} = \text{rot} \vec{A}^H \quad (\text{TE- oder H-Welle}) \quad (9.1)$$

$$\vec{H} = \text{rot} \vec{A}^E \quad (\text{TM- oder E-Welle}) \quad (9.2)$$

gewählt. Dieser Ansatz wird in die Maxwellschen Gleichungen

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot} \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \\ \text{div} \vec{D} &= \varrho \\ \text{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

für den Fall harmonischer Zeitabhängigkeit ($\sim e^{j\omega t}$), des Nichtvorhandenseins elektrischer Raumladungen ($\varrho = 0$) sowie homogener, linearer, isotroper Medien mit konstanter Permeabilität μ und Permittivität ε eingesetzt:

$$\begin{aligned} \text{rot} \underline{\vec{E}} &= -j\omega\mu\underline{\vec{H}} \\ \text{rot} \underline{\vec{H}} &= j\omega\varepsilon\underline{\vec{E}} \\ \text{div} \underline{\vec{E}} &= \text{div} \underline{\vec{H}} = 0. \end{aligned}$$

Wie im kartesischen Fall (vgl. Kapitel 7) wird die Lorentz-Eichung durchgeführt:

$$\text{div} \vec{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

Ihr folgend erhalten wir in Analogie zum kartesischen Fall für homogene, quellenfreie Gebiete die Wellengleichung

$$\nabla^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = 0, \quad (9.3)$$

welche sowohl für $\vec{A}^H$ als auch für $\vec{A}^E$ gültig ist, weshalb im weiteren auf die besondere Kennzeichnung verzichtet wird.

Zur Vereinfachung der Lösung wählen wir wiederum die z -Richtung als Richtung für das Vektorpotential

$$\vec{A} = A\vec{e}_z. \quad (9.4)$$

Damit geht die vektorielle Wellengleichung in die skalare Wellengleichung, die sogenannte Helmholtz-Wellengleichung, über

$$\nabla^2 A + k^2 A = 0. \quad (9.5)$$

Das Einsetzen des Δ -Operators für Zylinderkoordinaten liefert

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + k^2 A = 0 \quad (9.6)$$

Wiederum wird der Bernoullische Produktansatz verwendet:

$$A = f(r)g(\varphi)h(z), \quad (9.7)$$

(diesmal in Zylinderkoordinaten). Einsetzen des Produktansatzes (9.6) in die Helmholtzgleichung (9.5) und Division durch A ergibt

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{1}{f} \frac{df}{dr} + \frac{1}{r^2} \underbrace{\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{d\varphi^2}}_{-m^2} + \underbrace{\frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dz^2}}_{-k_z^2} + k^2 = 0 \quad (9.8)$$

Mit dem Ansatz

$$\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{d\varphi^2} = -m^2 \quad (9.9)$$

und

$$\frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dz^2} = -k_z^2 \quad (9.10)$$

erhalten wir die Lösungen für die Funktionen $g(\varphi)$ und $h(z)$, nämlich

$$g(\varphi) = \begin{Bmatrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{Bmatrix} \quad \text{oder} \quad \{e^{\pm jm\varphi}\} \quad (9.11)$$

$$h(z) = \begin{Bmatrix} \sin k_z z \\ \cos k_z z \end{Bmatrix} \quad \text{oder} \quad \{e^{\pm jk_z z}\} \quad (9.12)$$

mit $m \neq 0$ und $k_z \neq 0$. Hinweis: Hierbei stellen die Ausdrücke in den geschweiften Klammern die Basisfunktionen für den aufgespannten Lösungsraum dar. Es gilt also beispielsweise $g(\varphi) = C_1 \sin m\varphi + C_2 \cos m\varphi = C_1 e^{+jm\varphi} + C_2 e^{-jm\varphi}$ für beliebige reelle Zahlen C_1 und C_2 .

Zur Berechnung der Funktion f werden die Ansätze für die Funktionen g und h (9.11) bzw. (9.12) in die Helmholtzgleichung (9.5) eingesetzt und mit f multipliziert.

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} + \left(k^2 - k_z^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) f = 0. \quad (9.13)$$

Dies ist die Besselsche Differentialgleichung mit der allgemeinen Lösung

$$f(r) = Z_m \left(r \sqrt{k^2 - k_z^2} \right). \quad (9.14)$$

Die Funktion Z_m setzt sich im allgemeinen aus zwei Zylinderfunktionen zusammen. Diese werden im nächsten Abschnitt ausführlich betrachtet. Die Lösung für das Vektorpotential A lautet somit in Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} A &= Z_m(Kr) e^{\pm j m \varphi} e^{\pm j k_z z} \\ \text{bzw.} \\ A &= Z_m(Kr) \begin{Bmatrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin k_z z \\ \cos k_z z \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (9.15)$$

mit der Separationsgleichung

$$k^2 = K^2 + k_z^2 \quad (9.16)$$

Bei der Lösung der Wellengleichung wurden keine Sonderfälle wie z. B. $m = 0$, $k_z = 0$ oder $k_z = k$ berücksichtigt. Für die allgemeine Lösung müssen diese Spezialfälle zusätzlich zu der Lösung (9.15) überlagert werden.

9.1.1 Die Zylinderfunktionen

Die **Zylinderfunktionen** haben wir bereits in Abschnitt 2.2.6 bei der Lösung der Potentialgleichung in Zylinderkoordinaten kennengelernt (vgl. (2.129)-(2.132)). Ähnlich wie die trigonometrischen Funktionen oder Exponentialfunktionen, die bei der Lösung der Wellengleichung in kartesischen Koordinaten auftreten, können die Zylinderfunktionen nur durch einen Potenzreihenansatz angegeben werden. Auf die Herleitung der Zylinderfunktionen sei an dieser Stelle verzichtet; sie findet sich in verschiedenen Handbüchern, z. B. Abramowitz, M.; Stefan, A.: "Handbook of Mathematical Functions", Vol. AMS 55, 1964, S. 358-374.

Die **Besselfunktion** oder **Zylinderfunktion 1. Art** ergibt sich zu

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \prod(m+k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k} \quad (9.17)$$

mit der $\prod$ -Funktion $\prod(x)$, die für ganzzahlige Werte von x der Fakultät $x!$ entspricht. In (2.130) wurde eine Näherung für kleine x angegeben. Aus (9.17) lassen sich einige Eigenschaften ableiten, z. B.

$$J_m(-x) = e^{jm\pi} J_m(x) \quad (9.18)$$

$$J_m(-x) = (-1)^m J_m(x) \quad \text{für ganzzahlige } x \quad (9.19)$$

Abb. 9.1 zeigt Funktionsverläufe der Besselfunktionen $J_0, \dots, J_3$ mit ganzzahliger Ordnung und reellem Argument.

Die nächste Teillösung der Besselschen Differentialgleichung ist die **Neumann-Funktion** oder **Zylinderfunktion 2. Art**

$$N_m(x) = \frac{J_m(x) \cos m\pi - J_{-m}(x)}{\sin m\pi} \quad (9.20)$$

Für ganzzahlige m sind Zähler und Nenner Null. Nach der Regel von l'Hospital errechnet sich:

$$\begin{aligned} N_m(x) &= \lim_{\mu \rightarrow m} N_\mu(x) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial J_\mu}{\partial \mu} - (-1)^m \frac{\partial J_{-\mu}}{\partial \mu} \right)_{\mu=m} \end{aligned} \quad (9.21)$$

Der Funktionsverlauf der Neumann-Funktion wird in Abb. 9.2 aufgezeigt.

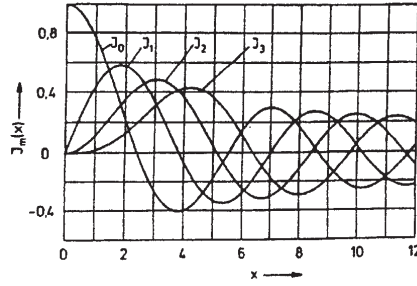


Abbildung 9.1: Funktionsverlauf einiger Besselfunktionen.

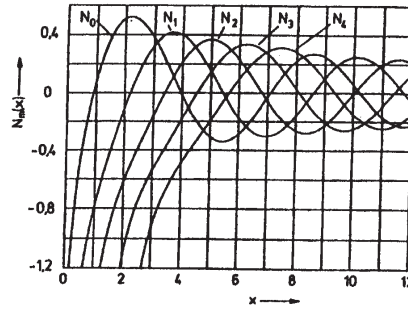


Abbildung 9.2: Funktionsverläufe einiger Neumann-Funktionen.

Einige Näherungen für bestimmte Wertebereiche von x wurden in (2.131) und (2.132) gegeben, ansonsten ist auf einschlägige Tabellenwerke zurückzugreifen.

Für große Argumente $x \gg 1, m$ gelten folgende Näherungen:

$$J_m(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left[x - \left(m + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right] \quad (9.22)$$

$$N_m(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left[x - \left(m + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right] \quad (9.23)$$

Für große Argumente entspricht die Besselfunktion also der Cosinusfunktion und die Neumann-Funktion der Sinusfunktion. Beide Zylinderfunktionen beschreiben also eine in radialer Richtung stehende Welle.

Eine sich ausbreitende Welle wird in kartesischen Koordinaten durch eine Linearkombination aus trigonometrischen Funktionen

$$e^{\pm jx} = \cos x \pm j \sin x$$

erzeugt. Eine entsprechende Kombination der Zylinderfunktionen ergeben die **Hankelfunktionen 1. und 2. Art.**, welche auch als **Zylinderfunktionen 3. Art** bezeichnet werden.

$$H_m^{(1)}(x) = J_m(x) + jN_m(x) \quad (9.24)$$

$$H_m^{(2)}(x) = J_m(x) - jN_m(x) \quad (9.25)$$

Die Näherungen der Hankelfunktionen für große Argumente $x \gg 1, m$ zeigen deutlich die Ver-

wandschaft mit den Exponentialfunktionen:

$$H_m^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{j[x - (m + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}]} \quad (9.26)$$

$$H_m^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-j[x - (m + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}]} \quad (9.27)$$

Während die Bessel- und Neumannfunktion eine in radialer Richtung stehende Welle beschreiben, geben die Hankelfunktionen 1. und 2. Art eine Welle an, die sich in positive bzw. negative x -Richtung ausbreitet, wobei darauf hinzuweisen ist, daß x in unserem Zusammenhang für Kr steht und nicht die kartesische Koordinate beschreibt.

9.1.2 Geeignete Auswahl der Zylinderfunktionen

Als nächstes seien **Kriterien zur Auswahl der Zylinderfunktionen** behandelt:

1. Bestimmung des Parameters m : Aus (9.15) wird ersichtlich, daß m durch die azimutale Abhängigkeit der Anordnung festgelegt wird. Da der Parameter m auch die Ordnung der Zylinderfunktionen bestimmt, tritt somit eine Verkopplung zwischen der radialen und azimutalen Abhängigkeit auf.

Umfaßt das Gebiet den gesamten Winkelbereich $0 < \varphi < 2\pi$, so muß die Umlaufbedingung $A(\varphi) = A(\varphi + 2\pi)$ erfüllt sein. Sie ist genau dann erfüllt, wenn m ganzzahlig ist. Wird nur ein Sektor betrachtet, so hängt m vom Öffnungswinkel des Sektors ab und muß nicht mehr ganzzahlig sein.

2. (a) Bei einem radial begrenzten Gebiet bildet sich in dieser Richtung eine stehende Welle aus und der Ansatz von Bessel- und Neumann-Funktionen ist am geeignetsten.
- (b) Schließt das Gebiet die z -Achse ($r = 0$) mit ein, dann dürfen nur noch Besselfunktionen verwendet werden, da sie im Gegensatz zu Neumann-Funktionen für $r = 0$ endlich bleiben.
- (c) Für ein Gebiet, das in radialer Richtung offen ist, werden zur Lösung Hankelfunktionen angesetzt. Je nachdem, ob es sich um eine Einstrahlung oder Ausstrahlung handelt, werden die Hankelfunktionen 1. oder 2. Art verwendet.

Abb. 9.3 zeigt eine tabellarische Übersicht über die Auswahl der Zylinderfunktionen.

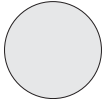
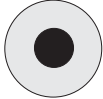
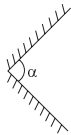
	Rundhohlleiter	Koaxialleiter	Sektorhorn
Wellenleiter			
m	m ganzzahlig		m ist vom Winkel α abhängig
Zylinderfunktion	J_m	$AJ_m + BN_m$	Einstrahlung: $H_m^{(1)}$ Ausstrahlung: $H_m^{(2)}$

Abbildung 9.3: Übersicht über die Auswahl der Zylinderfunktionen.

9.2 Wellentypen in einem Rundhohlleiter

Als einfachste zylindersymmetrische Struktur wird nun der Rundhohlleiter untersucht ($\rightarrow$ Abb. 9.4).

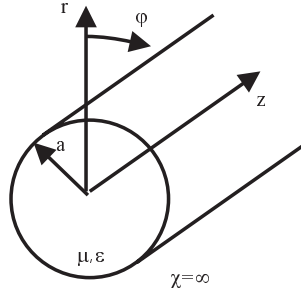


Abbildung 9.4: Geometrie eines Rundhohlleiters.

9.2.1 Herleitung des Vektorpotentials

Nach (9.15) ist

$$A = Z_m(Kr) \left\{ \begin{array}{l} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{array} \right\} e^{\pm jk_z z}$$

mit der Separationsgleichung

$$k^2 = K^2 + k_z^2$$

die Lösung der Wellengleichung in Zylinderkoordinaten.

Zur Berechnung der Wellentypen in einem Rundhohlleiter mit ideal leitender Außenwand wird die allgemeine Lösung spezialisiert. Wegen der Periodizität der Anordnung bezüglich des Winkels φ muß die Umlaufbedingung

$$A(\varphi) = A(\varphi + 2\pi) \quad (9.28)$$

erfüllt sein. Dies liefert die Beziehung

$$e^{\pm jm\varphi} = e^{\pm jm(\varphi+2\pi)} \quad (9.29)$$

die immer dann erfüllt ist, wenn m ganzzahlig ist ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$).

Die φ -Abhängigkeit läßt sich somit durch eine Linearkombination von Sinus- und Cosinusfunktionen beschreiben. Da die Anordnung rotationssymmetrisch ist, kann der Ursprung der φ -Koordinate frei gewählt werden. O. B. d. A. kann der Ursprung immer so festgelegt werden, daß allein eine Sinus- oder Cosinusfunktion zur Beschreibung der φ -Abhängigkeit ausreicht. Da im Fall $m = 0$ die Sinusfunktion identisch Null ist, wird die Cosinusfunktion gewählt. Für das Vektorpotential gilt also

$$A \sim \cos m\varphi \quad (9.30)$$

Unabhängig davon, ob man einen E_z - oder H_z -Wellenansatz wählt, ist das elektromagnetische Feld für $r \rightarrow 0$ endlich. Deshalb darf die Lösung nur Besselfunktionen enthalten.

$$A \sim J_m(Kr) \quad (9.31)$$

Somit ergibt sich für das Vektorpotential einer elektromagnetischen Welle, die sich in einem Rundhohlleiter in positive z -Richtung ausbreitet, der Ansatz

$$\begin{aligned} A &= C J_m(Kr) \cos(m\varphi) e^{-jk_z z} \\ \text{mit } k_z &= \sqrt{k^2 - K^2} \end{aligned} \quad (9.32)$$

9.2.2 TM_{zmn} -Wellen

Für TM_z - oder E_z -Wellen gilt

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \text{rot} \vec{A} \\ \vec{E} &= \frac{1}{j\omega\varepsilon} \text{rot} \vec{H} \end{aligned}$$

Mit dem Vektorpotentialansatz in (9.32) ergeben sich folgende Feldkomponenten

$$\left. \begin{aligned} H_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} = -C \frac{m}{r} J_m(Kr) \sin(m\varphi) e^{-jk_z z} \\ H_\varphi &= -\frac{\partial A_z}{\partial r} = -CK J'_m(Kr) \cos(m\varphi) e^{-jk_z z} \\ E_r &= -\frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = -C \frac{k_z}{\omega\varepsilon} K J'_m(Kr) \cos(m\varphi) e^{-jk_z z} \\ E_\varphi &= \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{\partial H_r}{\partial z} = C \frac{k_z}{\omega\varepsilon} \frac{m}{r} J_m(Kr) \sin(m\varphi) e^{-jk_z z} \\ E_z &= \frac{K^2}{j\omega\varepsilon} A_z = C \frac{K^2}{j\omega\varepsilon} J_m(Kr) \cos(m\varphi) e^{-jk_z z} \end{aligned} \right\} \quad (9.33)$$

Der Strich „‘“ bei den Zylinderfunktionen bedeutet die Ableitung der Funktion nach ihrem Argument:

$$Z'_m = \frac{dZ_m(Kr)}{d(Kr)} \quad (9.34)$$

Nun muß noch die Randbedingung eingebaut werden, daß das tangential elektrische Feld E_φ und E_z bei $r = a$ gleich Null sein muß. Da sowohl E_φ als auch E_z proportional zu J_m sind, folgt aus der Randbedingung somit die Forderung

$$J_m(Kr) = 0 \quad \text{für } r = a \quad (9.35)$$

Hieraus können wir den **Eigenwert** K

$$K = \frac{j_{mn}}{a} \quad (9.36)$$

bestimmen. j_{mn} ist die n -te Nullstelle der Besselfunktion J_m . Die Tabelle 9.1 gibt einige Nullstellen der Besselfunktionen an. Das elektromagnetische Feld einer TM_{zmn} -Welle in einem elektrisch ideal

		m			
		0	1	2	3
n	1	2.405	3.832	5.136	6.380
	2	5.520	7.016	8.417	9.761
	3	8.654	10.173	11.620	13.015

Tabelle 9.1: Einige Nullstellen der Besselfunktionen.

leitenden Rundhohlleiter, die sich in positive z -Richtung ausbreitet, lautet somit:

$$\begin{aligned}
 H_r &= -C \frac{m}{r} J_m \left(j_{mn} \frac{r}{a} \right) \sin(m\varphi) e^{-jk_z z} \\
 H_\varphi &= -C \frac{j_{mn}}{a} J'_m \left(j_{mn} \frac{r}{a} \right) \cos(m\varphi) e^{-jk_z z} \\
 E_r &= -C Z^E \frac{j_{mn}}{a} J'_m \left(j_{mn} \frac{r}{a} \right) \cos(m\varphi) e^{-jk_z z} \\
 E_\varphi &= C Z^E \frac{m}{r} J_m \left(j_{mn} \frac{r}{a} \right) \sin(m\varphi) e^{-jk_z z} \\
 E_z &= C \left(\frac{j_{mn}}{a} \right)^2 \frac{1}{j\omega\varepsilon} J_m \left(j_{mn} \frac{r}{a} \right) \cos(m\varphi) e^{-jk_z z}
 \end{aligned} \tag{9.37}$$

mit der Separationsgleichung

$$k_z^2 = k^2 - \left(\frac{j_{mn}}{a} \right)^2 \tag{9.38}$$

und dem Feldwellenwiderstand

$$Z^E = \frac{k_z}{\omega\varepsilon}.$$

Für die Grenzfrequenz ω_c gilt:

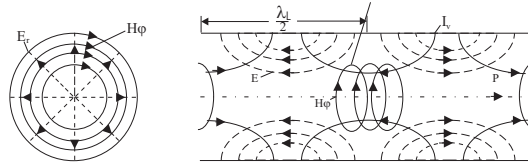
$$\omega_{c\,mn} = \frac{j_{mn}}{a} c \tag{9.39}$$

9.2.2.1 Beispiel: $\text{TM}_{z\,01}$ -Welle

Die $\text{TM}_{z\,01}$ -Welle ist die TM_z -Welle mit der niedrigsten Grenzfrequenz (vgl. Tabelle). Wie wir später noch sehen werden, ist sie aber nicht die Grundwelle des Rundhohlleiters (sondern die $\text{TE}_{z\,11}$ -Welle). Durch Einsetzen von $m = 0$ und $n = 1$ in den Gleichungen (9.37) und (9.38) erhalten wir die Feldkomponenten

$$\left. \begin{aligned}
 H_\varphi &= -C \frac{j_{01}}{a} J'_{01} \left(j_{01} \frac{r}{a} \right) e^{-jk_z z} \\
 E_r &= -C Z^E \frac{j_{01}}{a} J'_{01} \left(j_{01} \frac{r}{a} \right) e^{-jk_z z} \\
 E_z &= C \left(\frac{j_{01}}{a} \right)^2 \frac{1}{j\omega\varepsilon} J_{01} \left(j_{01} \frac{r}{a} \right) e^{-jk_z z}
 \end{aligned} \right\} \tag{9.40}$$

Die $\text{TM}_{z\,01}$ -Welle ist also eine 3-Komponenten-Welle, deren Feldkomponenten keine azimuthale Abhängigkeit aufweisen, d. h. die Welle ist rotationssymmetrisch. Ihr Feldbild ist in Abb. 9.5 aufgezeigt.

Abbildung 9.5: Feldbild der TM_{z01} -Welle.

		m			
		0	1	2	3
n	1	3.832	1.841	3.054	4.201
	2	7.016	5.331	6.706	8.015
	3	10.173	8.536	9.969	11.346

Tabelle 9.2: Einige Nullstellen der 1. Ableitung der Besselfunktionen.

9.2.3 TE_{zmn} -Wellen

Für TE_z - oder H_z -Wellen gilt

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \text{rot} \vec{A} \\ \vec{H} &= \frac{-1}{j\omega\mu} \text{rot} \vec{E}.\end{aligned}$$

Mit dem Vektorpotentialansatz (9.32) ergeben sich folgende Feldkomponenten:

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} &= -C \frac{m}{r} J_m(Kr) \sin(m\varphi) e^{-jk_z z} \\ E_\varphi &= -\frac{\partial A_z}{\partial r} &= -CK J'_m(Kr) \cos(m\varphi) e^{-jk_z z} \\ H_r &= \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} &= C \frac{k_z}{\omega\mu} K J'_m(Kr) \cos(m\varphi) e^{-jk_z z} \\ H_\varphi &= -\frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_r}{\partial z} &= -C \frac{k_z}{\omega\mu} \frac{m}{r} J_m(Kr) \sin(m\varphi) e^{-jk_z z} \\ H_z &= -\frac{K^2}{j\omega\mu} A_z &= -C \frac{K^2}{j\omega\mu} J_m(Kr) \cos(m\varphi) e^{-jk_z z} \end{aligned} \right\} \quad (9.41)$$

Die Randbedingung erfordert das Verschwinden des tangentialen elektrischen Feldes E_φ bei $r = a$. Wegen der Proportionalität von E_φ zu J'_m bedeutet dies, daß

$$J'_m(Kr) = 0 \quad \text{für } r = a \quad (9.42)$$

gelten muß. Damit ergeben sich die Eigenwerte

$$K = \frac{j'_{mn}}{a} \quad (9.43)$$

j'_{mn} ist die n -te Nullstelle der nach ihrem Argument abgeleiteten Besselfunktionen, also J'_m . Die Tabelle 9.2 gibt einige Nullstellen der 1. Ableitung der Besselfunktionen an.

Damit ergibt sich für das elektromagnetische Feld einer TE_{zmn} -Welle in einem Rundhohlleiter

bei Ausbreitung in positiver z -Richtung:

$$\begin{aligned}
 E_r &= -C \frac{m}{r} J_m \left(j'_{mn} \frac{r}{a} \right) \sin(m\varphi) e^{-jk_z z} \\
 E_\varphi &= -C \frac{j'_{mn}}{a} J'_m \left(j'_{mn} \frac{r}{a} \right) \cos(m\varphi) e^{-jk_z z} \\
 H_r &= C \frac{1}{Z^H} \frac{j'_{mn}}{a} J'_m \left(j'_{mn} \frac{r}{a} \right) \cos(m\varphi) e^{-jk_z z} \\
 H_\varphi &= -C \frac{1}{Z^H} \frac{m}{r} J_m \left(j'_{mn} \frac{r}{a} \right) \sin(m\varphi) e^{-jk_z z} \\
 H_z &= -C \left(\frac{j'_{mn}}{a} \right)^2 \frac{1}{j\omega\mu} J_m \left(j'_{mn} \frac{r}{a} \right) \cos(m\varphi) e^{-jk_z z}
 \end{aligned} \tag{9.44}$$

mit der Separationsgleichung

$$k_z^2 = k^2 - \left(\frac{j'_{mn}}{a} \right)^2 \tag{9.45}$$

und dem Feldwellenwiderstand

$$Z^H = \frac{\omega\mu}{k_z}.$$

Für die Grenzfrequenz ω_c gilt

$$\omega_{c\,mn} = \frac{j'_{mn}}{a} c \tag{9.46}$$

Ein Vergleich mit der niedrigsten Grenzfrequenz der TM-Wellen zeigt, daß die $\text{TE}_{z\,11}$ -Welle mit $j'_{11} = 1.841$ die niedrigste Grenzfrequenz besitzt. Die $\text{TE}_{z\,11}$ -Welle ist somit die Grundwelle im Rundhohlleiter. Ihr Feldbild ist in Abb. 9.6 dargestellt.

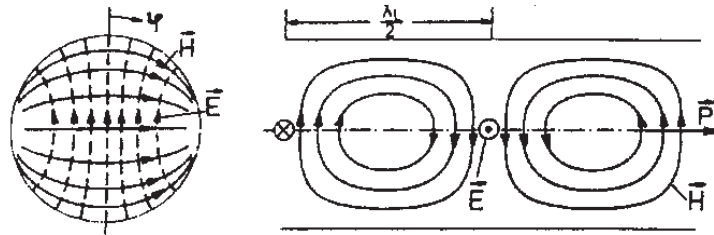


Abbildung 9.6: Feldbild der $\text{TE}_{z\,11}$ -Welle.

In Tabelle 9.3 sind die Wellentypen mit den niedrigsten Grenzfrequenzen zusammengestellt. Die $\text{TE}_{z\,01}$ - und $\text{TM}_{z\,11}$ -Welle besitzen die gleiche Grenzfrequenz und sind daher entartet.

Nullstelle	Wellentyp
$j'_{11} = 1.841$	$\text{TE}_{z11} \quad (\text{H}_{z11})$
$j_{01} = 2.405$	$\text{TM}_{z01} \quad (\text{E}_{z01})$
$j'_{21} = 3.054$	$\text{TE}_{z21} \quad (\text{H}_{z21})$
$j'_{01} = 3.832$	$\text{TE}_{z01} \quad (\text{H}_{z01})$
$j_{11} = 3.832$	$\text{TM}_{z11} \quad (\text{E}_{z11})$

Tabelle 9.3: Wellentypen mit den niedrigsten Grenzfrequenzen.

9.3 Kreiszyklindrische Resonatoren

Durch den Abschluß eines Rundhohlleiters in den Ebenen $z = 0$ und $z = L$ mit einer ideal leitenden Platte entsteht ein Hohlraumresonator ($\rightarrow$ Abb. 9.7). Durch den Abschluß bildet sich auch in z -

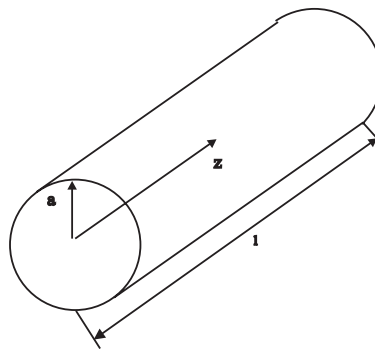


Abbildung 9.7: Geometrie eines Hohlraumresonators.

Richtung eine stehende Welle aus. Zusätzlich zu den Randbedingungen bei $r = a$ kommen nun noch Randbedingungen für die E_r - und E_φ -Komponente bei $z = 0$ und $z = L$ hinzu. Aus diesen Bedingungen folgt

$$k_z = \frac{p\pi}{L} \quad \text{mit } p = 0, 1, 2, \dots \quad (9.47)$$

Da nun auch k_z durch die Geometrie der Anordnung vorgegeben ist, kann man die Resonanzfrequenzen der Eigenschwingungen angeben. (folgt aus der Separationsgleichung und $k = \omega/c$).

- Für TM_z -Wellen (E_z -Wellen) gilt

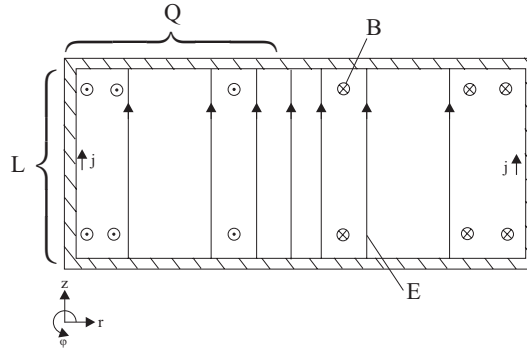
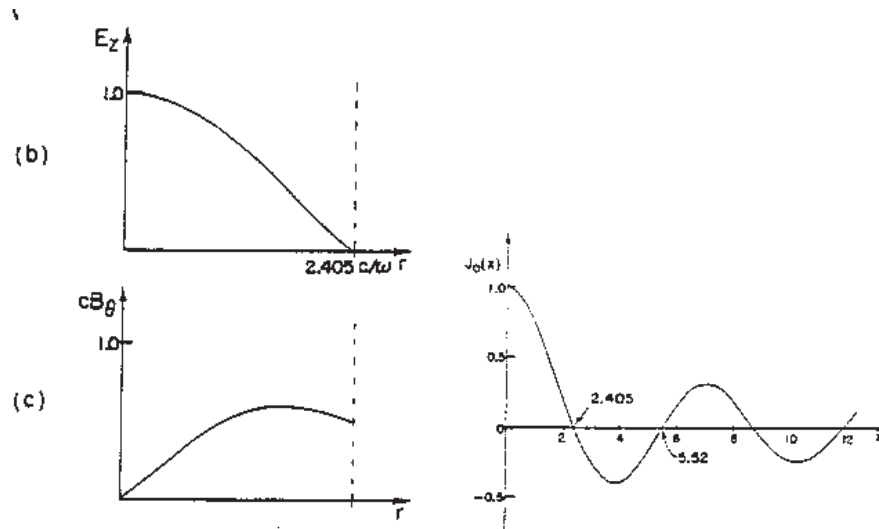
$$\omega_{mnp} = c \sqrt{\left(\frac{j_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2} \quad \text{mit } p = 0, 1, 2, \dots \quad (9.48)$$

- Für TE_z -Wellen (H_z -Wellen) gilt

$$\omega_{mnp} = c \sqrt{\left(\frac{j'_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2} \quad \text{mit } p = 0, 1, 2, \dots \quad (9.49)$$

9.3.1 TM_{010} -Mode als einfachstes Beispiel

Das elektrische Feld schwingt mit der Frequenz ω , die von der Höhe L und dem Radius r bestimmt ist. Die Änderung der Feldamplitude von $\vec{E}$ mit dem Abstand von der Achse ist in Abb. 9.9 dargestellt. Die Kurve ist der erste Bogen der Besselfunktion J_0 .

Abbildung 9.8: Der TM_{010} -Mode im Hohlraumresonator.Abbildung 9.9: Der TM_{010} -Mode im Hohlraumresonator.

Das Magnetfeld $\vec{H}$ verläuft auf Kreisen um die Achse. Es schwingt mit einer Phasenverschiebung von 90° gegenüber dem elektrischen Feld $\vec{E}$.

Der TM_{010} -Mode hat auch wichtige praktische Bedeutung z. B. als Beschleunigungsmodus für Elementarteilchen.

9.4 Die Koaxialleitung

Die Koaxialleitung, auch elektrische Doppelleitung, besteht aus einem zylindrischen Rohr (oder Drahtgeflecht) als Außenleiter und einem coaxialen Innenleiter (Draht oder Litze). Zwischen Außen- und Innenleiter befindet sich ein verlustarmes Dielektrikum, in dem die elektromagnetischen Wellen geführt werden ($\rightarrow$ Abb. 9.10). Vorteil der Koaxialleitung ist die gute Abschirmung des Feldes nach außen. Die Koaxialleitung wird überwiegend zur Fortleitung elektrischer Energie in der Nachrichtentechnik verwendet; sie eignet sich besonders zur Übertragung breiter Frequenzbänder.

Da bei einer Koaxialleitung die z -Achse nicht zum Rechengebiet gehört, müssen für die Zylinderfunktionen sowohl die Bessel- als auch die Neumannfunktionen angesetzt werden:

$$Z_m(Kr) = A \cdot J_m(Kr) + B \cdot N_m(Kr) \quad (9.50)$$

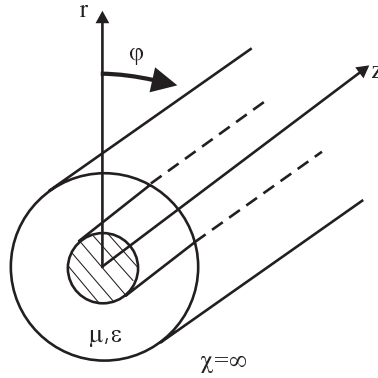


Abbildung 9.10: Geometrie einer Koaxialleitung.

Zur Bestimmung des Eigenwertes K werden die Randbedingungen

$$E_z = E_\varphi = 0 \quad \text{für } r = r_i \text{ und } r = r_a \quad (9.51)$$

eingearbeitet. Damit ergibt sich

$$Z_m(Kr) = 0 \quad \text{für } r = r_i \text{ und } r = r_a \text{ bei TM-Wellen} \quad (9.52)$$

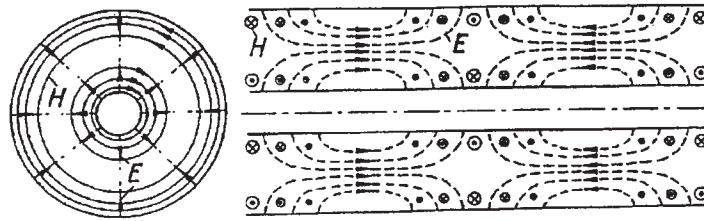
$$Z'_m(Kr) = 0 \quad \text{für } r = r_i \text{ und } r = r_a \text{ bei TE-Wellen} \quad (9.53)$$

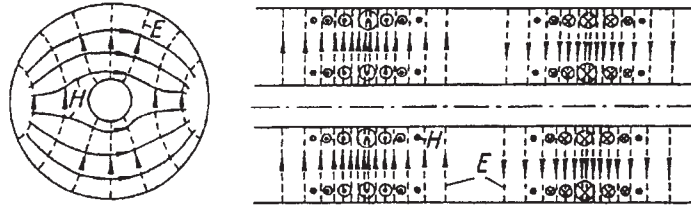
Aus diesen Gleichungen kann jeweils die Eigenwertgleichung aufgestellt werden:

$$\frac{N_m(Kr_i)}{J_m(Kr_i)} = \frac{N_m(Kr_a)}{J_m(Kr_a)} \quad \text{bei TM-Wellen,} \quad (9.54)$$

$$\frac{N'_m(Kr_i)}{J'_m(Kr_i)} = \frac{N'_m(Kr_a)}{J'_m(Kr_a)} \quad \text{bei TE-Wellen.} \quad (9.55)$$

Diese Gleichungen werden in der Regel numerisch gelöst. Das Feldbild der TM_{z01} -Welle ist in Abb. 9.11, das Feldbild der TE_{z11} -Welle ist in Abb. 9.12 dargestellt.

Abbildung 9.11: Das Feldbild der TM_{z01} -Welle.

Abbildung 9.12: Das Feldbild der TE_{z11} -Welle.

TEM-Welle

Als nächstes wird die Frage untersucht, ob in der Koaxialleitung eine Welle existiert, die keine Grenzfrequenz ($\omega_c = 0$) hat. Für die Grenzfrequenz gilt $k_z = 0$ und somit

$$\omega_c = \frac{1}{\mu\varepsilon} K = 0.$$

Das bedeutet, daß für die Welle ohne Grenzfrequenz auch der Eigenwert K verschwinden muß.

$$K = 0 \quad (9.56)$$

Zur Berechnung dieser Welle wird von der Besselschen Differentialgleichung (9.13)

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} + \left(K^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) f = 0 \quad (9.57)$$

ausgegangen. Für $K = 0$ und $m = 0$ ergibt sich

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} = 0 \quad (9.58)$$

mit der Lösung

$$f = C_1 \ln \frac{r}{C_2}. \quad (9.59)$$

Für das Vektorpotential kann dann

$$A = C_1 \ln \frac{r}{C_2} e^{-jkz} \quad (9.60)$$

geschrieben werden. Dabei wurde berücksichtigt, daß $K = 0$ ist und somit $k_z = k$ gilt.

Da die $\ln$ -Funktion für $r \rightarrow 0$ gegen Unendlich strebt, kann dieser Ansatz nur für $r_i > 0$ gewählt werden (und ist daher in einem Rundhohlleiter nicht möglich). Aus dem Ansatz $\vec{H} = \text{rot} \vec{A}$ werden nun die Feldkomponenten berechnet:

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \frac{1}{r} E_0 e^{-jkz} \\ H_\varphi &= \frac{1}{Z} E_r = \frac{1}{Z} \frac{1}{r} E_0 e^{-jkz} \\ E_\varphi &= E_z = H_r = H_z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.61)$$

mit $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$.

Prinzipiell wäre auch der Ansatz $\vec{E} = \text{rot} \vec{A}$ möglich, doch werden bei diesem Ansatz alle Feldkomponenten auf Grund der Randbedingungen Null.

Da der Wellentyp nur transversale Feldkomponenten besitzt, wird diese Welle TEM-Welle genannt. Der Feldwellenwiderstand Z , die Ausbreitungskonstante k_z und die Grenzfrequenz ω_c sind mit den entsprechenden Größen der homogenen ebenen Welle identisch.

Im Gegensatz zu Hohlleitern besitzt die koaxiale Leitung zwei getrennte Leiter zwischen denen ein statisches elektrisches Feld möglich ist. Aus diesem Grund kann sich eine TEM-Welle mit der Grenzfrequenz $\omega_c = 0$ ausbreiten. Die Grenzfrequenz $\omega_c = 0$ bedeutet, daß in der Anordnung ein Gleichstrom fließen kann. Für einen Gleichstrom muß mindestens ein Hin- und ein Rückleiter vorhanden sein. In jedem ideal leitenden Mehrleitersystem ist die TEM-Welle als Grundwelle möglich.

Kapitel 10

Das kreiszylindrische Zweischichtenproblem

Wie beim kartesischen Dreischichtenproblem sollen hier nur einige kurze Anmerkungen gemacht werden.

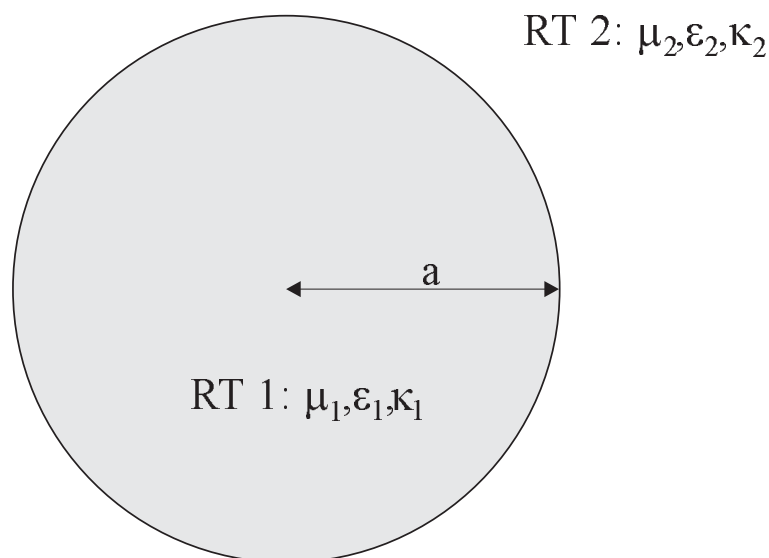


Abbildung 10.1: Das kreiszylindrische Zweischichtenproblem

Anwendungsfälle für diesen Problemtyp sind z. B.

- der dielektrische Draht (Lichtwellenleiter)
- der verlustbehaftete Rundhohlleiter
- der metallische Stab

Im allgemeinen muß eine hybride Welle als Lösungsansatz gewählt werden, d. h. es wird eine Superposition von elektrischem und magnetischem Vektorpotential gewählt.

Aus der Bedingung, daß die Felder bei $r = 0$, also auf der z -Achse, endlich sind und daß sie 2π -periodisch sind, ergibt sich die Wahl der Besselfunktionen ($J_m, m = 0, 1, 2, \dots$) für die radiale Feldabhängigkeit im Raumteil 1. Im Raumteil 2 müssen wegen der Ausstrahlungsbedingung

Hankelfunktionen 2. Ordnung ($H_m^{(2)}, m = 0, 1, 2, \dots$) gewählt werden. Die allgemeine Eigenwertgleichung für das Zweischichtenproblem, auf deren Angabe hier verzichtet wird, enthält dann diese Funktionen sowie deren erste Ableitungen.

Dieser Problemtyp erfaßt z. B. auch die Dämpfung in einem Rundhohlleiter mit endlich leitenden Wänden. Ein wichtiges Ergebnis für das asymptotische Verhalten als Funktion der Frequenz ergibt dann, daß die Dämpfung mit zunehmender Frequenz gegen Null geht. Dies ist ideal für die Nachrichtenübertragung über lange Strecken.

Im Fall der optischen Faser (Typ dielektrischer Rundhohlleiter) hat Raumteil 1 nur sehr geringe Verluste und es gilt $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$.

Die Eigenwertgleichung muß in diesem Fall numerisch gelöst werden. Mit zunehmender Frequenz breitet sich die Welle nur noch in Raumteil 1 aus.

Bemerkung zu Problemen mit dielektrischer Schichtung

Einteilung:

1. Drei-Schichten-Problem in xyz -Geometrie:

Um alle zur Erfüllung der Stetigkeitsbedingungen notwendigen Feldkomponenten zu erhalten, wird ein Vektorpotential senkrecht zur Schichtung angesetzt. Aus den Gleichungen für die Stetigkeit der tangentialen elektrischen und magnetischen Feldkomponenten ergibt sich durch Division die Eigenwertgleichung, die zusammen mit den Separationsgleichungen für die einzelnen Raumteile die Lösungen der Maxwellschen Gleichungen beschreibt.

2. Zwei-Schichten-Problem in $r\varphi z$ -Geometrie:

Da bei der Verwendung von Zylinderkoordinaten nur Vektorpotentiale in z -Richtung zugelassen sind, muß hier ein Hybridwellenansatz mit einer Superposition eines elektrischen und eines magnetischen Vektorpotentials gemacht werden. Die einzige Ausnahme hiervon sind Monopolmoden ($m = 0$ bzw. $d/d\varphi = 0$), für die reine TM- und TE-Wellen existieren. Durch die Division der aus den Stetigkeitsbedingungen folgenden Gleichungen ergibt sich die Eigenwertgleichung.

Ist eine der Schichten mit gut leitendem Material gefüllt, also $\delta \ll a$ mit der Schichtdicke a , so läßt sich die Dämpfung für Frequenzen oberhalb der Grenzfrequenz der zugehörigen ideal leitenden Struktur als

$$\alpha \approx \frac{\delta}{2a} \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{1}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}}$$

darstellen. Die komplexe Ausbreitungskonstante ergibt sich zu

$$k_z = \beta_0 + \alpha - j\alpha$$

mit β_0 als Phasenkonstante der idealen Struktur.

Kapitel 11

Die Power-Loss-Methode

In einem Hohlleiter mit ideal leitenden Wänden breiten sich die Wellen oberhalb ihrer Grenzfrequenz ohne Dämpfung aus und besitzen nur eine Phasenkonstante $k_z = \beta$. Unterhalb der Grenzfrequenz sind die Wellen gedämpft ($k_z = -j\alpha$).

In der Praxis ist die Leitfähigkeit der Hohlleiterwände endlich, mit der Folge einer Dämpfung der Wellen, die sich in der nunmehr komplexen Ausbreitungskonstante $k_z = \beta - j\alpha$ ausdrückt. Eine exakte Berechnung der Verluste ist in der Regel nur mit einem großen mathematischen Aufwand möglich, so daß Näherungen benutzt werden.

Eine Methode zu näherungsweisen Berechnung der Verluste ist die **Power-Loss-Methode**, kurz **PLM**. Es handelt sich um ein Störungsverfahren, nämlich die Störung der Randbedingungen.

Es wird angenommen, daß sich bei genügend hoher Leitfähigkeit $\kappa \gg 1\text{S/m}$ die Feldkomponenten der Welle nur sehr gering von den Feldkomponenten der Welle unterscheiden, die sich bei $\kappa = \infty$ ergeben. Aus den Feldkomponenten der verlustlosen Anordnung wird die pro Längeneinheit in der Wand umgesetzte Verlustleistung P' näherungsweise bestimmt.

Für die pro Längeneinheit umgesetzte Verlustleistung P' einer Welle, die sich in positive z -Richtung ausbreitet, gilt

$$P' = -\frac{dN}{dz}. \quad (11.1)$$

Dabei ist N die Leistung, die durch den Querschnitt der Anordnung geht. Bei verlustbehafteten Leitungen nimmt der Betrag der elektrischen und magnetischen Feldkomponenten mit

$$|\underline{E}, \underline{H}| \sim e^{-\alpha z} \quad (11.2)$$

ab. Da die durch den Querschnitt gestrahlte Leistung sich aus einer Multiplikation von elektrischem und magnetischem Feld berechnet, gilt

$$N(z) \sim N_0 e^{-2\alpha z}. \quad (11.3)$$

Somit ergibt sich aus (11.1):

$$P' = -\frac{dN}{dz} = 2\alpha N \quad (11.4)$$

und damit

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{P'}{N}$$

(11.5)

Die Näherung der Power-Loss-Methode besteht nun darin, daß sowohl die durch den Querschnitt gestrahlte Leistung N als auch die pro Längeneinheit umgesetzte Verlustleistung P' aus den Feldern der verlustlosen Anordnung ($\kappa = \infty$) berechnet werden.

Die Integration des Realteils des Poynting-Vektors über den Querschnitt des Hohlleiters liefert die durch den Hohlleiterquerschnitt gestrahlte Leistung N

$$N = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \iint (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot d\vec{A} \right\} \quad (11.6)$$

Die Verluste P' (pro Längeneinheit) können aus dem Wandstrombelag $\vec{J}_A = \vec{n} \times \vec{H}_t$ berechnet werden

$$\begin{aligned} P' &= \frac{1}{2} \int \vec{J}_A \cdot \vec{J}_A^* \operatorname{Re} \{Z_m\} ds \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\kappa}} \int |\vec{H}_t|^2 ds. \end{aligned} \quad (11.7)$$

Die Integration erfolgt über den Rand des Hohlleiterquerschnitts. Die Größe Z_m wird auch Wandimpedanz genannt. Auf die Herleitung der Beziehung (11.7) wird hier verzichtet.

11.1 Dämpfung der Leitungswelle einer Bandleitung

Die Dämpfung der Leitungswelle einer Bandleitung ist vom Typ kartesisches Dreischichtenproblem ($\rightarrow$ Abb. 11.1) und kann exakt über die Lösung der entsprechenden Eigenwertgleichung berechnet werden.

Bei der näherungsweisen Rechnung mit der PLM wird in folgenden Schritten vorgegangen:

- Berechnung der Felder und der durch den Querschnitt gestrahlten Leistung N für $\kappa = \infty$.
- Berechnung der Wandströme für $\kappa = \infty$.
- Berechnung der Verluste für $\kappa \neq \infty$ mit Hilfe der Wandströme der verlustlosen Anordnung.
- Berechnung der Dämpfung α .

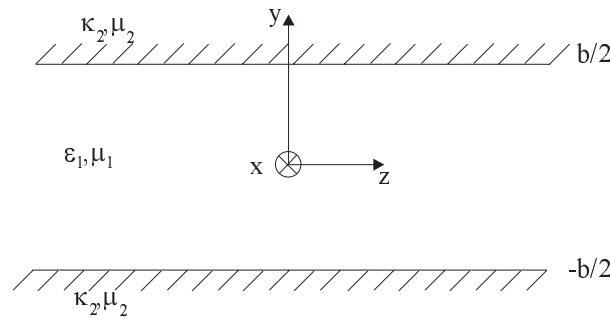


Abbildung 11.1: Bandleitung.

Die oben aufgezeigten Schritte werden nun im einzelnen behandelt:

1. Für die Feldkomponenten der Leitungswelle auf einer verlustlosen Bandleitung ($\rightarrow$ Abb. 11.1) gilt mit $\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$

$$\left. \begin{aligned} \underline{E}_y &= \underline{E}_0 e^{-jk_1 z} \\ \underline{H}_x &= -\frac{1}{Z_1} \underline{E}_0 e^{-jk_1 z} \end{aligned} \right\} \quad (11.8)$$

mit $k_z = \beta = k_1$.

Für die Leistung, die durch die Fläche $0 \leq x \leq L$ und $-b/2 \leq y \leq b/2$ gestrahlt wird, ergibt sich

$$\begin{aligned}
 N &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_{x=0}^L \int_{y=-b/2}^{b/2} (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot \vec{e}_z dx dy \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \int_{x=0}^L \int_{y=-b/2}^{b/2} \frac{|\underline{E}_0|^2}{Z_1} dx dy \\
 &= \frac{Lb}{2Z_1} |\underline{E}_0|^2
 \end{aligned} \tag{11.9}$$

2. Die Verluste werden aus den zur Wand tangentialen magnetischen Feldkomponenten

$$\begin{aligned}
 P' &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_2 \omega}{2\kappa_2}} \int_L \vec{H}_t \cdot \vec{H}_t^* ds \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_2 \omega}{2\kappa_2}} \left[\int_{x=0}^L |\underline{H}_x(y = -b/2)|^2 dx + \int_{x=0}^L |\underline{H}_x(y = b/2)|^2 dx \right] \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_2 \omega}{2\kappa_2}} \frac{L}{Z_1^2} |\underline{E}_0|^2
 \end{aligned} \tag{11.10}$$

berechnet.

3. Für die Dämpfung α folgt

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{1}{2} \frac{P'}{N} \\
 &= \sqrt{\frac{\mu_2 \omega}{2\kappa_2}} \frac{1}{b} \frac{1}{Z_1}
 \end{aligned} \tag{11.11}$$

$$= \frac{\delta}{2b} \frac{k_1 \mu_2}{\mu_1} \tag{11.12}$$

Ein Vergleich mit der exakten Rechnung als Dreischichtenproblem würde denselben Wert für die Dämpfung ergeben. Aber die Phasenkonstante β , die bei der PLM prinzipiell $\beta = k_1$ beträgt, weicht von der exakten Rechnung ab.

11.2 Anwendbarkeit der Power-Loss-Methode

Bei genügend hoher Leitfähigkeit der Wände liefert die PLM bei der Berechnung der Dämpfung der Leitungswelle einer Bandleitung richtige Ergebnisse. Nun wird die Frage untersucht, ob die Ergebnisse der PLM immer richtig sind.

Die PLM berücksichtigt keine Konversionsverluste, d. h. wenn durch die endliche Leitfähigkeit der Berandung andere Wellentypen angeregt werden und ein Teil der Leistung auf diese Wellen übergehen kann, dann liefert die PLM falsche Ergebnisse. Ein anderer Wellentyp kann nur dann angeregt werden, wenn beim Übergang von unendlicher auf endliche Leitfähigkeit zusätzliche Feldkomponenten entstehen. Zum Beispiel entsteht durch eine zur Wand tangential magnetische Feldkomponente ein Oberflächenstrom $\vec{J} = \vec{n} \times \vec{H}_t$. Bei endlicher Leitfähigkeit der Wand hat dieser Strom eine zur Wand tangential elektrische Feldkomponente in Stromrichtung zur Folge.

$$\vec{H}_t \longleftrightarrow \vec{J} \longleftrightarrow \vec{E} \tag{11.13}$$

Umgekehrt ist die tangentiale elektrische Feldstärke bei endlicher Leitfähigkeit nicht ganz Null. Durch dieses elektrische Feld wird ein Wandstrom erzeugt. Dieser Strom erzeugt wiederum eine magnetische Feldkomponente. Wenn die betrachtete Welle alle Feldkomponenten, die in (11.13) in Beziehung zueinander treten, hat, so ist die PLM anwendbar. Dabei ist zu beachten, daß es sich in (11.13) um zweiseitige Beziehungen handelt und daß es sich hierbei nur um die zur Wand tangentialen Feldkomponenten handelt. Es wird keine Aussage über Feldkomponenten senkrecht zur Wand gemacht.

Falls zusätzliche Feldkomponenten entstehen, kann die PLM unter gewissen Voraussetzungen dennoch anwendbar sein.

Falsche Ergebnisse liefert die PLM, wenn ein anderer Wellentyp existiert, der die zusätzliche Feldkomponente enthält und der die gleiche Ausbreitungskonstante k_z besitzt (Entartung). Die Abb. 11.2 zeigt die Kriterien für die Anwendbarkeit der Power-Loss-Methode auf.

Treten beim Übergang von $\kappa = \infty$ auf $\kappa \neq \infty$ zusätzliche Feldkomponenten auf ?			
nein	ja		
	Existiert eine Welle, die diese zusätzlichen Feldkomponenten (mit gleicher Ortsabhängigkeit) besitzt ?		
	nein	ja	
		Hat diese Welle die gleiche Ausbreitungskonstante k_z ?	
		nein	ja
PLM anwendbar	PLM anwendbar	PLM anwendbar	PLM <u>nicht</u> anwendbar

Abbildung 11.2: Kriterien für die Anwendbarkeit der PLM.

11.2.1 Bandleitung

Betrachtet werden E_{ymn} - und H_{ymn} -Wellen der in Kapitel 11.1 gezeigten Bandleitung. Das Vektorpotential wird in y -Richtung gewählt. Zunächst wird untersucht, ob beim Übergang von unendlicher auf endliche Leitfähigkeit zusätzliche Feldkomponenten entstehen. Die E_{ymn} -Welle hat die Feldkomponenten $\underline{E}_x$, $\underline{E}_y$, $\underline{E}_z$, $\underline{H}_x$ und $\underline{H}_z$. Bei endlicher Leitfähigkeit der Wände bewirkt die $\underline{E}_x$ -Komponente einen Oberflächenstrom $\underline{J}_x$ und dieser Strom eine magnetische Feldkomponente in z -Richtung:

$$\underline{E}_x \longleftrightarrow \underline{J}_x \longleftrightarrow \underline{H}_z \quad (11.14)$$

Für die $\underline{E}_z$ -Komponente gilt

$$\underline{E}_z \longleftrightarrow \underline{J}_z \longleftrightarrow \underline{H}_x \quad (11.15)$$

Da die E_{ymn} -Welle alle diese vier Feldkomponenten ($\underline{E}_x$, $\underline{H}_z$, $\underline{E}_z$, $\underline{H}_x$) besitzt, werden keine zusätzlichen Feldkomponenten angeregt und damit liefert die PLM die richtige Lösung.

Aus dem gleichen Grund liefert die PLM auch bei der Berechnung der Dämpfung der H_{ymn} -Welle richtige Ergebnisse.

Nun wird bei der gleichen Anordnung das Vektorpotential in z -Richtung gewählt. Die E_{zmn} -Welle hat die Feldkomponenten $\underline{E}_x$, $\underline{E}_y$, $\underline{E}_z$, $\underline{H}_x$ und $\underline{H}_y$.

$$\underline{E}_x \longleftrightarrow \underline{J}_x \longleftrightarrow \underline{H}_z \quad (11.16)$$

$$\underline{E}_z \longleftrightarrow \underline{J}_z \longleftrightarrow \underline{H}_x \quad (11.17)$$

Beim Übergang von unendlicher zu endlicher Leitfähigkeit passiert folgendes: die $\underline{E}_x$ -Komponente bewirkt einen Strom in x -Richtung $\underline{J}_x$, der eine $\underline{H}_z$ -Komponente nach sich zieht. Die $\underline{H}_z$ -Komponente ist jedoch bei der E_{zmn} -Welle *nicht* vorhanden. Das erste PLM-Kriterium ist also nicht erfüllt und es muß nun überprüft werden, ob es eine andere Welle gibt, die sowohl eine $\underline{H}_z$ -Komponente als auch die gleiche Ausbreitungskonstante k_z wie die E_{zmn} -Welle besitzt. Da die H_{zmn} -Welle beide Bedingungen erfüllt, liefert die PLM bei der Berechnung der Verluste der E_{zmn} -Wellen falsche Ergebnisse. Aus den gleichen Gründen liefert die PLM auch bei der Berechnung der Dämpfung der H_{zmn} -Welle falsche Ergebnisse.

11.2.2 Rechteckhohlleiter

Das Vektorpotential wird in z -Richtung gewählt (vgl. Abb. 11.3). Die H_{zmn} -Welle hat die Feldkom-

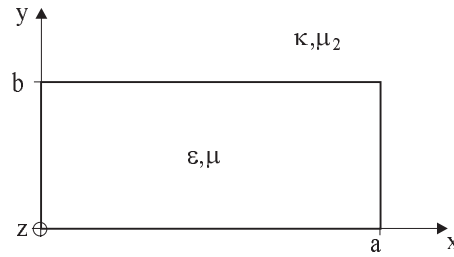


Abbildung 11.3: Geometrie des Rechteckhohlleiters.

ponenten $\underline{E}_x$, $\underline{E}_y$, $\underline{H}_x$, $\underline{H}_y$ und $\underline{H}_z$. Es werden die zur Fläche $y = 0$ tangentialen Feldkomponenten betrachtet. Die $\underline{H}_z$ -Komponente bewirkt einen Strom $\underline{J}_x$ in x -Richtung, der eine $\underline{E}_x$ -Komponente nach sich zieht.

$$\underline{H}_z \longleftrightarrow \underline{J}_x \longleftrightarrow \underline{E}_x \quad (11.18)$$

Analog dazu bewirkt die $\underline{H}_x$ -Komponente einen Strom $\underline{J}_z$, der bei endlicher Leitfähigkeit eine $\underline{E}_z$ -Komponente zur Folge hat.

$$\underline{H}_x \longleftrightarrow \underline{J}_z \longleftrightarrow \underline{E}_z \quad (11.19)$$

Die $\underline{E}_z$ -Komponente ist aber bei der H_{zmn} -Welle nicht vorhanden. Jedoch besitzt die E_{zmn} -Welle sowohl die zusätzlich angeregte $\underline{E}_z$ -Komponente als auch die gleich Ausbreitungskonstante. Deshalb liefert die PLM bei der Berechnung der Dämpfung der E_{zmn} - und H_{zmn} -Wellen falsche Ergebnisse. Die einzigen Ausnahmen bilden die H_{zm0} - und H_{z0n} -Wellen. Da die E_{zm0} - bzw. E_{z0n} -Wellen in einem Rechteckhohlleiter mit elektrisch idealleitenden Wänden nicht möglich ist, existiert keine andere Welle, die die zusätzlichen Feldkomponenten besitzt, so daß die PLM bei der Verlustberechnung der H_{zm0} - und H_{z0n} -Wellen richtige Ergebnisse liefert.

Ohne Herleitung geben wir folgendes Ergebnis an: Die **Dämpfung der H_{zm0} -Welle im**

Rechteckhohlleiter (Komponenten $\underline{E}_y$, $\underline{H}_x$, $\underline{H}_z$) ergibt sich zu

$$\alpha = k \frac{1}{2} \frac{\mu_2}{\mu} \delta^{\frac{1}{b} + \left(\frac{m}{a}\lambda\right)^2 \frac{1}{2a}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} \quad (11.20)$$

$$\text{mit } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$k_z = k \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$$

In Abb. 11.4 ist der prinzipielle Verlauf der Dämpfung der H_{zm0} - und H_{z0n} -Wellen im Rechteckhohlleiter grafisch dargestellt.

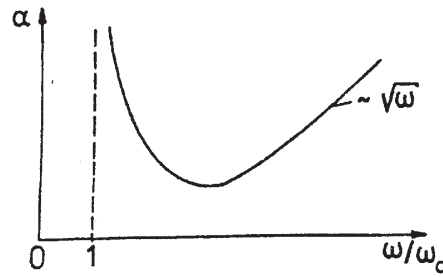


Abbildung 11.4: Prinzipieller Verlauf der Dämpfung der H_{zm0} - und H_{z0n} -Wellen im Rechteckhohlleiter.

11.2.3 Rundhohlleiter

Im Rundhohlleiter ($\rightarrow$ Abb. 11.5) entsteht zwar beim Übergang von unendlicher auf endliche Leitfähigkeit bei der E_{zmn} -Welle (TM_{zmn}) eine zusätzliche $\underline{H}_z$ -Komponente, jedoch haben die E_{zmn} -

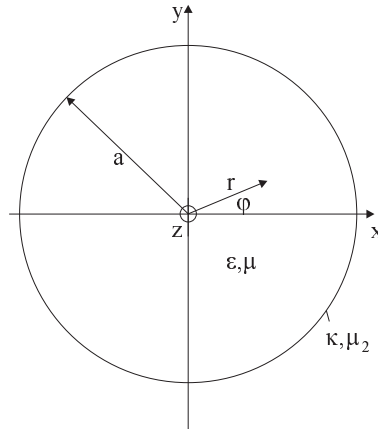


Abbildung 11.5: Geometrie des Rundhohlleiters.

und H_{zmn} -Wellen im Gegensatz zu den Moden im Rechteckhohlleiter unterschiedliche Ausbreitungskonstanten (die Moden sind nicht entartet). Deshalb können die Verluste der E_{zmn} - und H_{zmn} -Wellen (TM-, TE-Wellen) im Rundhohlleiter immer aus den Feldern der verlustlosen Anordnung berechnet werden.

Ebenfalls ohne Herleitung sei folgendes Ergebnis angegeben: Die **Dämpfung der TM_{zmn} -Welle (E_{zmn} -Welle) im Rundhohlleiter** (Komponenten $\underline{H}_r$, $\underline{H}_\varphi$, $\underline{E}_r$, $\underline{E}_\varphi$, $\underline{E}_z$) ergibt sich zu

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{\delta}{a} \frac{\mu_2}{\mu} k \frac{1}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}}. \quad (11.21)$$

Für die **Dämpfung der TE_{zmn} -Welle (H_{zmn} -Welle)** ergibt sich

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{\delta}{a} \frac{\mu_2}{\mu} \frac{1}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}} \left[\left(\frac{j'_{mn}}{ka} \right)^2 + \frac{m^2}{(j'_{mn})^2 - m^2} \right] \quad (11.22)$$

Kapitel 12

Antennen

Bisher haben wir die Eigenschaften elektromagnetischer Wellen und ihre Ausbreitung sowohl im freien Raum als auch in begrenzten Raumgebieten (Wellenleiter, Resonatoren, ...) betrachtet. Nun wird die Erzeugung solcher Wellen behandelt, indem die Emission von Strahlung durch lokalisierte Ladungs- und Stromverteilungen untersucht wird. Wir werden uns dabei auf einige einfache Strahlungssysteme beschränken. Die Stromverteilung ist dabei auf ein Gebiet d beschränkt, das gegenüber den auftretenden Wellenlängen klein ist. Wenn d größenordnungsmäßig die lineare Ausdehnung der Quelle angibt, so ist für $d \ll \lambda$ mit der Wellenlänge $\lambda = 2\pi c/\omega$ zwischen folgenden Raumgebieten zu unterscheiden:

- Nahzone (Nahfeld) $d \ll r \ll \lambda$
- Zwischenzone $d \ll r \sim \lambda$
- Fern- oder Wellenzone $d \ll \lambda \ll r$

In der **Nahzone** haben die Felder den Charakter statischer Radialfelder und Änderungen erstrecken sich über Entfernungen, die von den detaillierten Eigenschaften der Quelle abhängen. In der **Fern- oder Wellenzone** dagegen stehen die Felder senkrecht auf dem Radiusvektor und fallen mit $1/r$ ab – ein typisches Merkmal für Strahlungsfelder.

12.1 Herleitung der Wellengleichung

Betrachtet werden Wellen in einem Gebiet mit homogenen, isotropen und linearen Materialeigenschaften. In diesem Fall lauten die Maxwell'schen Gleichungen

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (12.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J} \quad (12.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{q_v}{\varepsilon} \quad (12.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0 \quad (12.4)$$

Dabei sei $\vec{J}(\vec{r}, t)$ die eingeprägte und bekannte Stromdichteverteilung und $q_v(\vec{r}, t)$ eine bekannte Raumladungsverteilung.

12.1.1 Vektorpotential für $\vec{H}$ (E-Wellen)

Wegen der Quellenfreiheit des magnetischen Feldes ($\operatorname{div} \vec{H} = 0$) kann die magnetische Feldstärke als Rotation eines Vektorpotentials dargestellt werden:

$$\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad (12.5)$$

Das Einsetzen in das Durchflutungsgesetz (12.2) liefert

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J}. \quad (12.6)$$

Das Einsetzen von (12.5) in das Induktionsgesetz (12.1) liefert

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (12.7)$$

Die Integration von (12.7) führt zu

$$\vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} - \operatorname{grad} \Phi, \quad (12.8)$$

wobei $\operatorname{grad} \Phi$ eine frei zu wählende Integrationskonstante ist. Das Einsetzen von (12.8) in (12.6) ergibt

$$\nabla^2 \vec{A} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\mu \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} - \operatorname{grad} \Phi \right) = -\vec{J} \quad (12.9)$$

Mit der **Lorentz-Eichung**

$$\operatorname{div} \vec{A} \stackrel{\text{def}}{=} -\varepsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} \Phi \quad (12.10)$$

geht (12.9) in die inhomogene vektorielle Wellengleichung über:

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} = -\vec{J}} \quad (12.11)$$

Bei vorgegebener Stromverteilung läßt sich aus dieser Differentialgleichung das Vektorpotential $\vec{A}$ bestimmen. Anschließend kann die magnetische Feldstärke $\vec{H}$ aus dem Ansatz (12.5) abgeleitet werden. Damit läßt sich dann die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ aus Gleichung (12.8) bestimmen, nachdem das Potential Φ errechnet wurde.

Eine Bestimmungsgleichung für Φ ergibt sich durch Divergenzbildung auf beiden Seiten von (12.8) und Berücksichtigung der Lorentz-Eichung:

$$\boxed{\nabla^2 \Phi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi = -\frac{q_v}{\varepsilon}} \quad (12.12)$$

Dies ist die inhomogene skalare Wellengleichung.

Bemerkung: Dieser Fall entspricht der Herleitung der vektoriellen Wellengleichung der E-Wellen in Hohlleitern und Resonatoren in Kapitel 7.1; vgl. auch die homogene Wellengleichung (7.11) der H-Wellen.

12.1.2 Vektorpotential für $\vec{E}$ (H-Wellen)

In Kapitel 7 haben wir völlig analog die Wellengleichung der E- und H-Wellen herleiten können, da keine Raumladungen vorlagen. Durch die Forderung von $q_v = 0$ können wir auch hier mit dem Ansatz

$$\vec{E} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad (12.13)$$

arbeiten. Das Einsetzen in das Induktionsgesetz (12.1) liefert

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \vec{H} \quad (12.14)$$

Das Einsetzen in das Durchflutungsgesetz liefert

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon \operatorname{rot} \vec{A}) + \vec{J} \quad (12.15)$$

Die Integration von (12.15) ergibt

$$\vec{H} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} + \vec{M} + \operatorname{grad} \Phi, \quad (12.16)$$

wobei $\operatorname{grad} \Phi$ wiederum eine frei wählbare Integrationskonstante ist und $\vec{M}$ sich aus der Beziehung $\operatorname{rot} \vec{M} = \vec{J}$ berechnen läßt. Das Einsetzen von (12.16) in (12.14) liefert die Beziehung

$$\nabla^2 \vec{A} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} - \mu \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \Phi = \mu \frac{\partial}{\partial t} \vec{M} \quad (12.17)$$

Mit der **Lorentz-Eichung**

$$\operatorname{div} \vec{A} \stackrel{\text{def}}{=} -\mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (12.18)$$

geht (12.17) in die inhomogene vektorielle Wellengleichung über:

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} = \mu \frac{\partial}{\partial t} \vec{M}} \quad (12.19)$$

Bei vorgegebener Stromverteilung muß zunächst ein Vektorfeld $\vec{M}$ berechnet werden, das der Beziehung $\operatorname{rot} \vec{M} = \vec{J}$ genügt. Dann läßt sich das Vektorpotential $\vec{A}$ aus der Wellengleichung (12.19) bestimmen.

Anschließend kann die elektrische Feldstärke aus dem Ansatz (12.13) bestimmt werden. Die Divergenzbildung auf beiden Seiten von (12.16) liefert unter Berücksichtigung der Lorentz-Konvention eine Bestimmungsgleichung für Φ :

$$\boxed{\nabla^2 \Phi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi = -\operatorname{div} \vec{M}} \quad (12.20)$$

so daß anschließend auch die magnetische Feldstärke gemäß (12.16) berechnet werden kann.

12.1.3 Kugelwellen

Nun werde ein Gebiet ohne Quellen betrachtet. Dann gilt $\vec{J} = \vec{M} = 0$ und für beide Vektorpotentialansätze ergibt sich die homogene vektorielle Wellengleichung

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (12.21)$$

Der Vektor $\vec{A}$ kann im allgemeinen eine beliebige Richtung besitzen. Eine besonders einfache Differentialgleichung erhält man, wenn man für das Vektorpotential den folgenden Ansatz macht: $\vec{A} = A(\vec{r}) \cdot \vec{e}_z$ (vgl. Kapitel 7). Dann geht die vektorielle Wellengleichung in die skalare Wellengleichung, auch Helmholtz-Gleichung, über in

$$\nabla^2 A - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0. \quad (12.22)$$

Wir wollen nun die einfachste Form von Kugelwellen mit

$$\frac{\partial A}{\partial \vartheta} = \frac{\partial A}{\partial \varphi} = 0$$

betrachten. Für den ∇^2 -Operator gilt dann in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned}\nabla^2 A &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial A}{\partial r} \right) \\ &= \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial A}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rA)}{\partial r^2}\end{aligned}\quad (12.23)$$

Das Einsetzen in die Helmholtz-Gleichung und Multiplikation mit r liefert

$$\frac{\partial^2 (rA)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (rA)}{\partial t^2} = 0 \quad (12.24)$$

mit $c^2 = 1/(\mu\varepsilon)$. Diese Gleichung hat die gleiche Form wie Gleichung (6.22) aus Abschnitt 6.1.1 (Ebene Wellen im Isolator). Daher kann der Lösungsansatz von d'Alembert verwendet werden (vgl. Kapitel 6.1.1). Es ergibt sich die allgemeine Lösung

$$A(r) = \frac{1}{r} \left[f_1 \left(t - \frac{r}{c} \right) + f_2 \left(t + \frac{r}{c} \right) \right]. \quad (12.25)$$

f_1 stellt eine Kugelwelle dar, die sich mit der Phasengeschwindigkeit c ausbreitet; ihre Amplitude nimmt mit $1/r$ ab. f_2 hingegen repräsentiert eine einlaufende, „sich zusammenziehende“ Welle.

Anders ausgedrückt: f_1 beschreibt eine Wirkung, die vom Ursprung $r = 0$ ausgeht, zu einem Punkt im Abstand r vom Ursprung mit Lichtgeschwindigkeit läuft und dort nach der Zeit

$$t = \frac{r}{c}$$

eintrifft. Man nennt f_1 daher auch **retardierte** (verzögerte) **Lösung**.

f_2 dagegen kann nicht durch Vorgänge am Ursprung verursacht sein, da die Wirkung bereits vor der Ursachr vorhanden wäre (nämlich zur Zeit $t = -r/c$). f_2 wird auch **avancierte Lösung** genannt. Sie widerspricht dem Kausalitätsprinzip, ist daher unphysikalisch und kann nicht berücksichtigt werden. Nur f_1 ist physikalisch. Es wird also zusätzlich die sogenannte **Ausstrahlungsbedingung** verlangt.

12.1.4 Analogien zwischen statischen und retardierten Potentialen

Die Potentialgleichung der Elektrostatik lautet:

$$\nabla^2 \Phi(\vec{r}_0) = -\frac{q_v(\vec{r}_0)}{\varepsilon}$$

mit der Lösung

$$\Phi(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{q_v(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} dV$$

In der Magnetostatik ergibt sich für das Vektorpotential

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}_0) = -\vec{J}(\vec{r}_0)$$

mit der Lösung

$$\vec{A}(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} dV$$

Die Wellengleichung der Elektrodynamik lautet:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi_{ret}(\vec{r}_0, t) = -\frac{q_v(r_0, t)}{\varepsilon}$$

mit der Lösung

$$\Phi_{ret}(\vec{r}_0, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{q_v\left(\vec{r}, t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} dV$$

In der Elektrodynamik ergibt sich für das Vektorpotential

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A}_{ret}(\vec{r}_0, t) = -\vec{J}(\vec{r}_0, t)$$

mit der Lösung

$$\vec{A}_{ret}(\vec{r}_0, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}\left(\vec{r}, t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} dV$$

Bei Φ_{ret} und $\vec{A}_{ret}$ handelt es sich um sogenannte retardierte Potentiale. Im dynamischen Fall werden Φ_{ret} und $\vec{A}_{ret}$ aus den Quellen berechnet, die sich um die Laufzeit $|\vec{r} - \vec{r}_0|/c$ früher als im Integrationszeitpunkt am Quellpunkt befanden. Die Ursache der retardierten Potentiale sind also die Quellen zum Zeitpunkt

$$t_0 = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{c}.$$

Anmerkung: Die Analogien zwischen dem statischen und dynamischen Fall gelten nur für die Potentiale Φ und $\vec{A}$. Dagegen ist es nicht möglich, eine elektromagnetische Welle aus retardierten statischen bzw. magnetischen Feldern zu berechnen.

12.2 Elementardipole

Für das folgende wird harmonische Zeitabhängigkeit angenommen:

$$\vec{E}, \vec{H}, \vec{J}, \vec{M} \sim \cos \omega t$$

In komplexer Schreibweise

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ \underline{\vec{E}}(\vec{r}) e^{j\omega t} \right\}$$

ergibt sich für das komplexe retardierte Vektorpotential

$$\vec{A}_{ret}(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\underline{\vec{J}}(\vec{r}) e^{-jk|\vec{r} - \vec{r}_0|}}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} dV \quad (12.26)$$

mit $k = \frac{\omega}{c} = \omega \sqrt{\mu\varepsilon}$.

12.2.1 Elektrischer Elementardipol (Dipolantenne)

Ein elektrischer Elementardipol, der im Ursprung des Koordinatensystems liegt, zeitliche Schwingungen ausführt und der in z -Richtung orientiert ist, wird durch die Stromdichte

$$\vec{J}(\vec{r}) = \underline{I}_e dz \delta(\vec{r}) \vec{e}_z \quad (12.27)$$

erzeugt. Damit gilt für das retardierte Vektorpotential

$$\vec{A}_{ret}(\vec{r}) = \underline{A} \vec{e}_z = \frac{\underline{I}_e dz}{4\pi r} e^{-jkr} \quad (12.28)$$

$$= \underline{C}_E \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (12.29)$$

$$\text{mit } \underline{C}_E = \frac{\underline{I}_e dz}{4\pi}$$

Zur Berechnung der einzelnen Feldkomponenten wird das Vektorpotential in Kugelkoordinaten

$$\underline{A}_r = \underline{A} \cos \vartheta \quad (12.30)$$

$$\underline{A}_\vartheta = -\underline{A} \sin \vartheta \quad (12.31)$$

$$\underline{A}_\varphi = 0 \quad (12.32)$$

dargestellt. Für einen elektrischen Elementardipol ist der Ansatz

$$\vec{H} = \text{rot} \vec{A} \quad (\text{E-Wellen})$$

geeignet. Damit ergibt sich für die einzelnen magnetischen Feldkomponenten

$$\left. \begin{aligned} \underline{H}_r &= 0 \\ \underline{H}_\vartheta &= 0 \\ \underline{H}_\varphi &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r \underline{A}_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial \underline{A}_r}{\partial \vartheta} \right) \\ &= j \underline{C}_E k \sin \vartheta \frac{e^{-jkr}}{r} \left(1 + \frac{1}{jkr} \right) \end{aligned} \right\} \quad (12.33)$$

Außerhalb von Quellen ist das elektrische Feld durch die Maxwell-Gleichung $j\omega\varepsilon \vec{E} = \text{rot} \vec{H}$ gegeben, woraus folgt:

$$\left. \begin{aligned} \underline{E}_r &= \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial(\underline{H}_\varphi \sin \vartheta)}{\partial \vartheta} \\ &= -\frac{2\underline{C}_E k^2}{j\omega\varepsilon} \cos \vartheta \frac{e^{-jkr}}{r} \left[\frac{1}{jkr} + \left(\frac{1}{jkr} \right)^2 \right] \\ \underline{E}_\vartheta &= -\frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial(r \underline{H}_\varphi)}{\partial r} \\ &= -\frac{\underline{C}_E k^2}{j\omega\varepsilon} \sin \vartheta \frac{e^{-jkr}}{r} \left[1 + \frac{1}{jkr} + \left(\frac{1}{jkr} \right)^2 \right] \\ \underline{E}_\varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12.34)$$

Mit $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ und $\underline{C}_e \stackrel{\text{def}}{=} jk\underline{C}_E$ ergibt sich für das Feld eines elektrischen Elementardipols

$$\begin{aligned}
 \underline{E}_\varphi &= \underline{H}_r = \underline{H}_\vartheta = 0 \\
 \underline{H}_\varphi &= \underline{C}_e \sin \vartheta \frac{e^{-jkr}}{r} \left(1 + \frac{1}{jkr} \right) \\
 \underline{E}_r &= 2\underline{C}_e Z \cos \vartheta \frac{e^{-jkr}}{r} \left[\frac{1}{jkr} + \left(\frac{1}{jkr} \right)^2 \right] \\
 \underline{E}_\vartheta &= \underline{C}_e Z \sin \vartheta \frac{e^{-jkr}}{r} \left[1 + \frac{1}{jkr} + \left(\frac{1}{jkr} \right)^2 \right]
 \end{aligned} \tag{12.35}$$

Ein einfaches Beispiel für einen elektrischen Dipolstrahler ist folgende Linearantenne mit symmetrischer Speisung, welche in Abb. 12.1 dargestellt ist. Die Länge d sei vernachlässigbar klein

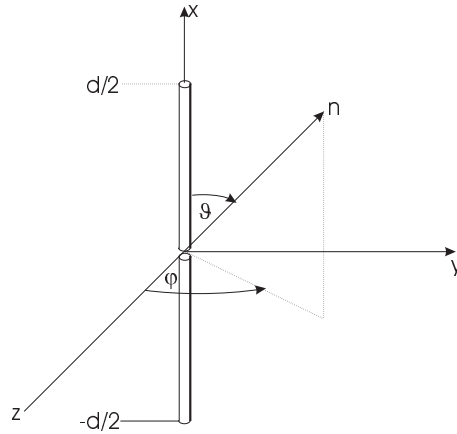


Abbildung 12.1: Linearantenne mit symmetrischer Speisung.

gegenüber der Wellenlänge. Die Speisung erfolge im Mittelpunkt der Antenne bei $z = 0$ und der Strom fließe in den beiden Antennenarmen vom Mittelpunkt aus jeweils zu den äußeren Enden.

Einige Felddbilder zum elektrischen Elementardipol (Hertzschen Dipol) sind in Abb. 12.2 aufgezeigt. Die elektrischen Feldlinien liegen in den Meridianebenen $\varphi = \text{const.}$ Die magnetischen Feldlinien sind Kreise um die z -Achse ($\underline{H} = (0, 0, \underline{H}_\varphi)$; rein azimuthal).

Dipolantennen werden für Kurz-, Ultrakurz- und Dezimeterwellen einzeln oder in Gruppen verwendet.

Das unter der Internetadresse <http://www.tu-darmstadt.de/fb/et/temf/Demos/dipol.html> erreichbare MPEG-File vermittelt den Eindruck eines kontinuierlich abstrahlenden Dipols.

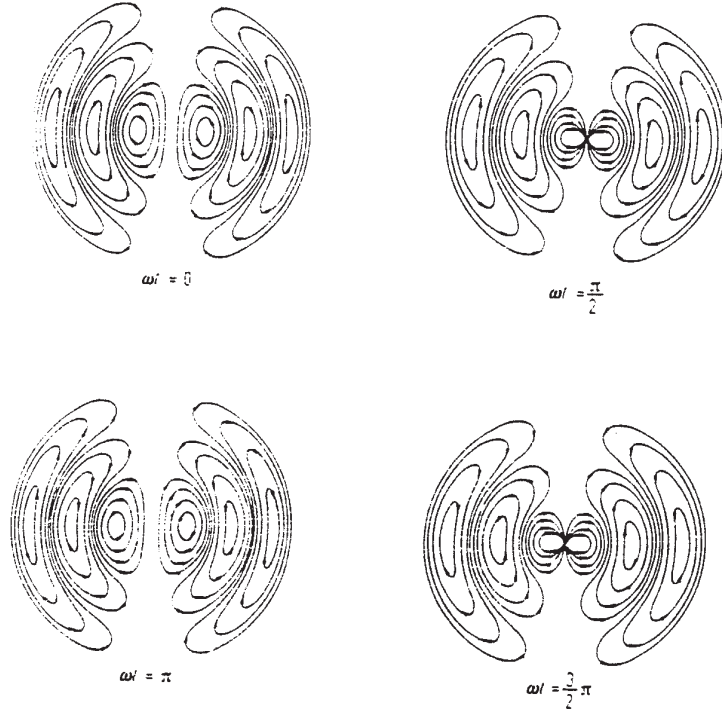


Abbildung 12.2: Felddbilder zum elektrischen Elementardipol.

12.2.2 Magnetischer Elementardipol (Rahmenantenne)

Analog zum elektrischen Elementardipol wird ein magnetischer Elementardipol, der im Ursprung des Koordinatensystems liegt, elektromagnetische Wellen abstrahlt und dessen Achse parallel zur z -Achse liegt, durch eine magnetische Stromdichte

$$\mu \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = \underline{I}_m dz \delta(\vec{r}) \vec{e}_z \quad (12.36)$$

erzeugt. Für das retardierte Vektorpotential folgt:

$$\begin{aligned} \underline{A}(\vec{r}) &= \underline{C}_M \frac{e^{-jkr}}{r} \\ \text{mit } \underline{C}_M &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\underline{I}_m dz}{4\pi} \end{aligned} \quad (12.37)$$

Der geeignete Ansatz für das Vektorpotential des magnetischen Elementardipols ist

$$\underline{\vec{E}} = \text{rot} \vec{A} \quad (\text{H-Wellen})$$

Bei der Darstellung in Kugelkoordinaten gemäß (12.30)-(12.32) ergeben sich die elektrischen Feldkomponenten

$$\left. \begin{aligned} \underline{E}_r &= 0 \\ \underline{E}_\vartheta &= 0 \\ \underline{E}_\varphi &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r\underline{A}_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial\underline{A}_r}{\partial \vartheta} \right) \\ &= j\underline{C}_M k \sin \vartheta \frac{e^{-jkr}}{r} \left(1 + \frac{1}{jkr} \right) \end{aligned} \right\} \quad (12.38)$$

Aus der Maxwellschen Gleichung $j\omega\mu\underline{\vec{H}} = -\text{rot}\underline{\vec{E}}$ kann das Magnetfeld berechnet werden:

$$\left. \begin{aligned} \underline{H}_r &= -\frac{1}{j\omega\mu} \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial(\underline{E}_\varphi \sin \vartheta)}{\partial \vartheta} \\ &= \frac{2\underline{C}_M k^2}{j\omega\mu} \cos \vartheta \frac{e^{-jkr}}{r} \left[\frac{1}{jkr} + \left(\frac{1}{jkr} \right)^2 \right] \\ \underline{H}_\vartheta &= \frac{1}{j\omega\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial(r\underline{E}_\varphi)}{\partial r} \\ &= \frac{\underline{C}_M k^2}{j\omega\mu} \sin \vartheta \frac{e^{-jkr}}{r} \left[1 + \frac{1}{jkr} + \left(\frac{1}{jkr} \right)^2 \right] \\ \underline{H}_\varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12.39)$$

Mit $1/Y = \sqrt{\mu/\varepsilon} = Z$ und $\underline{C}_m \stackrel{\text{def}}{=} jk\underline{C}_M$ ergibt sich das Feld eines magnetischen Elementardipols zu:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{H}_\varphi &= \underline{E}_r = \underline{E}_\vartheta = 0 \\ \underline{E}_\varphi &= \underline{C}_m \sin \vartheta \frac{e^{-jkr}}{r} \left(1 + \frac{1}{jkr} \right) \\ \underline{H}_r &= -2\underline{C}_m Y \cos \vartheta \frac{e^{-jkr}}{r} \left[\frac{1}{jkr} + \left(\frac{1}{jkr} \right)^2 \right] \\ \underline{H}_\vartheta &= -\underline{C}_m Y \sin \vartheta \frac{e^{-jkr}}{r} \left[1 + \frac{1}{jkr} + \left(\frac{1}{jkr} \right)^2 \right] \end{aligned}} \quad (12.40)$$

Rahmenantennen eignen sich für den Rundfunkempfang der Mittel- und Langwellen und für den Peilempfang.

12.2.3 Nahfeld-Näherung

Im Nahfeld eines Elementardipols gilt

$$|kr| \ll 1$$

und damit auch

$$e^{-jkr} \approx 1$$

aus (12.35) und (12.40) ergibt sich dann für die Nahfelder

elektrischer Dipol	magnetischer Dipol
$\underline{E}_\varphi = \underline{H}_r = \underline{H}_\vartheta = 0$	$\underline{H}_\varphi = \underline{E}_r = \underline{E}_\vartheta = 0$
$\underline{H}_\varphi = -j\underline{C}_e \sin \vartheta \frac{1}{kr^2}$	$\underline{E}_\varphi = -j\underline{C}_m \sin \vartheta \frac{1}{kr^2}$
$\underline{E}_r = -2\underline{C}_e Z \cos \vartheta \frac{1}{k^2 r^3}$	$\underline{H}_r = 2\underline{C}_m Y \cos \vartheta \frac{1}{k^2 r^3}$
$\underline{E}_\vartheta = -\underline{C}_e Z \sin \vartheta \frac{1}{k^2 r^3}$	$\underline{H}_\vartheta = \underline{C}_m Y \sin \vartheta \frac{1}{k^2 r^3}$

12.2.4 Fernfeld-Näherung

Wenn der Abstand zum Elementardipol genügend groß ist

$$|kr| \gg 1$$

ergibt sich aus (12.35) und (12.40) folgende Näherung:

elektrischer Dipol	magnetischer Dipol
$\underline{E}_\varphi = \underline{H}_r = \underline{H}_\vartheta = 0$	$\underline{H}_\varphi = \underline{E}_r = \underline{E}_\vartheta = 0$
$\underline{H}_\varphi = \underline{C}_e \sin \vartheta \frac{e^{-jkr}}{r}$	$\underline{E}_\varphi = \underline{C}_m \sin \vartheta \frac{e^{-jkr}}{r}$
$\underline{E}_r = -2j\underline{C}_e Z \cos \vartheta \frac{e^{-jkr}}{kr^2}$	$\underline{H}_r = 2j\underline{C}_m Y \cos \vartheta \frac{e^{-jkr}}{kr^2}$
$\underline{E}_\vartheta = \underline{C}_e Z \sin \vartheta \frac{e^{-jkr}}{r}$	$\underline{H}_\vartheta = -\underline{C}_m Y \sin \vartheta \frac{e^{-jkr}}{r^2}$

Die Amplituden der radialen Feldkomponenten klingen mit $1/r^2$ ab und die Amplituden der zur Ausbreitungsrichtung (r -Richtung) transversalen Feldkomponenten klingen nur mit $1/r$ ab. Dies bedeutet, daß die radialen Feldkomponenten in genügend großem Abstand abgeklungen sind und die Welle dort nur noch transversale Komponenten in Ausbreitungsrichtung $\vec{e}_r$ besitzt, wobei das elektrische Feld senkrecht auf dem magnetischen steht. Zwischen den elektrischen und magnetischen Feldkomponenten gelten dann die Beziehungen

$$\underline{E}_\vartheta = Z \underline{H}_\varphi \quad \text{und} \quad \underline{E}_\varphi = -Z \underline{H}_\vartheta \quad (12.41)$$

Im Fernfeld bilden die Feldkomponenten eine Kugelwelle, deren Phasenfronten sich mit der Geschwindigkeit $v_p = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ radial nach außen bewegen und deren Amplitude mit $1/r$ abklingt. Das Fernfeld der Elementardipole verhält sich also **lokal** wie das Feld einer homogenen ebenen Welle.

12.3 Richtcharakteristik

Das Fernfeld jeder Strahlungsanordnung bildet lokal eine homogene ebene Welle. Sein Poynting-Vektor zeigt vom Zentrum der Antenne in radialer Richtung nach außen und ist reell. Das Fernfeld transportiert also nur Wirkleistung und zwar in radialer Richtung.

Der Betrag des Poynting-Vektors, also die **Strahlungsdichte**, nimmt mit $1/r^2$ ab (r =Abstand von der Antenne). Praktische Antennenanordnungen strahlen die Energie nicht gleichmäßig in alle Richtungen aus. Die **Richtcharakteristik** vermittelt die Strahlungsverteilung einer Antenne in die verschiedenen Raumrichtungen. Zur Bestimmung der Richtcharakteristik wird das absolute Maximum der Strahlungsdichte

$$\max \{S_r(\vartheta, \varphi)\} = \max \left\{ |\vec{E} \times \vec{H}^*| \right\} \stackrel{\text{def}}{=} S_{r \max}$$

gesucht, welches im allgemeinen nur in einer Raumrichtung, d. h. für ganz bestimmte Werte von ϑ und φ auftritt. Zu diesem Maximum $S_{r\max}$ setzt man die Strahlungsdichte in allen anderen Richtungen ins Verhältnis und trägt dieses Verhältnis über ϑ und φ auf. Im allgemeinen werden Polarkoordinaten verwendet und $S_r(\vartheta, \varphi)/S_{r\max}$ entweder für $\vartheta = \text{const.} = \pi/2$ als Radius über φ als Winkel im sogenannten **Richtdiagramm** aufgetragen (horizontales Diagramm) oder für $\varphi = \text{const.}$ über den Winkel ϑ (vertikales Diagramm). Um einen größeren Wertebereich der Strahlungsdichte S_r zu erfassen, kann $S_r(\vartheta, \varphi)/S_{r\max}$ auch in Dezibel logarithmisch aufgetragen werden. Oft wird im Richtdiagramm auch die Feldstärke anstatt der Strahlungsdichte aufgetragen.

Das Fernfeld einer Antennenanordnung ergibt sich aus dem Vektorpotential der gesamten Anordnung, welches sich wiederum durch Aufsummieren der Wirkung der einzelnen Elementardipole ergibt. Falls die Achsen der Elementardipole nicht parallel zueinander sind, wird das resultierende Feld aus dem Vektorpotential berechnet, das sich nach einer vektoriellen Summation der Vektorpotentiale der einzelnen Elementardipole ergibt.

12.3.1 Beispiele

12.3.1.1 Elektrischer Elementardipol

Da die Anordnung bei einem elektrischen Elementardipol unabhängig von der φ -Koordinate ist, besitzt $\vec{E}$ für $\vartheta = \pi/2$ überall die gleiche Amplitude und das horizontale Richtdiagramm zeigt folgende Richtwirkung: In Richtung der Dipolachse ($\vartheta = 0, \pi$) tritt keine Strahlung auf. Senkrecht zur Dipolachse ($\vartheta = \pi/2$) ist die Strahlung am größten ($\rightarrow$ Abb. 12.3).

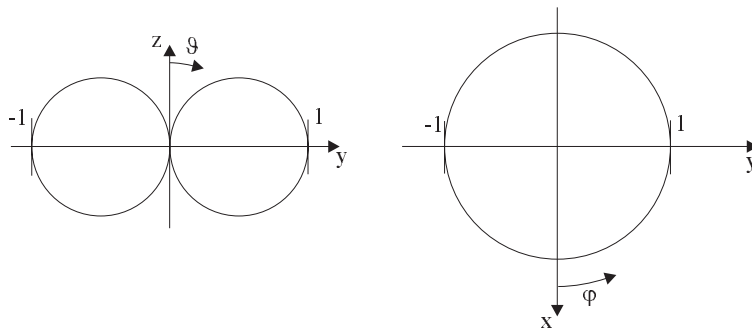
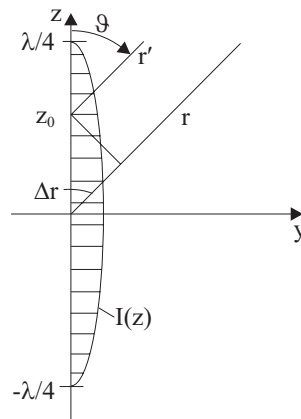
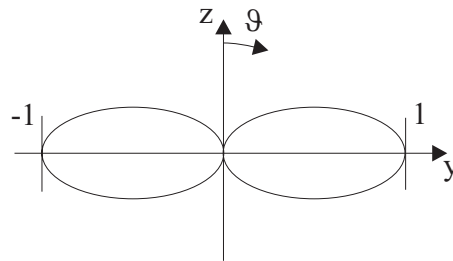


Abbildung 12.3: Vertikal- und Horizontaldiagramm eines elektrischen Elementardipols.

12.3.1.2 Elektrischer $\lambda/2$ -Dipol

Wegen der Rotationssymmetrie liefert das Horizontaldiagramm nach wie vor einen Kreis. Das vertikale Richtdiagramm ist nicht mehr jeweils kreisförmig, sondern zeigt eine bessere Bündelung als der elektrische Elementardipol ($\rightarrow$ Abb. 12.4 und 12.5).

Abbildung 12.4: Elektrischer $\lambda/2$ -Dipol.Abbildung 12.5: Vertikal- und Horizontaldiagramm eines elektrischen $\lambda/2$ -Dipols.

12.3.1.3 Gruppenstrahler

Die lineare Antenne, ebenso wie die aus ihr abgeleiteten Breitbandantennen und auch die Rahmenantenne haben alle eine Symmetrieachse und darum auch eine rotationssymmetrische Strahlungscharakteristik, weshalb sie zur Klasse der **Rundstrahler** zusammengefaßt werden.

Die Rundstrahler besitzen eine Richtcharakteristik, die ausschließlich vom Winkel ϑ zur Symmetrieachse abhängt. Um auch in Abhängigkeit vom Umfangswinkel φ eine Richtcharakteristik zu erhalten, werden oft mehrere lineare Antennen, wie z. B. $\lambda/2$ -Dipole, in bestimmten Abständen und Orientierungen zueinander angeordnet. Solche Kombinationen von einzelnen Strahlern in Gruppen werden **Gruppenstrahler** genannt. Das Feld der Einzelstrahler addiert sich dabei in den Richtungen, in denen es zeitlich in Phase schwingt, während es sich in anderen Richtungen durch **destruktive Interferenz** auslöscht.

Als einfaches Beispiel, aus dem praktische Richtantennen entwickelt werden können, werden zwei $\lambda/2$ -Dipole betrachtet, die den **Abstand** $\lambda/4$ voneinander haben und um 90° gegeneinander **phasenverschoben** mit gleicher Stromstärke $|I_0|$ angeregt werden ($\rightarrow$ Abb. 12.6). In Richtung $\varphi = 0$ kommt es zu konstruktiver Interferenz, bei $\varphi = \pi$ strahlt die Dipolgruppe überhaupt nicht (destruktive Interferenz) ($\rightarrow$ Abb. 12.7).

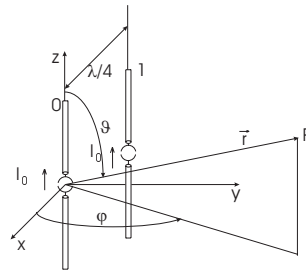


Abbildung 12.6: Guppenstrahler aus parallelen $\lambda/2$ -Dipolen im Abstand $\lambda/4$ mit 90° Phasenverschiebung der Erregung.

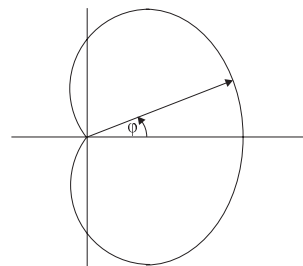


Abbildung 12.7: Richtdiagramm der beiden Dipole in Abb. 12.6 in der Ebene $\vartheta = \pi/2$.

12.3.1.4 Drahtantennen mit Wanderwellen

Bisher wurden lineare Drahtantennen (z. B. Dipolantennen) betrachtet, auf denen die Ströme nahezu sinusförmig verteilt sind, die also mit überwiegend **stehenden Wellen** angeregt werden. Es gibt auch Drahtantennen, die ein Strahlungsfeld mit **laufenden Wellen** erzeugen. Das einfachste Beispiel ist die sogenannte **Langdrahtantenne**. Sie besteht aus einem horizontalen Draht, der zusammen mit der Erdoberfläche eine Doppelleitung bildet. Am Ende wird diese Doppelleitung

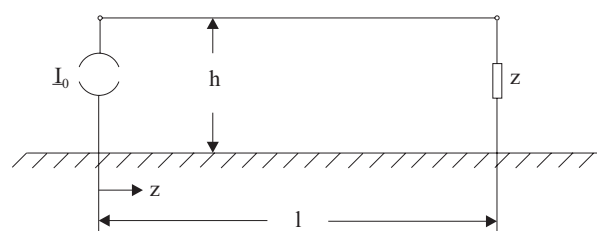


Abbildung 12.8: Langdrahtantenne.

mit ihrem Wellenwiderstand reflektionsfrei abgeschlossen und am Anfang gespeist, so daß eine Welle der Stromverteilung

$$\underline{I}(z) = \underline{I}_0 e^{-jkz}$$

vom Anfang zum Ende läuft.

Die Hauptanwendung finden Langdrahtantennen heutzutage für Kurzwellen. Hier werden sie in $\lambda/2$ bis λ Höhe über dem Erdboden aufgespannt. Die Richtcharakteristik ist in Abb. 12.9 dargestellt.

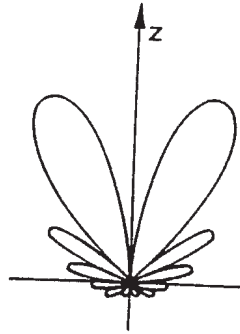


Abbildung 12.9: Richtcharakteristik einer Langdrahtantenne mit $l = 3\lambda$ im freien Raum.

12.3.1.5 V-Antennen

Bei den V-Antennen sind zwei Langdrahtantennen in der Horizontalen unter einem Winkel $\alpha = 2\vartheta_1$ gegeneinander aufgespannt und im Gegentakt erregt. Die Richtdiagramme der beiden Antennenarme überlagern sich zu einer Gesamtcharakteristik mit scharfer Bündelung und höherem Gewinn ($\rightarrow$ Abb. 12.10). Noch weiter steigern läßt sich die Richtwirkung mit den Rhombusantennen.

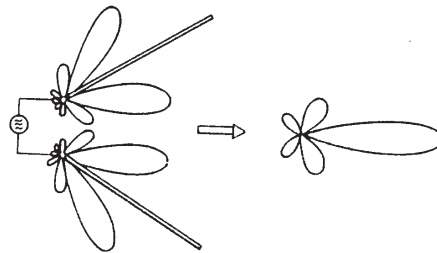


Abbildung 12.10: V-Antenne mit Überlagerung der Einzeldiagramme zu einer Gesamtcharakteristik mit Hauptkeule.

12.4 Das Äquivalenztheorem und die Abstrahlung vom Hohlleiter

Bei den linearen Antennen mit Stehwellen und den Drahtantennen mit Wanderwellen sowie bei den Gruppenstrahlern, die sich mit ihnen bilden lassen, wurden als Strahlungsquellen die **Ströme auf den Leitern** angesehen. Dies ist aber nur eine **Hilfsvorstellung**, um die Berechnung der Strahlungsfelder zu ermöglichen. Die eigentliche Quelle der Strahlung bilden nicht die Leiter – in ihnen breitet sich gar keine Energie aus. Die Energie wandert vielmehr im Dielektrikum zwischen und um den Leiter; nur hier kann nämlich der Poynting-Vektor berechnet werden.

Alle Drahtantennen stellen lediglich Führungs- und Transformationselemente dar, die die Energie aus dem Dielektrikum der Speiseleitung (z. B. Koaxialleitung) in das jeweils gewünschte Strahlungsfeld überleiten. Die **eigentliche Strahlungsquelle** ist immer die **Öffnung der Speiseleitung** zur Antenne.

Dabei besteht auch die Möglichkeit, direkt mit der Öffnung der Speiseleitung ohne Fortsetzung von Leiterstäben in den Raum als Antenne zu arbeiten. Dazu muß diese Öffnung nur eine geeig-

nete Form haben. Prinzipiell werden die Wellen umso leichter abgestrahlt, je größer die Öffnung ist. Wenn beispielsweise das Ende eines Rechteckhohlleiters hornförmig erweitert wird, so wird die einfallende Hohlleiterwelle nahezu ohne Reflektion abgestrahlt. Dazu muß das Horn sich nur genügend allmählich öffnen und seine Apertur größer als einige Wellenlängen sein ($\rightarrow$ Abb. 12.11).

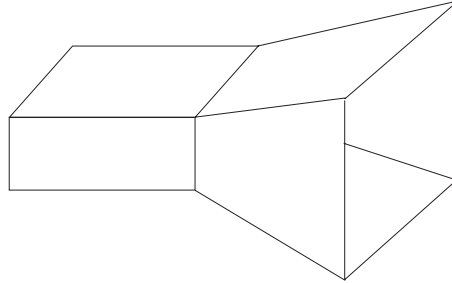


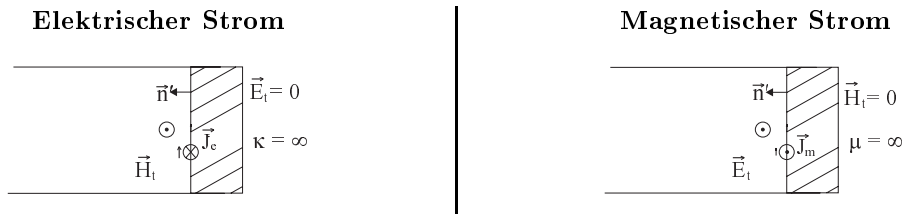
Abbildung 12.11: Rechteckhornstrahler.

12.4.1 Das Äquivalenztheorem

Zur Berechnung der Abstrahlung von Hohlleitern ist es erforderlich, die Stromverteilung in der Apertur (Öffnung des Hohlleiters) zu kennen.

Zur näherungsweisen Berechnung wird angenommen, daß es sich dabei um eine offene Leitung handelt. Da an den Enden einer offenen Leitung das tangential magnetische Feld Null ist, wird der Hohlleiter in der Apertur durch eine Scheibe mit unendlich guter Permeabilität abgeschlossen.

Analog zum elektrischen Strom $\vec{J}_e$ wird nun ein magnetischer Strom $\vec{J}_m$ eingeführt.



Leitung, die durch eine unendlich gut elektrisch leitende Scheibe (Scheibe unendlich hoher Permeabilität) abgeschlossen ist.

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J}_e + j\omega\epsilon \vec{E}$$

Bei einem Abschluß mit endlich guter elektrischer Leitfähigkeit (guter Permeabilität) entsteht ein elektrischer Oberflächenstrom

$$\vec{J}_e = \vec{n}' \times \vec{H}_t$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\vec{J}_m - j\omega\mu \vec{H}$$

magnetischer Oberflächenstrom

$$\vec{J}_m = -\vec{n}' \times \vec{E}_t$$

Eine Scheibe mit unendlich guter Permeabilität bewirkt zum einen, daß das magnetische Feld innerhalb des Hohlleiters dem Feld einer offenen Leitung entspricht, denn in der Apertur existiert nur ein transversales elektrisches Feld, und zum anderen, daß das Feld außerhalb Null ist, denn der Hohlleiter ist komplett abgeschlossen. Bei Vernachlässigung von Reflexion und Randstreuung hebt die Scheibe das Strahlungsfeld der offenen Leitung gerade auf. Sie erzeugt im Außenraum ein betragsmäßig gleiches aber entgegengesetzt gerichtetes Feld als das der offenen Leitung. Hieraus folgt das **Äquivalenztheorem**:

Die Abstrahlung von einer offenen Leitung kann aus dem magnetischen Strombelag einer Scheibe mit unendlich guter Permeabilität berechnet werden. Dabei ist der Strombelag auf der Scheibe genau gleich aber entgegengesetzt gerichtet zum Strombelag, der

sich in der Scheibe bei Abschluß der Leitung ergibt. Das Ende der offenen Leitung kann also durch äquivalente Ströme nachgebildet werden.

Da es sich beim Äquivalenztheorem um ein Näherungsverfahren handelt, treten einige Fehler auf:

1. Da **keine Reflexion** berücksichtigt wird, liefert das Äquivalenztheorem **quantitativ** falsche Ergebnisse.
2. Da **keine Randstreuung** berücksichtigt wird, entspricht die berechnete Stromverteilung in der Apertur nicht der exakten Stromverteilung, so daß hier auch ein **qualitativer Fehler** besteht.

Dieser qualitative Fehler fällt aber nicht ins Gewicht, da in der Regel nur die Richtcharakteristik und damit nur das Fernfeld interessiert. In einigen Fällen ist das Äquivalenztheorem daher trotz Vernachlässigung der Randstreuung eine **gute Näherung**.

12.4.2 Abstrahlung vom Hohlleiter

Wir betrachten die Abstrahlung der H_{y01} -Welle, die sich im Rechteckhohlleiter in y -Richtung ausbreitet mit Hilfe des Äquivalenztheorems ($\rightarrow$ Abb. 12.12).

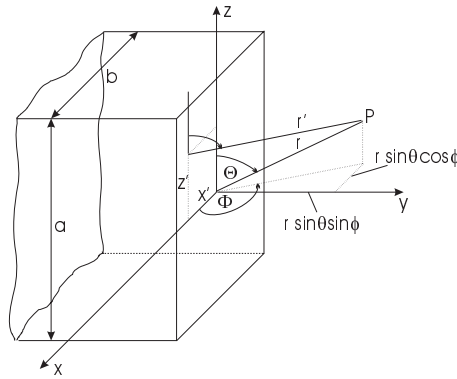


Abbildung 12.12: H_{y01} -Welle im Rechteckhohlleiter mit Ausbreitung in y -Richtung.

Das Vektorpotential lautet

$$\underline{A}_y = \underline{C} \sin\left(\frac{\pi}{a}z\right) e^{\pm jk_y y}.$$

Für das elektrische Feld ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \underline{E}_x &= -C \frac{\pi}{a} \cos\left(\frac{\pi}{a}z\right) e^{\pm jk_y y} \\ \underline{E}_y = \underline{E}_z &= 0. \end{aligned}$$

Der Hohlleiter wird nun bei $y = 0$ mit $\mu = \infty$ abgeschlossen. Damit ergibt sich für den magnetischen Oberflächenstrom

$$\begin{aligned} \vec{J}_m &= -\vec{e}_y \times \vec{E}_t \quad \text{für } y = 0 \\ &= -\underline{C} \frac{\pi}{a} \cos\left(\frac{\pi}{a}z\right) \vec{e}_z \\ &= -\underline{E}_1 \cos\left(\frac{\pi}{a}z\right) \vec{e}_z \end{aligned}$$

und den magnetischen Strom

$$d\underline{I}_m = \underline{J}_{mz} dx = -\underline{E}_1 \cos\left(\frac{\pi}{a}z\right) dx$$

Nach Berechnung des Fernfeldes, auf die hier verzichtet wird, ergibt sich

$$|\underline{E}_{\max}| = \frac{|\underline{E}_1|ab}{\pi r\lambda}.$$

Das Maximum tritt bei $\vartheta = \varphi = \pi/2$ auf. Das Strahlungsdiagramm ist somit von der Wellenlänge abhängig. Für das vertikale Richtdiagramm (y - z -Ebene) ergibt sich:

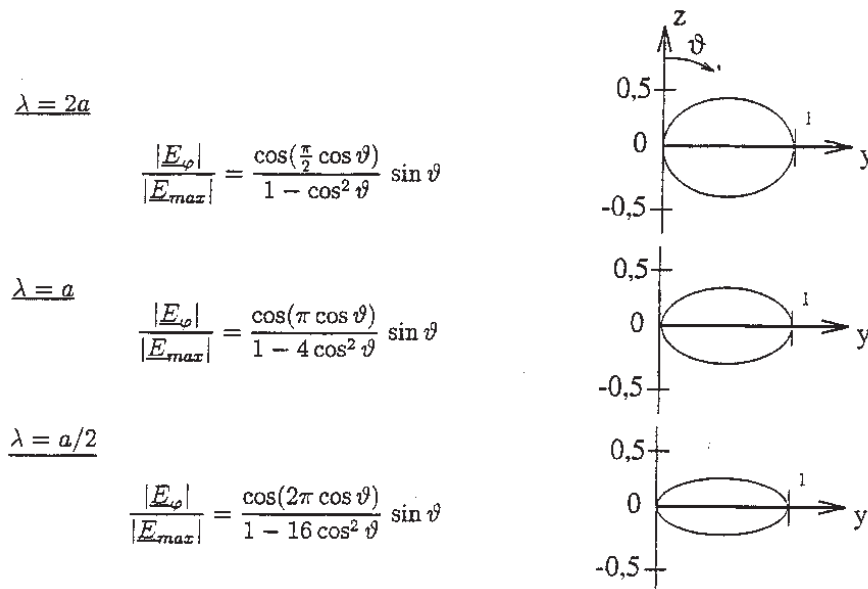


Abbildung 12.13: Vertikale Richtdiagramme (y - z -Ebene) für verschiedene λ .

Offensichtlich wird die Bündelung mit abnehmender Wellenlänge, also zunehmender Frequenz, stärker; jedoch treten Nebenmaxima auf ($\rightarrow$ Abb. 12.13).

Kapitel 13

Numerische Methoden zur Berechnung elektromagnetischer Felder

In der **klassischen Feldtheorie** wird die direkte **analytische Lösung** der aus den Maxwell-Gleichungen abgeleiteten Differentialgleichungen, z. B. der Poisson-Gleichung oder der Wellengleichung behandelt. Eine analytische Lösung ist jedoch nur für stark idealisierte Probleme (z. B. unendlich langer Rundhohlleiter) oder für **Modellprobleme** möglich. Letztere entstehen nach starker Vereinfachung aus realistischen Problemen. Ihre Lösung entfernt sich jedoch mit dem Grad der Vereinfachung immer weiter von der tatsächlichen Lösung.

Deshalb wurden andere Methoden entwickelt, die insbesondere computerorientierte Verfahren umfassen. Wir können **drei prinzipielle Lösungswege** unterscheiden:

1. Analytische Verfahren
 - Potentialansatz
 - Spiegelungsmethode
 - konforme Abbildungen, etc.
2. Semi-analytische Verfahren
 - Orthogonalentwicklung
 - Momentenmethode, etc.
3. Numerische Verfahren
 - Finite-Differenzen-Verfahren
 - Finite-Elemente-Verfahren
 - Finite Integrationstechnik
 - Randelementeverfahren, etc.

Sowohl bei den semi-analytischen als auch bei den numerischen Verfahren gibt es eine Vielzahl verschiedener Ansätze. Auch bei den analytischen Lösungsansätzen ist häufig eine numerische Auswertung notwendig, sobald Werte der Lösungsfunktion bestimmt werden sollen ($\rightarrow$ Tabellenwerke bzw. Rechner). Wir wollen unter einer analytischen Methode eine solche verstehen, die eine exakte Lösung der Maxwell-Gleichungen findet, welche sich explizit angeben lässt, aber nicht notwendigerweise direkt auswertbar ist. **Analytische Lösungen** haben folgende Vorteile:

Sie sind

- differenzierbar
- evtl. integrierbar
- geeignet für Parameterstudien.

Ein unendlich langer Rundhohlleiter ist analytisch lösbar, aber sobald ein Sprung in diesem Rundhohlleiter auftritt ($\rightarrow$ Abb. 13.1), führt der analytische Ansatz auf unendliche Reihen und lineare Gleichungssysteme unendlich großer Dimension.

Nach Begrenzung auf eine endliche, aber in der Regel große Dimension können die Gleichungssysteme näherungsweise numerisch gelöst werden (beachte die zweifache Näherung!). Für bestimmte Problemklassen lassen sich so sehr genaue Lösungen bestimmen, wobei die Programme sich je auf bestimmte Problemtypen beschränken, bei denen die gegebene Anordnung sich auf wenige Teilprobleme einfacher Geometrie (z. B. Rundhohlleiter) reduzieren lassen ($\rightarrow$ weitere Näherung!). Dies sind **semi-analytische Lösungen**. Die (rein) **numerischen Verfahren** stellen in ihrem Ansatz keine speziellen Anforderungen an die Geometrie der Anordnungen. Die zugehörigen Programme zeichnen sich durch ihre allgemeine Anwendbarkeit aus.

Wie viele andere numerische Methoden gehen die **Finiten-Differenzen-Verfahren (FD)** von Differentialgleichungen aus (z. B. der Poisson-Gleichung) und ersetzen dann die Differentialform durch Differenzenquotienten, die nur an endlich vielen Stellen des Problemgebiets ausgewertet werden.

Die **Finite-Elemente-Methoden (FEM)** wurden ursprünglich für den Flugzeugbau entwickelt, wobei ein Bauteil gedanklich durch ein idealisiertes Modell aus finiten Elementen ersetzt wird, d. h. aus einfachen Bauelementen (Stäben, Tetraedern, ...), deren elastisches Verhalten mathematisch formulierbar ist. Im allgemeinen wird die gesuchte Funktion durch Überlagerung von Basisfunktionen dargestellt, die jeweils nur auf einem Element von Null verschieden sind.

Die **Finite-Integrationstechnik (FIT)** zerlegt den Raum in endlich viele finite Volumen, auf die z. B. die erste Maxwell-Gleichung in Integralform übertragen wird. In Analogie zur Verkopplung (über ihren physikalischen Inhalt) der Maxwellschen Gleichung wird versetzt zur ersten Zerlegung eine zweite Zerlegung in finite Volumen vorgenommen, auf die dann die zweite Maxwellsche Gleichung übertragen wird.

Bei der **Randelementmethode** (Boundary Element Method, **BEM**) wird die Lösung des ursprünglichen Problems auf die Lösung eines Problems auf den Rand des Gebietes zurückgeführt, d. h. es ergibt sich eine Reduktion der Dimension des zu diskretisierenden Gebietes (Querschnitt $\rightarrow$ Kontur ; Volumen $\rightarrow$ Oberfläche), welches in Elemente zerlegt wird.

Für realistische Probleme führen diese Ansätze dann auf sehr große Matrixgleichungen, aus deren Lösungsvektoren die gesuchten Feldwerte an den zuvor definierten Stellen des Rechengebietes abgeleitet werden können. Der Vorteil der Allgemeinheit der numerischen Methoden wird durch den Nachteil des Rechenaufwands zur Lösung der Matrixgleichungen „erkauft“. Mit der Fortentwicklung der Computer fällt dieser Nachteil aber erst bei sehr komplizierten Anordnungen oder ganz speziellen Problemstellungen ins Gewicht.

Ausgangspunkt einer Diskretisierung mit einer der oben genannten numerischen Methoden können die unterschiedlichsten analytischen Formulierungen sein, die uns bereits aus der Feldtheorie bekannt sind. Als wichtigste Ansätze sind folgende zu nennen:

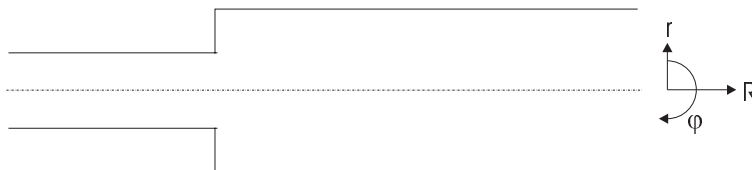


Abbildung 13.1: Sprung in einem Rundhohlleiter.

1. Maxwell-Gleichungen in Integralform
2. Maxwell-Gleichungen in Differentialform
3. Wellengleichung $(\nabla^2 + k^2)\vec{E} = 0$
4. Poisson-Gleichung $\Delta\varphi = -\frac{\varrho}{\varepsilon}$
5. Potentialansätze mit Vektorpotential $\vec{A}$ und Skalarpotential φ

$$\begin{aligned} \text{zu 1:} \quad \oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} &= -\frac{d}{dt} \iint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A} \\ \oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} &= \iint_{\partial V} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \right) \cdot d\vec{A} \\ \oiint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{A} &= \iiint_V \varrho dV \\ \oiint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{zu 2:} \quad \text{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot} \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \\ \text{div} \vec{D} &= \varrho \\ \text{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

13.1 Das finite Differenzenverfahren

Die Methode der finiten Differenzen geht von der **Differentialform** der Maxwellschen Gleichungen aus (siehe Punkt 2 der obigen Aufzählung) und ersetzt die räumlichen und zeitlichen Ableitungen durch Differenzenquotienten. Zu diesem Zweck wird ein Gitter über das Lösungsgebiet gelegt, das dann eine Reihe von „Stützstellen“ definiert.

13.1.1 Differenzenquotienten für skalare Felder

13.1.1.1 Skalarfunktionen einer Unbekannten

Um das Prinzip klarzumachen, betrachten wir das Beispiel einer skalaren Lösungsfunktion $f(x)$. Statt der Bestimmung der Funktion $f(x)$ werden im Finiten-Differenzen-Verfahren **Näherungen** $f(x_i)$ an endlich vielen Stellen x_i berechnet.

Das einfachste eindimensionale Gitter hat eine **gleichmäßige Schrittweite** ($\rightarrow$ Abb. 13.2):

$$x_i = i \cdot \Delta x \quad , i = 0, 1, 2, \dots, I-1$$

An der Stelle x_i ($0 \leq i \leq I-1$, fest) wird die Funktion $f(x)$ jeweils nach rechts und links in eine Taylorreihe entwickelt. Damit ergibt sich:

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + \Delta x f'(x_i) + \frac{(\Delta x)^2}{2} f''(x_i) + O((\Delta x)^3) \quad (13.1)$$

$$f(x_i - \Delta x) = f(x_i) - \Delta x f'(x_i) + \frac{(\Delta x)^2}{2} f''(x_i) + O((\Delta x)^3) \quad (13.2)$$

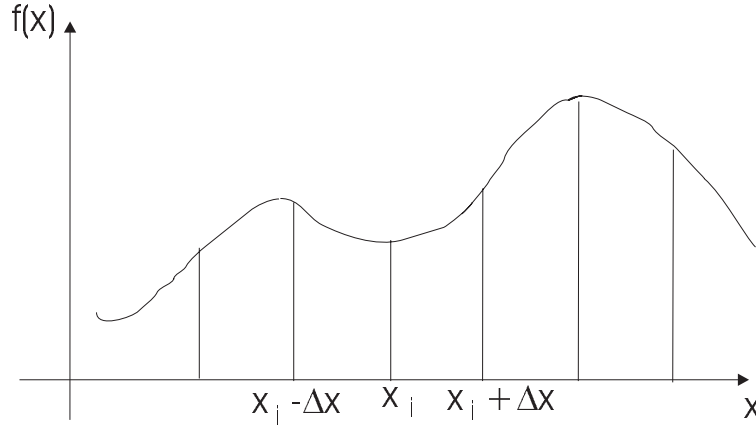


Abbildung 13.2: Eindimensionales Gitter.

Durch Differenzbildung dieser beiden Gleichungen erhalten wir:

$$f(x_i + \Delta x) - f(x_i - \Delta x) = 2\Delta x f'(x_i) + O((\Delta x)^3) \quad (13.3)$$

Nach Auflösen nach $f'(x_i)$ ergibt sich:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i - \Delta x)}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2) \quad (13.4)$$

Dies ist ein **Differenzenquotient**, der die Ableitung an der Stelle x_i bis auf einen **Fehler der Ordnung zwei** $O((\Delta x)^2)$ annähert.

Die Addition der Gleichungen (13.1) und (13.2) liefert

$$f(x_i + \Delta x) + f(x_i - \Delta x) = 2f(x_i) + \Delta x^2 f''(x_i) + O((\Delta x)^3) \quad (13.5)$$

und das Auflösen nach $f''(x_i)$ führt zu

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i + \Delta x) - 2f(x_i) + f(x_i - \Delta x)}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x) \quad (13.6)$$

Dieser Differenzenquotient liefert eine **Näherung erster Ordnung** für die zweite Ableitung der Funktion $f(x)$.

Die Entwicklung zu höheren Termen liefert bessere Näherungsformeln, die dann entsprechend die gesuchte Ableitung durch mehr als zwei oder drei Stützstellenwerte darstellen.

Die Gleichung (13.4) stellt einen Zwei-Punkte-Differenzenquotienten dar, (13.6) einen Drei-Punkte-Differenzenquotienten.

Analog werden bei der FD-Methode partielle Differenzialgleichungen in eine diskrete Form gebracht, die dann nur noch eine Näherung darstellt.

13.1.1.2 Skalarfunktion von zwei Unbekannten

Wir betrachten ein ebenes Feldproblem der Statik oder quasistationärer Felder, d. h. wir gehen von der Potentialgleichung aus. Die Potentialfunktion lautet dann

$$\varphi = \varphi(x, y) \quad (13.7)$$

Nach der Berechnung von φ kann das elektrische Feld gemäß dem Potentialansatz $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$ bestimmt werden:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad , \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} \quad (13.8)$$

Unter der Annahme, daß das Potential im Punkt $P_0(x_0, y_0)$ den Wert φ_0 annimmt, können wir das Potential φ in einer Umgebung von P_0 in eine Taylorreihe entwickeln ($\rightarrow$ Abb. 13.3).

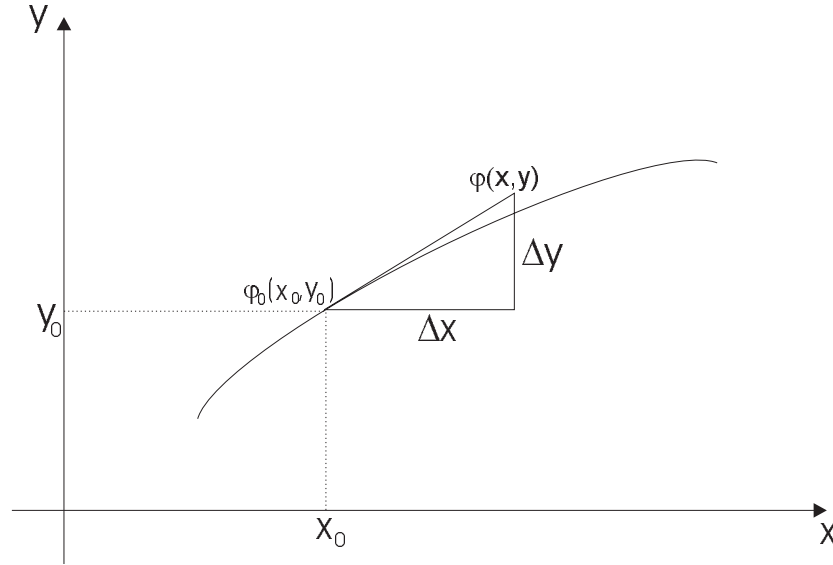


Abbildung 13.3: Entwicklung der Umgebung von P_0 in eine Taylorreihe.

Bevor wir die Differenzengleichungen angeben, führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned} \varphi_x(x_0, y_0) &= \left. \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} & , & \quad \varphi_y(x_0, y_0) = \left. \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} \\ \varphi_{xx}(x_0, y_0) &= \left. \frac{\partial^2\varphi(x, y)}{\partial x^2} \right|_{x_0, y_0} & , & \quad \varphi_{yy}(x_0, y_0) = \left. \frac{\partial^2\varphi(x, y)}{\partial y^2} \right|_{x_0, y_0} \\ \varphi_{xy}(x_0, y_0) &= \left. \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} & , & \quad \varphi_{yx}(x_0, y_0) = \left. \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} \end{aligned}$$

wobei

$$\varphi_{xy}(x_0, y_0) = \varphi_{yx}(x_0, y_0).$$

Für einen Punkt $P(x, y)$ in der Umgebung von $P_0(x_0, y_0)$ liefert die Taylorentwicklung:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \varphi_0 + x\varphi_x + y\varphi_y \\ &\quad + \frac{1}{2} (x^2\varphi_{xx} + xy\varphi_{xy} + y^2\varphi_{yy}) \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (13.9)$$

Nun ist es ja so, daß wir das FD-Verfahren ja gerade erst zur Berechnung der Potentialwerte an endlich vielen Punkten $P_i(x_i, y_j)$, $i = 0, 1, \dots, I-1$; $j = 0, 1, \dots, J-1$ eines zweidimensionalen Gitters einsetzen wollen ($\rightarrow$ Abb. 13.4). Dazu betrachten wir einen Ausschnitt aus einem solchen Gitter ($\rightarrow$ Abb. 13.5). Wir nehmen an, daß uns die Potentialwerte in den vier Punkten $P_1(x_0 + h, y_0)$, $P_2(x_0, y_0 + h)$, $P_3(x_0 - h, y_0)$ und $P_4(x_0, y_0 - h)$ bekannt seien, d. h. $\Delta x = \Delta y = h$, und

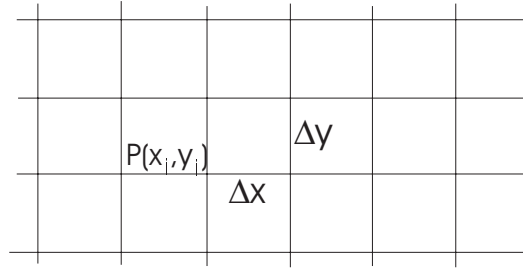


Abbildung 13.4: Berechnung der Potentialwerte an endlich vielen Punkten eines zweidimensionalen Gitters.

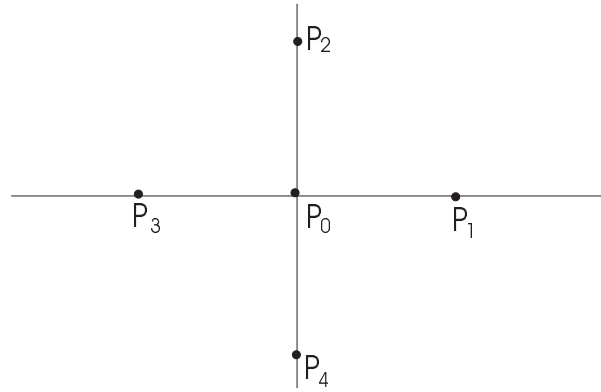


Abbildung 13.5: Ausschnitt eines zweidimensionalen Gitters.

wollen nun mit Hilfe von (13.9) das Potential φ_0 im Punkt $P_0(x_0, y_0)$ bestimmen. Die Taylorreihe (13.9) liefert folgendes für die einzelnen Punkte:

$$\text{in } P_1 \text{ gilt: } \varphi_1 = \varphi_0 + h\varphi_x + 0 \cdot \varphi_y + \frac{1}{2} (h^2\varphi_{xx} + 0 + 0)$$

$$\text{in } P_2 \text{ gilt: } \varphi_2 = \varphi_0 + 0 \cdot \varphi_x + h\varphi_y + \frac{1}{2} (0 + 0 + h^2\varphi_{yy})$$

$$\text{in } P_3 \text{ gilt: } \varphi_3 = \varphi_0 - h\varphi_x + 0 \cdot \varphi_y + \frac{1}{2} (h^2\varphi_{xx} + 0 + 0)$$

$$\text{in } P_4 \text{ gilt: } \varphi_4 = \varphi_0 + 0 \cdot \varphi_x - h\varphi_y + \frac{1}{2} (0 + 0 + h^2\varphi_{yy})$$

Die Addition dieser vier Gleichungen liefert

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 4\varphi_0 + h^2 \underbrace{(\varphi_{xx} + \varphi_{yy})}_{\Delta\varphi}.$$

Unter der Voraussetzung von Quellenfreiheit gilt die Laplacesche Differentialgleichung: $\Delta\varphi = 0$; d. h. wir lassen **keine Raumladungen** in dem zu berechnenden Feldbereich zu. Daher kann das im Punkt $P_0(x_0, y_0)$ zu bestimmende Potential berechnet werden zu:

$$\varphi_0 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4}{4} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \varphi_i \quad (13.10)$$

Diese Differenzengleichung wird häufig auch als **Vierpunkteformel** bezeichnet.

Gleichung (13.9) ist nur bis auf einen Fehler zweiter Ordnung genau. Wir wollen nun das Taylorglied mit Ableitungen dritter Ordnung betrachten: Am Ort $P(x, y)$ liefert es den Ausdruck

$$\frac{1}{3!} (\Delta x^3 \varphi_{xxx} + 3\Delta x^2 \Delta y \varphi_{xxy} + 3\Delta x \Delta y^2 \varphi_{xyy} + \Delta y^3 \varphi_{yyy}) \quad (13.11)$$

Für die Viereckformel, ebenso wie für die hier nicht gezeigte Diagonalformel, zeigt sich durch Einsetzen, daß sich die von Null verschiedenen Summanden gegenseitig aufheben und dieser Beitrag somit zu Null wird. Daher erfüllen Viereck- und Diagonalformel die Taylorreihe bis einschließlich der dritten Ordnung.

13.1.2 Differenzenquotienten für vektorielle Felder

Ein wesentliches Problem bei der Diskretisierung der Maxwell-Gleichungen für zeitabhängige Probleme liegt darin, daß vektorielle Feldgrößen auftreten: $\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{D}(\vec{r}, t)$, $\vec{H}(\vec{r}, t)$, ...

Zur Verdeutlichung der entstehenden Problematik sei ein zweidimensionales Gitter betrachtet ($\rightarrow$ Abb. 13.6): Wenn wir in Analogie zur Vorgehensweise bei den skalaren Potentialen einfach

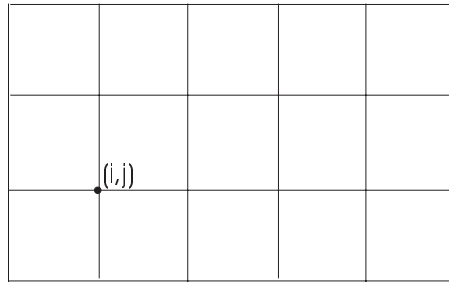


Abbildung 13.6: Zweidimensionales Gitter.

an jedem Punkt des Gitters jeweils die drei Komponenten einer Vektorgröße bestimmen, entsteht ein Problem, sobald wir inhomogene Gebiete zulassen. Gerade dies wollen wir aber, denn die numerischen Verfahren zeichnen sich ja eben durch ihre Allgemeinheit aus: Wir wollen in jeder Zelle des Gitters verschiedene Materialeigenschaften zulassen, so daß nur innerhalb einer Zelle die Materialbelegung als homogen anzunehmen ist. Eine solche Verteilung erlaubt dann analog zur Diskretisierung der Lösungsfunktion eine Diskretisierung der gegebenen Materialverteilung.

Nehmen wir an, die Komponenten des elektrischen Feldes würden an den Punkten des Gitters berechnet ($\rightarrow$ Abb. 13.7). Da das tangential elektrische Feld an Oberflächen stetig ist, ist auch E_y an der Stelle 1 wohldefiniert. Die Normalkomponente E_x von $\vec{E}$ ist jedoch unstetig und kann somit an der Stelle 1 nicht berechnet werden. An einer Ecke, wie Punkt 2, sind sogar weder E_x noch E_y definiert!

Die naheliegende Vermutung, daß es sich nur um einen kleinen Fehler handelt und daß dieser Fehler mit kleiner werdender Schrittweite immer geringer wird, ist falsch. Neuere Untersuchungen haben gezeigt, daß Fehler bis zu 50% entstehen, die sich auf das gesamte Lösungsgebiet auswirken und somit weder klein noch lokal sind.

Ein scheinbar einfacher Ausweg wäre, die Komponenten jeweils in der Mitte einer Zelle zu berechnen. Bei dieser Anordnung treten zwar keine Stetigkeitsprobleme auf, aber es ergibt ein schlechtes Konvergenzverhalten, was hier nicht im einzelnen bewiesen werden soll.

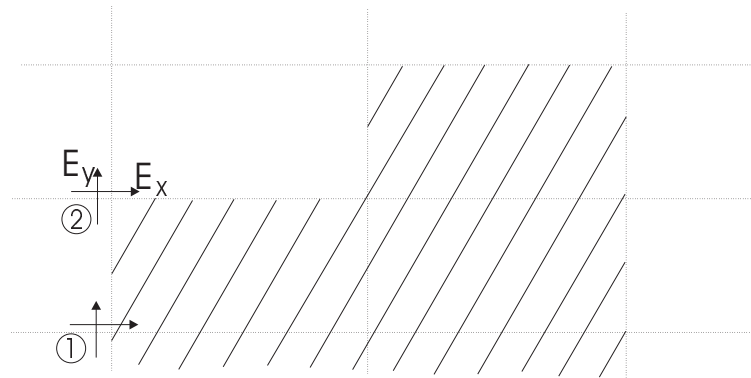


Abbildung 13.7: Berechnung der Feldkomponenten an den Punkten des Gitters.

13.2 Die Methode der Finiten Integration (FIT)

Die im folgenden Anhang ¹ vorgestellte Methode geht zur Diskretisierung der Felder von den Maxwell-Gleichungen in Integralform aus und ordnet die einzelnen Feldkomponenten in spezieller Weise auf einem Gitterduplett an. Die Finite Integrationstechnik erreicht eine Berücksichtigung der Stetigkeitsbedingungen *ohne* Konvergenzverlust sowohl für $\vec{E}$ und $\vec{D}$ als auch für $\vec{H}$ und $\vec{B}$.

¹aus: U.van Rienen: Lineare Gleichungssysteme in der numerischen Feldberechnung, Habilitationsschrift, Technische Hochschule Darmstadt, 1996

Anhang A

Die Telegraphengleichung

Die Wellengleichungen (6.11) und (6.12) mit deren Lösungen wir uns bisher beschäftigt haben, gehören zum dispersionsfreien Fall. Nun wollen wir ein besonders wichtiges Beispiel zum Dispersionsfall betrachten – die **Telegraphengleichung**. Die Telegraphengleichung spielt im Rahmen der Leitungstheorie eine zentrale Rolle; sie tritt dort an die Stelle der Wellengleichung.

Die Leitungstheorie stellt die auf elektrischen Leitungen auftretenden Erscheinungen dar. Eine **elektrische Leitung** ist ganz allgemein als eine Einrichtung zur Übertragung elektrischer Energie oder elektrischer Signale mittels draht- oder rohrförmiger gut leitender Medien definiert. Ein Beispiel ist das Koaxialkabel ($\rightarrow$ Abb. A.1).

In der Leitungstheorie werden die sogenannten **Leitungsgleichungen** unter verschiedenen Randbedingungen gelöst. Diese Gleichungen beschreiben die Fortpflanzung elektrischer Signale auf „langen“ Leitungen, wie nachrichtentechnische Leitungen oder Starkstromleitungen, bei denen Strom und Spannung orts- **und** zeitabhängig sind. Zur Herleitung der Leitungsgleichung wird die Darstellung mit einem **Leitungsersatzschaltbild** verwendet. Dieses ist ein Schaltbild eines Leitungselementes einer homogenen, verlustbehafteten Leitung, das ersatzweise die gesamte Leitung, über deren Länge die **Leitungskonstanten** R , L , C und G kontinuierlich verteilt sind, repräsentiert. Dabei ist L die Induktivität der Leitung, R ihr Widerstand, C die Kapazität und G der Leitwert der Leitung.

Für das Beispiel des Koaxialkabels entspricht dieser Vierpol einem Längenelement dz ($\rightarrow$ Abb. A.2). Die gestrichenen Größen beziehen sich jeweils auf eine Längeneinheit.

Unter Verwendung eines Leitungsersatzschaltbildes eines Leitungselementes dz ergibt sich durch Anwendung der Kirchhoffschen Regeln schließlich die Telegraphengleichung. Sie entsteht aus dem folgenden System von Differentialgleichungen erster Ordnung für den Strom I und der Spannung

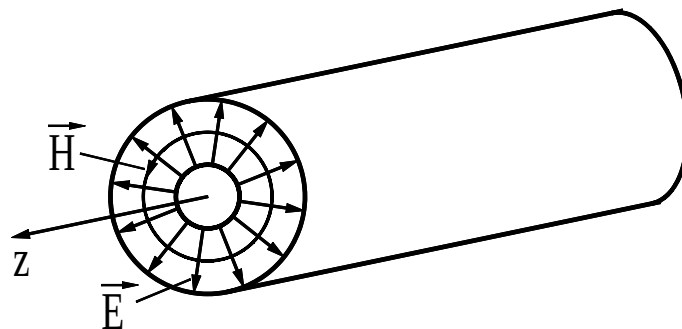


Abbildung A.1: Das Koaxialkabel.

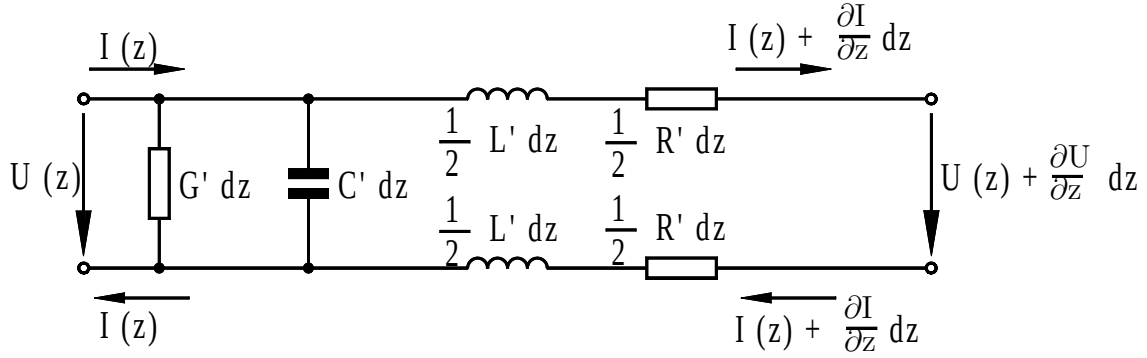


Abbildung A.2: Das Leitungsersatzschaltbild eines Koaxialkabels.

U als Funktionen von z und t . Aus Abb. A.2 erhalten wir für $dz \rightarrow 0$

$$G'U + C' \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$L' \frac{\partial I}{\partial t} + R'I + \frac{\partial U}{\partial z} = 0. \quad (\text{A.2})$$

Die Differentiation von (A.1) nach z liefert

$$G' \frac{\partial U}{\partial z} + C' \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial z} + \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = 0.$$

Das Einsetzen von $\partial U / \partial z$ aus Gleichung (A.2) ergibt

$$G' \left(-L' \frac{\partial I}{\partial t} - R'I \right) + C' \frac{\partial}{\partial t} \left(-L' \frac{\partial I}{\partial t} - R'I \right) + \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = 0.$$

Nach dem Umordnen erhalten wir dann

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = L'C' \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + (R'C' + L'G') \frac{\partial I}{\partial t} + R'G'I \quad (\text{A.3})$$

Analog wird (A.2) nach z differenziert und dann $\partial I / \partial z$ aus Gleichung (A.1) eingesetzt, woraus

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = L'C' \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + (R'C' + L'G') \frac{\partial U}{\partial t} + R'G'U \quad (\text{A.4})$$

folgt. Der Strom $I(z, t)$ und die Spannung $U(z, t)$ genügen also derselben Gleichung, der sogenannten Telegraphengleichung, die formal für eine Funktion $f(z, t)$ die Form

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = a_1 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + a_2 \frac{\partial f}{\partial t} + a_3 f \quad (\text{A.5})$$

hat. Im einfachsten Fall ist die Leitung verlustfrei, d. h. wir haben $G' = R' = 0$ und erhalten

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = L'C' \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = L'C' \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}. \quad (\text{A.7})$$

Es läßt sich dann

$$L'C' = \varepsilon\mu \quad (\text{A.8})$$

zeigen. Auf den allgemeinen Beweis wird hier verzichtet.

Für unser Beispiel des Koaxialkabels können wir (A.8) mit der für Zylinderkondensatoren gültigen Gleichung

$$C' = \frac{|Q|}{|U|} = 2\pi\varepsilon \frac{1}{\ln \frac{r_a}{r_i}}$$

und der für die Koaxialkabel gültigen Gleichung

$$L' = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{r_a}{r_i}$$

verifizieren. Hier handelt es sich um den dispersionsfreien Fall. Mit dem Ansatz

$$\underline{U}(z, t) = \underline{U}_0 e^{j(\omega t - k_z z)} \quad (\text{A.9})$$

ergibt sich aus (A.6)

$$-k_z^2 + \varepsilon\mu\omega^2 = 0,$$

die übliche Dispersionsbeziehung für rein transversale Wellen in mehrfach zusammenhängenden Hohlleitern, für die das Koaxialkabel ein Beispiel ist. Ebene Wellen sind ein Spezialfall der rein transversalen Wellen. Für TEM-Wellen ist $E_z = H_z = 0$; sie sind also bezüglich $\vec{E}$ und $\vec{H}$ transversal. (Später werden wir noch TE-Wellen mit $E_z = 0$, $H_z \neq 0$ und TM-Wellen mit $E_z \neq 0$, $H_z = 0$ kennenlernen.)

Der Strom I erzeugt das Magnetfeld, die Spannung U das elektrische Feld zwischen Innen- und Außenleiter. Im Koaxialkabel ist das Magnetfeld rein azimuthal und das elektrische Feld rein radial.

Dispersionsfall: Für den Spezialfall $G'/C' = R'/L'$ kann man zeigen, daß die Telegraphengleichung zwar keine absolut verzerrungsfreien Wellenlösungen, aber „relativ“ verzerrungsfreie Wellenlösungen der Form

$$f = e^{-\frac{R'C' + L'G'}{2L'C'}t} F(z \pm vt)$$

mit willkürlichem F nach beiden Richtungen der Leitungen hat. Auf diesem Resultat beruht es, daß bei geeigneten Dimensionierungen von Kapazität und Induktivität eines Kabels Signale zwar zeitlich gedämpft, aber in proportional unverzerrter Form übermittelt werden können (Kabeltelegraphie).

Anhang B

Finite Integrations Technik

In diesem Abschnitt wird die zur Lösung der Maxwell'schen Gleichungen verwendete Diskretisierungsmethode beschrieben. Sie stellt eine mit den Maxwell'schen Gleichungen konsistente Diskretisierung dar, d.h. die von ihr gelieferten diskreten Lösungen geben die analytischen Eigenschaften der kontinuierlichen Lösung wieder. Soll die Finite-Integrations-Technik einer Gruppe numerischer Verfahren zugeordnet werden, so ist sie am ehesten den Finite Volumen Methoden einzugliedern.

B.1 FIT-Diskretisierung der Maxwell'schen Gleichungen

Die Finite-Integrations-Technik [18], [21], [22] (kurz FIT) wurde speziell zur Lösung der Maxwell'schen Gleichungen entwickelt. Die Zielsetzung bei der Entwicklung der Methode war es, das gesamte System der Maxwell'schen Gleichungen in möglichst weitreichender Allgemeinheit numerisch lösen zu können. Die Finite-Integrations-Technik liefert eine eindeutige Umsetzung der Maxwell'schen Gleichungen in Integralform

$$\begin{aligned}\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} &= - \int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} \\ \oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} &= \int_A \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \right) \cdot d\vec{A} \\ \oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{A} &= \int_V \rho \cdot dV \\ \oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A} &= 0\end{aligned}$$

auf ein Gitterraumduplett $(G, \tilde{G})$. Die FDTD-Methode von Yee [26] (1966) mit dem sog. "leap frog"-Schema ist ein Vorläufer der Finite-Integrations-Technik. FDTD steht für *Finite Difference Time Domain*. Es handelt sich um ein Finite Differenzen Verfahren zur Lösung der Maxwell'schen Gleichungen im Zeitbereich. Das Besondere an Yee's Methode lag darin, daß sie die Maxwell'schen Gleichungen für *beide* elektromagnetischen Felder (und nicht nur für das elektrische Feld) löste und die elektrischen und magnetischen Feldkomponenten auf zwei zueinander versetzten räumlichen Gittern anordnete. Weiland [18] verallgemeinerte 1977 die FDTD-Methode zu einer allgemeinen numerischen Lösungsmethode für die gesamte Elektrodynamik. Die Finite-Integrations-Technik ist allerdings nicht auf die Elektrodynamik beschränkt, sondern auch auf anderen Gebieten ein geeignetes numerisches Verfahren. So wurde die Finite-Integrations-Technik in jüngster Zeit in der Akustik [25], der Elastodynamik [6] und der Temperaturberechnung [16], [11] angewendet.

Bei der Finite-Integrations-Technik werden lediglich einige bei der numerischen Lösung der Maxwell'schen Gleichungen übliche Idealisierungen bzgl. der Materialien vorgenommen: Die Materialien der untersuchten Objekte müssen insoweit *stückweise* linear, homogen und isotrop sein,

als die Teilgebiete mit konstantem $(\varepsilon, \mu, \kappa)$ mindestens so groß wie die verwendeten Elementarvolumina sind.

B.1.1 Das FIT-Gitter

Die Diskretisierung der Maxwell'schen Gleichungen, d.h. die Feldberechnung an endlich vielen diskreten Punkten, erfordert als erstes eine Zerlegung des Lösungsraums in Gitterzellen. Dazu werde zunächst ein endliches Volumen Ω , das Rechengebiet, definiert. Nun werde Ω mit einem Gitter G belegt. Als Beispiel kann ein einfaches kartesisches Koordinatengitter betrachtet werden. Es muß an dieser Stelle aber ausdrücklich betont werden, daß ein FIT-Gitter G deutlich allgemeiner definiert ist und seine Definition auch Nicht-Koordinatengitter sowie nicht-orthogonale Gitter umfaßt. An diesem einfachen Gitter soll die Aufstellung der Gitter-Maxwell-Gleichungen erklärt werden:

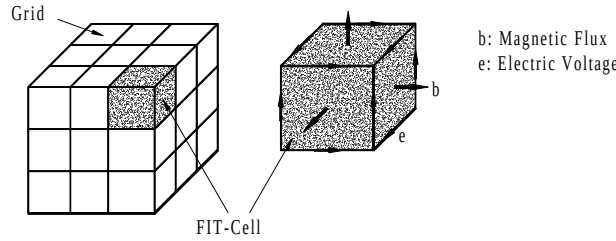


Abbildung B.1: Einfaches Beispiel für ein FIT-Gitter und seine elementaren Bestandteile. Graphik: Thoma

Das Gitter setzt sich aus sog. Elementarvolumen V_i oder auch FIT-Zellen zusammen. Jede FIT-Zelle ist mit homogenem Material gefüllt. Der gemeinsame Durchschnitt zweier Elementarvolumina bildet eine Elementarfläche A_i . Der gemeinsame Durchschnitt zweier Elementarflächen wiederum bildet eine Elementarstrecke L_i , auf denen die zu berechnenden Zustandsgrößen *alloziert*, d.h. angeordnet, werden. Definition B.1.1 liefert die formale Beschreibung der FIT-Gitter:

Definition B.1.1 Ein FIT-Gitter G ist folgendermaßen definiert:

- $G \in \mathbf{R}^3 (\mathbf{R}^2)$, einfach zusammenhängend
- $G = \bigcup V_i$, $V_i \neq \{\}$; Elementarvolumina $V = \{V_1, \dots, V_{n_V}\}$
- Elementarflächen $A = \{A_1, \dots, A_{n_A}\}$ mit $\{A_i\} := \bigcap V_i$
- Elementarstrecken $L = \{L_1, \dots, L_{n_L}\}$ mit $\{L_i\} := \bigcap A_i$
- Punkte $P = \{P_1, \dots, P_{n_P}\}$ mit $\{P_i\} := \bigcap L_i$

Im nächsten Schritt sollen die Maxwell'schen Gleichungen auf das FIT-Gitter G übertragen werden. Zunächst werde die erste Maxwell'sche Gleichung, das Induktionsgesetz, betrachtet:

$$\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$

Als einfachster möglicher Fall werde ein Elementarvolumen V_i betrachtet, wie es in Bild B.2 gezeigt ist. Die linke Seite der Gleichung wird folgendermaßen behandelt: Es wird das Flächenintegral über eine Elementarfläche A_i betrachtet und die elektrische Spannung entlang der Elementarstrecke L_i als Zustandsgröße auf dem Gitter G eingeführt:

Definition B.1.2 Jeder Elementarstrecke L_i ist die elektrische (Gitter-)Spannung e_i als Zustandsgröße zugeordnet:

$$e_i := \int_{L_i} \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

Damit reduziert sich das Umlaufintegral $\oint_{\partial A_i} \vec{E} \cdot d\vec{s}$ auf die Differenz

$$e_i + e_j - e_k - e_l.$$

Die Anordnung der Zustandsgrößen erfolgt also auf ganz natürliche Weise.

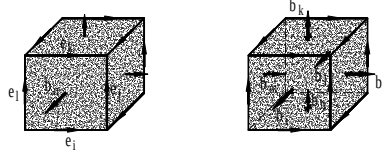


Abbildung B.2: Elementarvolumen eines kartesischen FIT-Gitters G mit darauf angeordneten Zustandsgrößen der elektrischen Gitterspannung (links) und des magnetischen Gitterflusses (rechts). Graphik: Thoma

Es reicht aus, die Integration über eine Elementarfläche zu betrachten. Angenommen die Integrationsfläche A hätte die in Bild B.3 gezeigte Gestalt. Offensichtlich kann dann das Gesamtintegral als Summe von Teilintegralen über je einer Elementarfläche A_i dargestellt werden, da sich die Anteile direkt benachbarter Zellen gegenseitig aufheben.

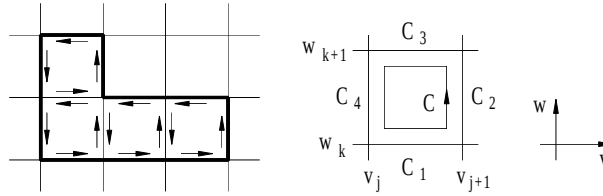


Abbildung B.3: Anordnung der elektrischen Gitterspannungen auf einer Integrationsfläche, die sich aus mehreren Elementarflächen zusammensetzt. Zeichnung: Weiland [23]

Bei der rechten Seite des Induktionsgesetzes muß das Flächenintegral

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

in geeigneter Weise auf das Gitter G übertragen werden. Als Integrationsfläche ist bereits die Elementarfläche A_i gewählt. Damit ist auch die Richtung von $d\vec{A}$ gegeben. Entsprechend wird der magnetischen Flußdichte nun ebenfalls eine Zustandsgröße auf G zugeordnet (vgl. Bild B.2):

Definition B.1.3 Jeder Elementarfläche A_i ist der magnetische Fluß b_i normal zur Gitterfläche A_i als Zustandsgröße zugeordnet:

$$b_i = \int_{A_i} \vec{B} \cdot d\vec{A}.$$

Damit kann das Induktionsgesetz in diskreter Form angegeben werden:

$$e_i + e_j - e_k - e_l = -\frac{\partial}{\partial t} b_i.$$

Die Zustandsgrößen e_i und b_i , $i=1, \dots, N$, können nach geeigneter Numerierung des Gitters in Vektoren e und b und die Vorfaktoren $\{-1, 1\}$ in einer der Topologie des Gitters gemäßen Matrix der Dimension $3N \times 3N$, die mit C bezeichnet werden soll, abgespeichert werden:

$$C := \begin{pmatrix} 1 & .. & 1 & .. & -1 & .. & -1 \end{pmatrix}.$$

C ist eine Blockmatrix mit Blöcken $\pm P_x, \pm P_y, \pm P_z$ sowie 0:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -P_z & P_y \\ P_z & 0 & -P_x \\ -P_y & P_x & 0 \end{pmatrix},$$

wobei x, y, z die drei Koordinatenrichtungen angeben. Die Blöcke P_x, P_y, P_z haben jeweils die Werte -1 auf der Hauptdiagonalen und +1 auf einer Nebendiagonalen mit einem der Numerierung entsprechenden Abstand von der Hauptdiagonalen. Auf *dual-orthogonalen* FIT-Gittern ($G \perp \tilde{G}$, s. Definition B.1.4) gelten folgende Entsprechungen für die Blockmatrizen P_x, P_y, P_z :

$$P_x \simeq \frac{\partial}{\partial x}, \quad P_y \simeq \frac{\partial}{\partial y}, \quad P_z \simeq \frac{\partial}{\partial z}.$$

Weitere Details können [23] entnommen werden. Damit liegt die diskrete Form des Induktionsgesetzes vor:

$$Ce = -\frac{\partial}{\partial t}b.$$

Als nächstes werde die vierte Maxwellsche Gleichung

$$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

auf das Gitter G übertragen. Das Gesamtintegral läßt sich wiederum auf die Summe von Teilintegralen reduzieren. Das Oberflächenintegral wird also über ein Elementarvolumen V_i ausgeführt und es werden wieder die magnetischen Flüsse b_i verwendet. Bild B.2 zeigt ihre Anordnung auf V_i . Direkt ergibt sich die Differenzengleichung

$$b_i + b_j + b_k - b_l - b_m - b_n = 0.$$

Unter Verwendung des Vektors b und Einführung einer Matrix S der Dimension $N \times 3N$, die wiederum die Vorfaktoren $\{-1, 1\}$ in einer der Topologie des Gitters gemäßen Weise enthält, resultiert:

$$S := \begin{pmatrix} .. & 1 & .. & 1 & .. & 1 & .. & -1 & .. & -1 & .. & -1 & .. \end{pmatrix} = (P_x | P_y | P_z)$$

so daß die diskrete Form der vierten Maxwellsche Gleichung vorliegt:

$$Sb = 0.$$

Nun fehlt noch die Übertragung der zweiten und dritten Maxwellschen Gleichung. Da dies völlig analog geschehen soll, wird ein zweites, sog. duales Gitter $\tilde{G}$ eingeführt, das im vorliegenden kartesischen Beispiel gerade wie das Gitter G ist, nur um eine halbe Zellänge verschoben. Auch das duale FIT-Gitter ist deutlich allgemeiner definiert als das Beispiel vermuten läßt.

Definition B.1.4 Das zusätzliche Gitter wird als duales Gitter $\tilde{G}$ bezeichnet. Das duale Gitter $\tilde{G}$ wird formal durch

- $\tilde{G}$ ist definiert wie G mit $\tilde{V}, \tilde{A}, \tilde{L}, \tilde{P}$
- $\forall \tilde{V}_j \exists P_i$ mit $P_i \in \tilde{V}_j, \forall V_j \exists \tilde{P}_i$ mit $\tilde{P}_i \in V_j$
- $\forall \tilde{A}_j \exists L_i$ mit $L_i \cap \tilde{A}_j \neq \{\}$, $\forall A_j \exists \tilde{L}_i$ mit $\tilde{L}_i \cap A_j \neq \{\}$

beschrieben. Bei einem dual-orthogonalen FIT-Gitter gilt $L \perp \tilde{A}$ sowie $\tilde{L} \perp A$.

In völliger Analogie zu e und b werden nun die Zustandsgrößen h und d eingeführt:

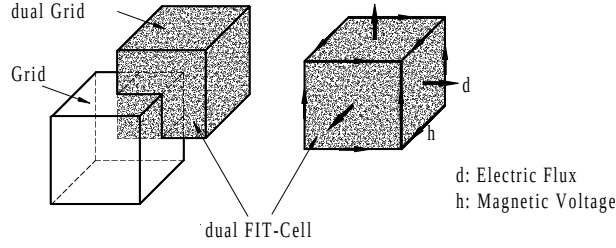


Abbildung B.4: Elementarvolumen eines dualen Gitters $\tilde{G}$ zum kartesischen FIT-Gitter G sowie darauf angeordnete Zustandsgrößen der magnetischen Gitterspannung und des elektrischen Gitterflusses. Graphik: Thoma

Definition B.1.5 Jeder dualen Elementarstrecke $\tilde{L}_i$ ist die magnetische Spannung h_i als Zustandsgröße zugeordnet:

$$h_i := \int_{\tilde{L}_i} \vec{H} \cdot d\vec{s}.$$

Jeder dualen Elementarfläche $\tilde{A}_i$ ist der elektrische Fluß d_i normal zur dualen Gitterfläche $\tilde{A}_i$ als Zustandsgröße zugeordnet:

$$d_i = \int_{\tilde{A}_i} \vec{D} \cdot d\vec{A}.$$

Darüberhinaus wird jeder dualen Elementarfläche $\tilde{A}_i$ der elektrische Gesamtstrom j_i normal zur dualen Gitterfläche $\tilde{A}_i$ als Zustandsgröße zugeordnet:

$$j_i = \int_{\tilde{A}_i} \vec{J} \cdot d\vec{A}.$$

Jedem dualen Elementarvolumen $\tilde{V}_i$ wird die diskrete Ladung q_i (angeordnet in P_i auf G) als Zustandsgröße zugeordnet:

$$q_i = \int_{\tilde{V}_i} \rho dV.$$

Analog zu C und S werden die Vorfaktoren der Zustandsgrößen in topologischen Matrizen $\tilde{C}$ und $\tilde{S}$ abgespeichert. Damit kann direkt die diskrete Form des Durchflutungsgesetzes

$$\tilde{C}h = \frac{\partial}{\partial t}d + j$$

und der dritten Maxwell'schen Gleichung angegeben werden:

$$\tilde{S}d = q.$$

Ein Sonderfall liegt für statische bzw. stationäre Probleme vor. In der Elektrostatik und bei stationären Strömungsproblemen läßt sich das elektrische Feld $\vec{E}$ als Gradient eines skalaren Potentials φ ausdrücken und in der Elektro-Quasistatik kann der komplexe elektrische Phasor $\underline{\vec{E}}$ als Gradient eines skalaren komplexen Potentials $\underline{\varphi}$ dargestellt werden. In der Magnetostatik wird analytisch zwar zunächst ein Vektorpotential angesetzt, aber wie in Abschnitt B.2.1 gezeigt wird, läßt sich das Problem auch hier auf ein *skalares* Potentialproblem reduzieren. Der FIT-Ansatz für die Statik und Elektro-Quasistatik greift die naheliegende Idee auf, die Potentiale selbst direkt auf dem Gitter G anzuordnen, und zwar in den Punkten $P_i \in G$. Auf den Elementarstrecken des FIT-Gitters G ist dann jeweils das elektrische bzw. magnetische Feld angeordnet. Das Integral $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$, beispielsweise, entspricht dann gerade der Differenz der Potentiale an den Gitterpunkten.

Definition B.1.6 Für den Spezialfall der Statik bzw. Elektro-Quasistatik wird jedem Punkt $P_i \in G$ ein reelles bzw. komplexes skalares Potential $\Phi_{E,i}$, $\Phi_{M,i}$ bzw. $\underline{\Phi}_i$ zugeordnet. Sei nun L_i die Elementarstrecke zwischen zwei Punkten P_a und P_b aus G . Dann ist die L_i zugeordnete elektrische Spannung

in der Statik bzw. der Elektro-Quasistatik e_i bzw. $\underline{e}_i$ gemäß

$$e_i := \Phi_{E,b} - \Phi_{E,a} \text{ bzw. } \underline{e}_i := \Phi_b - \Phi_a$$

und die magnetische Spannung in der Statik gemäß

$$h_i := \Phi_{M,b} - \Phi_{M,a}$$

definiert.

Bemerkung B.1.1 Das Gitterduplett $(G, \tilde{G})$ ist

- nicht koordinatengebunden,
- nicht notwendig orthogonal¹,
- nicht notwendig regelmäßig.

Bei einem kartesischen Gitter sind die Zustandsgrößen h bzw. d in $\tilde{G}$ genauso angeordnet wie die von e bzw. b in G . Solche Gitter werden auch als "staggered grid" bezeichnet (Yee). Auf welchem Gitter dann die erste bzw. zweite Maxwellsche Gleichung diskretisiert wird, ist bei vielen, aber nicht allen Anwendungsproblemen willkürlich.

B.1.2 Die Gitter-Maxwell-Gleichungen

An dieser Stelle können nun die Gitter-Maxwell-Gleichungen zusammenfassend formal definiert werden. Es sei darauf hingewiesen, daß bisher noch keinerlei Approximationen vorgenommen wurden. Näherungen werden bei der Finite-Integrations-Technik erst bei der Umsetzung der Materialgleichungen auf dem Gitterraum notwendig.

Definition B.1.7 Die nachfolgend beschriebene Verfahrensweise zur Diskretisierung der Maxwellschen Gleichungen wird als Finite-Integrations-Technik (kurz FIT) bezeichnet.

1. Für das zu untersuchende Lösungsgebiet wird ein FIT-Gitter G gewählt, dessen Gitterpunkte geeignet numeriert seien. Es werden folgende Zustandsgrößen eingeführt:

$$\begin{aligned} e_i &= \int_{L_i} \vec{E} \cdot d\vec{s} && \text{elektrische (Gitter)-Spannung} \\ b_i &= \int_{A_i} \vec{B} \cdot d\vec{A} && \text{magnetische (Gitter)-Fluß} \\ h_i &= \int_{\tilde{L}_i} \vec{H} \cdot d\vec{s} && \text{magnetische (Gitter)-Spannung} \\ d_i &= \int_{\tilde{A}_i} \vec{D} \cdot d\vec{A} && \text{elektrische (Gitter)-Fluß} \\ j_i &= \int_{\tilde{A}_i} \vec{J} \cdot d\vec{A} && \text{elektrischer Gesamtstrom} \\ q_i &= \int_{\tilde{V}_i} \rho dV && \text{diskrete (Gitter)-Ladungen (angeordnet in } P_i \text{ auf } G) \end{aligned}$$

2. Das diskrete Analogon zu den Maxwellschen Gleichungen wird aufgestellt:

$$\begin{aligned} \sum_k c_{ik} e_k &= -\frac{\partial b_i}{\partial t} \\ \sum_k \tilde{c}_{ik} h_k &= \frac{\partial d_i}{\partial t} + j_i \\ \sum_k s_{ik} b_k &= 0 \\ \sum_k \tilde{s}_{ik} d_k &= q_i \end{aligned}$$

¹Ein Winkel zur Normalen einer Elementarstrecke ist erlaubt, falls sich μ bzw. ε und κ in den angrenzenden Elementarvolumina nicht unterscheidet.

3. Die Maxwell'schen Gleichungen ergeben dann in exakter Darstellungsweise folgendes System linearer Gleichungen

$$\begin{aligned} Ce &= -\dot{b} \\ \tilde{C}h &= \dot{d} + j \\ Sb &= 0 \\ \tilde{S}d &= q \end{aligned}$$

Wegen seiner Konsistenz und Allgemeinheit wird das System als Gitter-Maxwell-Gleichungen bezeichnet.

4. Die Operatoren C , $\tilde{C}$, S und $\tilde{S}$ können folgendermaßen interpretiert werden:

$$\begin{aligned} C, \tilde{C} &\equiv \text{Rotation} \\ S, \tilde{S} &\equiv \text{Divergenz} \\ -S^T, -\tilde{S}^T &\equiv \text{Gradient.} \end{aligned}$$

Sie werden daher als diskrete Rotations-, Divergenz- und Gradientenoperatoren bezeichnet.

Bemerkung B.1.2 Die Schreibweise mit Zustandsgrößen statt Feldkomponenten wurde in der hier verwendeten bzw. einer analogen Form erstmals in [19] eingeführt und in [4] bzw. [7] wieder aufgegriffen; vgl. auch [3]. Diese Schreibweise spart Koeffizienten und wirkt etwas eleganter. Allerdings gehen Äquivalenzen wie z.B. $ds \equiv D_s$ bei der Schreibweise aus Definition B.1.7 verloren. Bei der alternativen Schreibweise sind die Feldkomponenten eigens in Vektoren e, b, h, d, j zusammengefaßt und die Spannungen und Flüsse aus Definition B.1.7 ergeben sich durch Multiplikation mit Matrizen $D_s, D_A, \tilde{D}_s$ sowie $\tilde{D}_A$, welche die Maße der Elementarstrecken und -flächen der FIT-Gitter G und $\tilde{G}$ enthalten: $e = D_s e$, $b = D_A b$, $h = \tilde{D}_s h$, $d = \tilde{D}_A d$ und $j = \tilde{D}_A j$. In dieser Schreibweise wird die Äquivalenz zu den Maxwell'schen Gleichungen in Integralform deutlicher:

$$\begin{aligned} CD_s e &= -D_A \dot{b} \\ \tilde{C}\tilde{D}_s h &= \tilde{D}_A (\dot{d} + j) \\ SD_A b &= 0 \\ \tilde{S}\tilde{D}_A d &= q \end{aligned}$$

Im weiteren wird die ausschließlich die Schreibweise aus Definition B.1.7 mit den Zustandsgrößen verwendet.

Die wichtigsten Eigenschaften der Finite-Integrations-Technik werden im folgenden kurz aufgeführt. Sie werden an dieser Stelle nicht im einzelnen bewiesen, da dies in der Literatur [18], [20], [22], [23], [24] und [5] nachgelesen werden kann.

Lemma B.1.1 Aufgrund der Dualität der Gitter G und $\tilde{G}$ gilt für die Rotationsmatrizen

$$C^T = \tilde{C}$$

Die Elemente der Matrizen $C, \tilde{C}, S$ und $\tilde{S}$ nehmen nur die Werte 0, +1 und -1 an. Die Matrizen besitzen Bandstruktur mit nur wenigen Bändern ungleich Null.

Satz B.1.1 Die Finite-Integrations-Technik stellt ein konsistentes Verfahren erster Ordnung zur Lösung der Maxwell'schen Gleichungen dar.

Bei der Finite-Integrations-Technik gibt die spezielle Anordnung der Feldgrößen in Kombination mit den gewählten Integrationsregeln die in den Maxwell'schen Gleichungen auftretenden Integrale in sehr natürlicher Weise wieder. Diese Erhaltung der Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Integralen in den Maxwell'schen Gleichungen gewährleistet die Konsistenz. Es kann gezeigt werden (vgl. [22]), daß die analytischen Eigenschaften der Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen eine Entsprechung bei den diskreten Lösungen finden.

Insbesondere bleibt die Quellenfreiheit von Wirbelfeldern garantiert [22], denn es gilt:

Lemma B.1.2 *Die Finite-Integrations-Technik erhält die vektoranalytischen Beziehungen zwischen den diskreten Operatoren, die rot und div wiedergeben, speziell gilt*

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \equiv 0 \quad \Longleftrightarrow \quad SC = 0 \text{ bzw. } \tilde{S}\tilde{C} = 0.$$

Dadurch sind die dritte und vierte Maxwellsche Gleichung implizit erfüllt.

Diese Eigenschaft unterscheidet die Finite-Integrations-Technik von einer Vielzahl anderer möglicher Diskretisierungsmethoden für die Maxwellschen Gleichungen. Auf Grund dieser Eigenschaft ergibt sich eine einmalige Überprüfungsmöglichkeit für Richtigkeit und Genauigkeit der numerischen Lösung.

Bei der Behandlung statischer Felder wird ein Potentialansatz verwendet, d.h. die Felder werden als Gradient eines Potentials dargestellt. Die Finite-Integrations-Technik erhält die analytische Eigenschaft der Wirbelfreiheit von Gradientenfeldern:

Lemma B.1.3 *Die Finite-Integrations-Technik erhält die vektoranalytischen Beziehungen zwischen den diskreten Operatoren, die rot und grad wiedergeben, speziell gilt*

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \equiv 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{C}^T \tilde{S}^T = 0 \text{ bzw. } C\tilde{S}^T = 0.$$

Eine weitere analytische Eigenschaft, die auch für die mit der Finite-Integrations-Technik berechneten elektromagnetischen Felder gültig bleibt, ist das Prinzip der Energierhaltung:

Lemma B.1.4 *Auch im FIT-Gitterraum gilt, daß die gesamte elektromagnetische Energie durch die Summe der einzelnen Feldenergien gegeben ist*

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial W_e}{\partial t} + \frac{\partial W_m}{\partial t} = -j^T e^*$$

Bei der Berechnung eingeschwungener elektromagnetischer Felder mit harmonischer Zeitabhängigkeit können sogenannte "Geistermoden" (vgl. z.B. [10]) bei Benutzung der Finiten Integrations Technik auf einfache Weise ausgeschlossen werden.

Satz B.1.2 *Der Lösungsraum Ω_{∇^2} des Eigenwertproblems für zeitharmonische Eigenschwingungen (Moden) läßt sich als direkte Summe des Raums Ω_γ der gesuchten Moden und des Raums Ω_ω der sog. "Geistermoden" darstellen:*

$$\Omega_{\nabla^2} = \Omega_\gamma \oplus \Omega_\omega$$

Diskretisierungsmethoden, die die Quellenfreiheit von Wirbelfeldern, also $\operatorname{div} \operatorname{rot} \equiv 0$, nicht auf dem Gitterraum erfüllen, können die Unterscheidung zwischen physikalischen Moden und Geistermoden nicht ohne weiteres vornehmen. Bei solchen Methoden, zu denen auch die Finite Elemente Methode zählt, wird häufig auf penalty-Verfahren zurückgegriffen [10] und der $\operatorname{grad} \operatorname{div}$ -Term in der Eigenwertgleichung mit einem penalty-Faktor p gewichtet. Nach mehrmaligem Lösen der Gleichung mit unterschiedlichen Faktoren p können die gesuchten Eigenlösungen dann daran erkannt werden, daß sie keine Abhängigkeit von p aufweisen.

Es sei daraufhingewiesen, daß die sich durch Anwendung der Finite-Integrations-Technik ergebenden Matrizen durch eine geeignet gewählte Diskretisierungsmethode für partielle Differentialgleichungen erhalten werden können [22]. Die hier beschriebene Vorgehensweise zeichnet sich demgegenüber jedoch durch eine natürlich erscheinende Herleitung der geeigneten Diskretisierung aus.

B.1.3 Approximation der Materialeigenschaften

Bis hierher wurden noch keinerlei Approximationen durchgeführt. Diese werden aber bei der Umsetzung der Materialgleichungen auf dem Gitterraum notwendig. Auf dem FIT-Gitter sind die folgenden Zustandsgrößen definiert:

$$\begin{aligned}
d_i &= \int_{\vec{A}_i} \vec{D} \cdot d\vec{A}, & e_i &= \int_{L_i} \vec{E} \cdot d\vec{s} \\
b_i &= \int_{A_i} \vec{B} \cdot d\vec{A}, & h_i &= \int_{\vec{L}_i} \vec{H} \cdot d\vec{s} \\
j_i &= \int_{\vec{A}_i} \vec{J} \cdot d\vec{A}, & q_i &= \int_{\vec{V}_i} \rho dV
\end{aligned}$$

Die Zustandsgrößen d_i und e_i sowie b_i und h_i sind jeweils an den gleichen Stellen angeordnet. Über ein Analogon zu den Materialgleichungen sollen sie jeweils in Beziehung zueinander gesetzt werden. Um ein geeignetes Analogon für die Materialgleichungen zu finden, wird jeweils der Gitterfluß in Bezug zur Gitterspannung gesetzt. Dieses Verhältnis, also d_i/e_i und b_i/h_i sowie j_i/e_i , wird dann jeweils approximiert, indem die zugehörigen Materialparameter gemittelt werden. Die gemittelten Größen werden dann in den sog. *Materialmatrizen* D_ε , $\tilde{D}_\mu$ und D_κ zusammengefaßt. Damit ergibt sich folgende Übertragung der elektromagnetischen Materialgleichungen in den Gitterraum:

$$\begin{aligned}
\vec{D} &= \varepsilon \vec{E} & \rightarrow & d = D_\varepsilon e \\
\vec{B} &= \mu \vec{H} & \rightarrow & b = \tilde{D}_\mu h \\
\vec{J}_L &= \kappa \vec{E} & \rightarrow & j_l = D_\kappa e
\end{aligned}$$

Für eine ausführlichere Darstellung dieser Approximation sei z.B. auf [23] verwiesen.

B.1.4 Diskretisierung der Integrale

Die Zustandsgrößen sind als Flächen- und Linienintegrale über Elementarflächen bzw. Elementarstrecken definiert. Benötigt wird nun noch ein eindeutiger Zusammenhang zwischen diskreten Feldgrößen und den Zustandsgrößen. Dazu wird analog zu den Differenzenverfahren zur Diskretisierung einer Differentialgleichung die Idee ausgenutzt, daß ein Integral als Grenzwert definiert ist. Die einfachste numerische Methode zur Durchführung des Linienintegrals benützt eine Stützstelle in der Mitte des Integrationsintervalls:

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta} f(x) dx = \Delta \cdot f\left(x_0 + \frac{\Delta}{2}\right) + O(\Delta^3). \quad (\text{B.1})$$

Mit einer entsprechend einfachen Integrationsformel wird ein Flächenintegral approximiert:

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta} \int_{y_0}^{y_0+\Delta} f(x, y) dx dy = \Delta^2 \cdot f\left(x_0 + \frac{\Delta}{2}, y_0 + \frac{\Delta}{2}\right) + O(\Delta^4). \quad (\text{B.2})$$

Diese Approximationsformel wird bei der Finite-Integrations-Technik verwendet. Die Feldgrößen sind auf dem Gitterduplett $(G, \tilde{G})$ genauso angeordnet wie die Zustandsgrößen. Für die summierten Formeln gilt $O(\Delta^2)$ als Abschätzung für das Restglied des Linien- und Flächenintegrals.

B.1.5 Spezielle Eigenschaften dual-orthogonaler FIT-Gitter

Für dual-orthogonale FIT-Gitter wird schließlich noch eine weitere vektoranalytische Eigenschaft elektromagnetischer Felder auf die algebraischen Lösungen übertragen:

Lemma B.1.5 *Auf dual-orthogonalen FIT-Gittern gilt die Stetigkeit von $\vec{E}_\parallel$ und $\vec{B}_\perp$ an Grenzflächen verschiedener Materialien.*

Zum Beweis wird eine Gitterbelegung mit e und b betrachtet.

- (i) Das elektrische Feld $\vec{E}$ wird nur durch tangential zu den Elementarvolumina liegenden Komponenten repräsentiert. Auch bei der Füllung der angrenzenden Zellen mit unterschiedlichem ε oder κ ist die berechnete Feldstärke daher stetig [9].
- (ii) Bei aneinandergrenzenden Elementarvolumina mit unterschiedlichem μ werden nur die senkrecht zur Materialoberfläche stehenden Komponenten der magnetischen Flußdichte berechnet, so daß Stetigkeit gilt [9].

Dies verdeutlicht einen wesentlichen Vorteil der Finite-Integrations-Technik gegenüber anderen Methoden, bei denen üblicherweise sämtliche Feldkomponenten in *einem* Punkt angeordnet sind, und die Stetigkeit der berechneten Feldgrößen daher nicht garantiert werden kann. Mittlerweile gibt es auch Varianten der Finite Elemente Methode, die die Feldkomponenten sehr ähnlich zur Finite-Integrations-Technik anordnen, vgl. z.B. [2], [13].

Für die eindeutige Lösbarkeit der Maxwell'schen Gleichungen und damit der Matrixgleichungen müssen Randbedingungen an der äußersten Oberfläche des betrachteten Objekts erfüllt sein. Diese Randflächen müssen nicht mit dem Rand des Gitters übereinstimmen.

Bemerkung B.1.3 *Die Randbedingungen können bei der Aufstellung der Differenzengleichungen auf einem FIT-Gitter in natürlicher Weise eingebaut werden und sind dann automatisch erfüllt.*

An einer ideal leitenden Oberfläche muß die Randbedingung erfüllt werden, daß die Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes dort den Wert Null annehmen. Diese Bedingung beinhaltet auch, daß die Normalkomponenten des magnetischen Feldes auf dieser Oberfläche verschwinden. Die ideal leitende Oberfläche wird im FIT-Gitter durch die Oberflächen einiger Elementarvolumina des FIT-Gitters angenähert. Die Zustandsgrößen e_i und b_i sind gerade so angeordnet, daß die Feldkomponenten von $\vec{E}$ dort tangential und die von $\vec{B}$ normal sind. Die Randbedingungen können somit durch einfaches Nullsetzen der entsprechenden Zustandsgrößen bereits bei der Aufstellung der Differenzengleichungen einbezogen werden.

Wie bereits erwähnt sind verschiedene Koordinatensysteme und verschiedene Gittertypen zur Diskretisierung mit der Finite-Integrations-Technik wählbar. Die Wahl des Koordinatensystems wird in Anpassung an das zu lösende Problem mit dem Ziel vorgenommen, eine möglichst gute Diskretisierung der Materialverteilung zu erhalten. Dies wird selbstverständlich stark erleichtert, wenn zumindest ein Teil der Grenzflächen deckungsgleich mit Koordinatenflächen gemacht werden kann. Außer dem Koordinatensystem kann weiterhin noch ein geeigneter Gittertyp gewählt werden. Die Bilder B.5 und B.6 zeigen zwei typische Gittertypen.

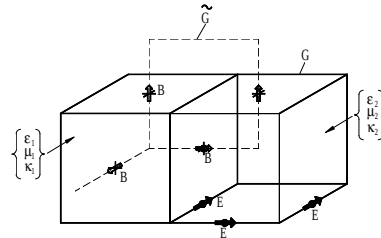


Abbildung B.5: Elementarvolumen eines dreidimensionalen Rechteckgitters, mit dualem Gitter $\tilde{G}$ sowie Materialfüllung und Anordnung der Komponenten von $\vec{E}$ und $\vec{B}$. Zeichnung: Weiland

Unregelmäßige, aber orthogonale FIT-Gitter entsprechen den sog. Box-Schemata bei den Finite Differenzenverfahren. Das Gitter G entspricht der Primärzerlegung, das duale Gitter $\tilde{G}$ der Sekundärzerlegung. Das dual-orthogonale FIT-Gitter $(G, \tilde{G})$ mit dem Dreiecksgitter G und dem dualen Hexagonalgitter $\tilde{G}$, das durch Wahl der Mittelsenkrechten auf Linien aus G entsteht, heißt bei den Box-Schemata Vernetzung "vom schwach spitzen Typ" [8].

Zusammenfassend kann also festgestellt werden, daß der Anwendungsbereich der Finite-Integrations-Technik uneingeschränkt mit dem der Maxwell'schen Gleichungen übereinstimmt. Bezüglich der möglichen Gittertypen und der vielen Anwendungsmöglichkeiten sei hier auf die vorhandene Literatur verwiesen. Ein besonders hervorzuhebendes Merkmal der Finite-Integrations-Technik ist ihre Anwendbarkeit auf unregelmäßige Gitter. [15], [17] behandeln die Anwendung auf Dreiecksgitter, [1] auf dreidimensionale dual-nichtorthogonale Gitter. [20] und [22] geben einen ausführlichen Gesamtüberblick.

Im folgenden wird die Finite-Integrations-Technik auf einige Problemklassen aus der Feldtheorie angewandt.

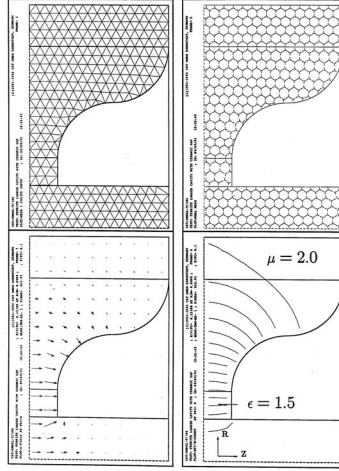


Abbildung B.6: Zweidimensionales Dreiecksgitter und berechnete Felder für eine zylindersymmetrische Struktur (mit Ferrit und Keramik gefüllter Hohlraumresonator). Oben links ist das Dreiecksgitter G abgebildet, oben rechts das zugehörige duale Gitter $\tilde{G}$, unten links das elektrische Feld $\vec{E}$ und unten rechts isometrische Linien von $H_\varphi \cdot r$.

B.2 Stationäre Felder

B.2.1 Magnetostatik

Bei Verwendung der Finite-Integrations-Technik zur Lösung der Maxwell'schen Gleichungen ergibt sich im Fall der Magnetostatik folgende Äquivalenz zwischen den kontinuierlichen und den diskreten Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \vec{J}_E & \Longleftrightarrow & \quad \tilde{C} \tilde{D}_\mu^{-1} b = j_e \\ \text{div } \vec{B} &= 0 & \Longleftrightarrow & \quad S b = 0 \end{aligned}$$

Der Vektorpotentialansatz muß nicht so wie in Abschnitt ?? beschrieben gewählt werden, sondern es kann auch anders vorgegangen werden: Im zweidimensional beschreibbaren Fall, also einer zylindersymmetrischen oder einer longitudinal invarianten Struktur, reicht der Ansatz eines Vektorpotentials $\vec{A} = (0, 0, A_z)$ mit nur einer Komponente in longitudinaler Richtung aus:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad \Longleftrightarrow \quad b = \tilde{C} a$$

Folgende kontinuierliche bzw. diskrete Gleichung ist zu lösen:

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A} \right) = \vec{J}_E \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{C} \tilde{D}_\mu^{-1} \tilde{C} a = j_e$$

Die Eigenschaften dieser und der folgenden Systemmatrizen werden in Abschnitt ?? behandelt.

Im dreidimensionalen Fall wird in Anlehnung an den analytischen Lösungsansatz für Differentialgleichungen eine allgemeine homogene Lösung mit einer speziellen inhomogenen Lösung kombiniert. Auf diese Weise kann auch in der Magnetostatik mit einem skalaren Potential gearbeitet werden. Das magnetische Feld $\vec{H}$ wird also in einen homogenen und einen inhomogenen Teil zerlegt:

$$\vec{H} := \vec{H}_h + \vec{H}_i.$$

Diese Lösungsanteile müssen die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H}_h &= 0 \\ \text{rot } \vec{H}_i &= \vec{J}_E \end{aligned}$$

Indem de facto unphysikalische magnetische Ladungen als Hilfsgrößen benutzt werden, ist es möglich, das Gleichungssystem

$$\operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} \varphi) = \operatorname{div}(\mu \vec{H}_i)$$

mit

$$\rho_m := \operatorname{div}(\mu \vec{H}_i)$$

aufzustellen. Dies kann als eine Divergenzgleichung aufgefaßt werden, für deren homogenen Teil ein skalares Potential $\vec{H}_h = -\operatorname{grad} \varphi$ benutzt werden kann:

$$\operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} \varphi) = \rho_m.$$

Dieser Ausdruck ist formal identisch mit der Problemgleichung der Elektrostatik. Als diskrete Gittergleichung ergibt sich:

$$\tilde{S} \tilde{D}_\mu \tilde{S}^T \Phi_M = -\rho_m.$$

Das resultierende Magnetfeld $\vec{H}$ ergibt sich dann aus:

$$\vec{H} = \vec{H}_i + \vec{H}_h = \vec{H}_i - \operatorname{grad} \Phi_M.$$

Dabei ist zu beachten, daß das skalare Potential Φ_M keinerlei physikalische Bedeutung hat, sondern eine reine Hilfsgröße darstellt.

Die Randwertprobleme können entgegen dem klassischen analytischen Fall eine Kombination aus vier Typen von Randbedingungen umfassen. Für Dirichlet-Randbedingungen, also $\varphi = \text{const.}$ auf dem Rand, wird wegen $\vec{H} = \vec{H}_i - \operatorname{grad} \varphi$ dann $H_\parallel \equiv 0$ gesetzt. Für Neumann-Randbedingungen, also $\partial \varphi / \partial n = 0$ auf dem Rand, muß $H_\perp \equiv 0$ gesetzt werden. Die offenen Randbedingungen sind ausführlich in [3] beschrieben. Schließlich ist auch die Wahl einer periodische Randbedingung möglich.

B.2.2 Elektrostatik

Bei Verwendung der Finite-Integrations-Technik zur Lösung der Maxwellschen Gleichungen ergibt sich im Fall der Elektrostatik folgende Äquivalenz zwischen den kontinuierlichen und den diskreten Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} \operatorname{rot} \vec{E} = 0 & \Longleftrightarrow \quad Ce = 0 \\ \operatorname{div} \vec{D} = \rho & \Longleftrightarrow \quad \tilde{S} D_\epsilon e = q \end{array}$$

Wie in (??) wird für das stationäre elektrische Feld $\vec{E}$ ein skalares Potential φ angesetzt. Für $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ ergibt sich folgende Umsetzung in Gittergleichungen:

$$\begin{array}{ll} \vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi & \Longleftrightarrow \quad e = \tilde{S}^T \Phi_E \\ \operatorname{div}(\epsilon \operatorname{grad} \varphi) = -\rho & \Longleftrightarrow \quad \tilde{S} D_\epsilon \tilde{S}^T \Phi_E = -q \end{array}$$

Auch hier können die Randwertprobleme wiederum eine Kombination aus vier Typen von Randbedingungen umfassen. Für Dirichlet-Randbedingungen, also $\varphi = \text{const.}$ auf dem Rand, wird wegen $\partial \varphi / \partial \tan = 0$ und $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ dann $E_\parallel \equiv 0$ gesetzt. Für Neumann-Randbedingungen, also $\partial \varphi / \partial n = 0$ auf dem Rand, muß $E_\perp \equiv 0$ gesetzt werden. Auch in der Elektrostatik ist die Wahl offener und periodischer Randbedingungen möglich.

B.2.3 Stationäre Strömungsfelder

Bei Verwendung der Finite-Integrations-Technik zur Lösung der Maxwellschen Gleichungen ergibt sich im Fall der stationären Strömungsfelder folgende Äquivalenz zwischen den kontinuierlichen und den diskreten Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} \operatorname{rot} \vec{E} = 0 & \Longleftrightarrow \quad Ce = 0 \\ \operatorname{div} \kappa \vec{E} = 0 & \Longleftrightarrow \quad \tilde{S} D_\kappa e = 0 \end{array}$$

Der Potentialansatz für das elektrische Feld $\vec{E}$ ist identisch mit dem der Elektrostatik. Die zu lösende kontinuierliche bzw. diskrete Potentialgleichung lautet dann:

$$\operatorname{div} \kappa \operatorname{grad} \varphi = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{S} D_\kappa \tilde{S}^T \Phi_E = 0.$$

Wiederum können die Randwertprobleme eine Kombination aus vier Typen von Randbedingungen umfassen. Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen sind identisch mit der Elektrostatik und offene oder periodische Randbedingungen können ebenso benutzt werden.

B.2.4 Stationäre Temperaturfelder

Die resultierenden Gleichungen des elektrostatischen Feldproblems sind formal identisch mit der Bestimmungsgleichung für die stationäre Temperaturverteilung in einem thermischen Prozess, der von der Wärmeleitung bestimmt wird. Solche Fragestellungen treten im Rahmen der theoretischen Elektrotechnik z.B. im Zusammenhang mit Wandverlusten in Hochfrequenzstrukturen auf. Die formale Analogie der Differentialgleichungen legt, besonders im Hinblick auf kombinierte Feld- und Temperaturberechnung, die Verwendung derselben numerische Methode nahe.

Bei Verwendung der Finite-Integrations-Technik zur Lösung der Differentialgleichung für stationäre Temperaturprobleme ergibt sich folgende Äquivalenz zwischen den kontinuierlichen und den diskreten Gleichungen:

$$\operatorname{div} \kappa_T \operatorname{grad} T = -w \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{S} D_{\kappa_T} \tilde{S}^T T = w.$$

Nun bedeutet die Dirichlet- Randbedingung die Vorgabe einer festen Temperatur $T = \text{const.}$ auf dem Rand und im Neumann-Fall mit $\partial T / \partial n = 0$ auf dem Rand wird gefordert, daß das Gradientenfeld der Temperatur keine Normalkomponente besitzt. Auch hier sind offene und periodische Randbedingungen erlaubt. Zusätzlich können gemischte Randbedingungen vorgegeben werden.

B.3 Quasistatische Felder

B.3.1 Elektro-Quasistatik

Bei Verwendung der Finite-Integrations-Technik zur Lösung der Maxwell'schen Gleichungen ergibt sich im Fall von langsam veränderlichen Felder, die entscheidend vom Verschiebungsstrom abhängen, bei harmonischer Zeitabhängigkeit folgende Äquivalenz zwischen den kontinuierlichen und den diskreten Gleichungen:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad C \underline{e} = 0 \quad (\text{B.3})$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = (i\omega + \kappa) \vec{E} + \vec{J}_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{C} \tilde{D}_\mu^{-1} \underline{b} = (i\omega D_\varepsilon + D_\kappa) \underline{e} + \underline{j}_0 \quad (\text{B.4})$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{S} D_\varepsilon \underline{e} = \underline{\rho} \quad (\text{B.5})$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad S \underline{b} = 0 \quad (\text{B.6})$$

Wegen (B.3) kann das elektrische Feld $\vec{E}$ als Gradient eines komplexen skalaren Potentials dargestellt werden:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{e} = \tilde{S}^T \underline{\Phi}_E. \quad (\text{B.7})$$

Einsetzen von (B.7) in (B.4) liefert

$$\operatorname{div} ((i\omega\varepsilon + \kappa) \operatorname{grad} \varphi) = \operatorname{div} (\vec{J}_L + \vec{J}_E) \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{S} (D_\kappa + i\omega D_\varepsilon) \tilde{S}^T \underline{\Phi}_E = \tilde{S} (\underline{j}_l + \underline{j}_e).$$

Ein Vergleich mit der Elektrostatik und den stationären Strömungsfeldern sowie Einführung der abkürzenden Schreibweise

$$A_\kappa = \tilde{S} D_\kappa \tilde{S}^T, \quad A_\varepsilon = \tilde{S} D_\varepsilon \tilde{S}^T, \quad \underline{p}_0 = \tilde{S} (\underline{j}_l + \underline{j}_e)$$

zeigt, daß die Matrix des diskreten Problems als "Realteil" $\tilde{S}D_\kappa\tilde{S}^T$ gerade die Systemmatrix A_κ für stationäre Strömungsfelder hat und als "Imaginärteil" $\omega\tilde{S}D_\varepsilon\tilde{S}^T$ die mit der Frequenz ω skalierte Systemmatrix A_ε der Elektrostatik. Zu lösen ist also

$$(A_\kappa + i\omega A_\varepsilon)\underline{\Phi}_E = \underline{p}_0. \quad (\text{B.8})$$

Die Systemmatrix $A = A_\kappa + i\omega A_\varepsilon$ ist komplex symmetrisch und, wie in Abschnitt ?? gezeigt wird, positiv stabil.

Bei der Dirichlet-Randbedingung, also festem Potential $\underline{\Phi}_E = \text{const.}$ auf dem Rand, wird wegen $\partial\underline{\Phi}_E/\partial_{\text{tan}} = 0$ und $\underline{\vec{E}} = -\text{grad}\underline{\Phi}_E$ dann $\underline{E}_\parallel \equiv 0$ gesetzt. Im Neumann-Fall mit $\partial\underline{\Phi}_E/\partial n = 0$ auf dem Rand ergibt sich $\underline{E}_\perp \equiv 0$.

B.3.2 Magneto-Quasistatik

Bei Verwendung der Finite-Integrations-Technik zur Lösung der Maxwell'schen Gleichungen ergibt sich im Fall langsam veränderlicher Felder mit allgemeiner Zeitabhängigkeit folgende Äquivalenz zwischen den kontinuierlichen und den diskreten Gleichungen, sofern die Materialgrößen ε, μ und κ keine Funktionen der Zeit sind:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \iff & Ce = -\dot{b} \\ \text{rot } \vec{H} &= \vec{J} & \iff & \tilde{C}\tilde{D}_\mu^{-1}b = j + D_\kappa e \\ \text{div } \vec{J} &= 0 & \iff & \tilde{S}j = 0 \\ \text{div } \vec{B} &= 0 & \iff & Sb = 0. \end{aligned}$$

Differentiation von $\tilde{C}\tilde{D}_\mu^{-1}b = j + D_\kappa e$ und Einsetzen von $Ce = -\dot{b}$ führt zu

$$\tilde{C}\tilde{D}_\mu^{-1}Ce + D_\kappa \dot{e} = -\dot{j}. \quad (\text{B.9})$$

Durch Setzen von $y(t) := e$ entspricht (B.9) der Differentialgleichung erster Ordnung

$$\dot{y}(t) = Ly(t) + r(t)$$

mit $L = -D_\kappa^{-1}\tilde{C}\tilde{D}_\mu^{-1}C$ und $r(t) = -D_\kappa^{-1}\dot{j}$. Im allgemein zeitabhängigen Fall ist also eine Anfangswertaufgabe zu lösen. Da dieses Problem aus Stabilitätsgründen numerisch nicht mit expliziten Verfahren lösbar ist, müssen implizite oder semi-implizite Verfahren verwendet werden. Im Laufe dieser Verfahren sind wiederholt Gleichungssysteme mit obiger Matrix zu lösen.

Für harmonische Zeitabhängigkeit ist $\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}(\underline{\vec{E}}(\vec{r})e^{i\omega t})$. Nach Ausführen der Zeitableitung und Herauskürzen von $\exp(i\omega t)$ ergibt sich die diskrete Gleichung

$$(\tilde{C}\tilde{D}_\mu^{-1}C + i\omega D_\kappa)\underline{e} = -i\omega \underline{j}$$

und damit eine Randwertaufgabe.

B.4 Allgemein zeitabhängige Felder und elektromagnetische Wellen

B.4.1 Allgemein zeitabhängige Felder

Für die allgemein zeitabhängigen Felder empfiehlt sich zur Formulierung der diskreten Anfangswertaufgabe die Verwendung von sogenannten Mittelpunkt-Zustandsgrößen [4] statt der bisher verwendeten integralen Zustandsgrößen. Sei demnach $e' = [\vec{E}']$ der Vektor aller Mittelwerte des

normierten elektrischen Feldes aus (??) entlang der Gitterkanten, $h' = [\vec{h}']$ entsprechend für das magnetische Feld.

$$\mathbf{u}(t) := \begin{pmatrix} \vec{E}' \\ \vec{H}' \end{pmatrix} \iff u := \begin{pmatrix} e' \\ h' \end{pmatrix}$$

Der Operator $\mathbf{L}$ findet bei Verwendung der Finite-Integrations-Technik folgendes diskretes Analogon:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} -\frac{\kappa}{\varepsilon} & \frac{1}{\varepsilon_r} \text{rot} \frac{1}{\mu_0} \\ -\frac{1}{\mu_r} \text{rot} \frac{1}{\varepsilon_0} & 0 \end{pmatrix} \iff A = \begin{pmatrix} -D_\kappa D_\varepsilon^{-1} & D_{\varepsilon_r}^{-1} \tilde{D}_A^{-1} \tilde{C} \tilde{D}_s \tilde{D}_{\mu_0}^{-1} \\ -\tilde{D}_{\mu_r}^{-1} D_A^{-1} C D_s D_{\varepsilon_0}^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Die Mittelwert-Zustandsgrößen und die integralen Zustandsgrößen sind über die Operatoren D_s , $\tilde{D}_s$, D_A und $\tilde{D}_A$ für die Linien- bzw. Flächenintegrale auf primärem bzw. dualem Gitter verbunden. So gilt beispielsweise $e = D_s \tilde{D}_{\mu_0}^{1/2} D_{\varepsilon_0}^{-1/2} e'$.

Das Anfangswertproblem kann mit Ein- oder Mehrschrittverfahren gelöst werden. Aus Stabilitätsgründen werden für niederfrequente Felder implizite Verfahren gewählt. Lehrbücher über die numerische Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen geben ausführliche Information über die im allgemeinen verwendeten Verfahren. In [4] werden spezielle Studien zu obigem Anfangswertproblem für hochfrequente Felder vorgestellt.

Langsam veränderliche Felder Bei Verwendung eines impliziten Verfahrens zur numerischen Zeitintegration wird in *jedem Zeitschritt* die Lösung eines Gleichungssystems mit dieser Matrix notwendig. Da diese Matrix sehr schlecht konditioniert [12] ist, handelt es sich um ein mathematisch äußerst anspruchsvolles Problem, das bisher noch nicht zufriedenstellend lösbar war.

B.4.2 Harmonische Schwingungen

Harmonische Schwingungen, wie z.B. Wirbelstromprobleme, sind Probleme im Frequenzbereich. Bei Verwendung der Finite-Integrations-Technik zur Lösung der Maxwellschen Gleichungen ergibt sich im Fall angeregter harmonischer Schwingungen folgende Äquivalenz zwischen den kontinuierlichen und den diskreten Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{rot } \underline{\vec{E}} &= -i\omega \underline{\vec{B}} & \iff & C \underline{e} = -i\omega \underline{b} \\ \text{rot } \underline{\vec{H}} &= \underline{\vec{J}} + i\omega \underline{\vec{D}} & \iff & \tilde{C} \underline{h} = \underline{j} + i\omega \underline{d} \\ \text{div } \underline{\vec{D}} &= \underline{\rho} & \iff & \tilde{S} \underline{d} = \underline{\rho} \\ \text{div } \underline{\vec{B}} &= 0 & \iff & S \underline{b} = 0 \end{aligned}$$

Die relevanten kontinuierlichen und diskreten Materialgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} \underline{\vec{D}} &= \underline{\varepsilon} \underline{\vec{E}} & \iff & \underline{d} = \underline{D}_\varepsilon \underline{e} \\ \underline{\vec{B}} &= \underline{\mu} \underline{\vec{H}} & \iff & \underline{b} = \underline{D}_\mu \underline{h} \\ \underline{\vec{J}} &= \underline{\vec{J}}_L + \underline{\vec{J}}_E & \iff & \underline{j} = D_\kappa \underline{e} + \underline{j}_e \end{aligned}$$

Die Felder werden durch einen elektrischen Strom $\underline{\vec{j}}_e$, der in einer geschlossenen Stromschleife oder einem stromführenden Draht fließt, angeregt.

Der anregende Strom kann z.B. auch die Fouriertransformierte eines sich längs einer Bahn bewegenden Elementarteilchens sein. Einsetzen der Gleichungen ineinander und Umformungen führen zu

$$\left(\text{rot } \frac{1}{\underline{\mu}} \text{rot } - \omega^2 \underline{\varepsilon}' \right) \underline{\vec{E}} = -i\omega \underline{\vec{J}}_E \iff (\tilde{C} \tilde{D} C - \omega^2 \underline{D}) \underline{e} = -i\omega \underline{j}_e$$

Die rechte Seite $-i\omega \underline{j}_e$ beinhaltet die eingeprägte Stromanregung, $\underline{\varepsilon}'$ faßt die komplexe Konduktivität und Permittivität zusammen.

Für den zylindersymmetrischen Fall ohne azimutale Abhängigkeit (Monopolfelder) mit Anregung auf der Achse wird in Abschnitt ?? ein spezieller Mehrgitteralgorithmus vorgestellt, der in [15] entwickelt wurde. Das Gleichungssystem kann dann auch als

$$\underline{M} \vec{h} = (A + ik'D - k^2 I) \vec{h} = k^2 \vec{h}^* \quad (\text{B.10})$$

geschrieben werden. Es wird hier aus Referenzgründen in dieser Formulierung angegeben. Die Lösung $\vec{h}$ enthält die zu bestimmenden azimutalen Magnetfeldkomponenten.

Der Fall resonanter Eigenschwingungen führt bei Anwendung der FIT auf ein linear-algebraisches Eigenwertproblem. Diese Problematik wird z.B. in [20] und [14] für kartesische FIT-Gitter, in [3] für kreiszylindrische FIT-Gitter und in [15] sowie [1] für nicht-orthogonale FIT-Gitter behandelt. ivity zusammen.

Für den zylindersymmetrischen Fall ohne azimutale Abhängigkeit (Monopolfelder) mit Anregung auf der Achse wird in Abschnitt ?? ein spezieller Mehrgitteralgorithmus vorgestellt, der in [15] entwickelt wurde. Das Gleichungssystem kann dann auch als

$$\underline{M} \vec{h} = (A + ik'D - k^2 I) \vec{h} = k^2 \vec{h}^* \quad (\text{B.11})$$

geschrieben werden. Es wird hier aus Referenzgründen in dieser Formulierung angegeben. Die Lösung $\vec{h}$ enthält die zu bestimmenden azimutalen Magnetfeldkomponenten.

Der Fall resonanter Eigenschwingungen führt bei Anwendung der FIT auf ein linear-algebraisches Eigenwertproblem. Diese Problematik wird z.B. in [20] und [14] für kartesische FIT-Gitter, in [3] für kreiszylindrische FIT-Gitter und in [15] sowie [1] für nicht-orthogonale FIT-Gitter behandelt.

Literaturverzeichnis

- [1] U. Blell. *Zur numerischen Berechnung elektrostatischer und zeitharmonischer elektromagnetischer Felder im nichtorthogonalen dreidimensionalen Gitter*. PhD thesis, Darmstadt University of Technology, 1994.
- [2] F. Brezzi, J. Douglas, and L.D. Marini. Two Families of Mixed Finite Elements for Second Order Elliptic Problems. *Numer. Math.*, 47:217–235, 1985.
- [3] M. Dehler. *Numerische Lösung der Maxwell'schen Gleichungen auf kreiszylindrischen Gittern*. PhD thesis, Darmstadt University of Technology, 1993.
- [4] M. Dohlus. *Ein Beitrag zur numerischen Berechnung elektromagnetischer Felder im Zeitbereich*. PhD thesis, Darmstadt University of Technology, 1992.
- [5] M. Dohlus, P. Thoma, and T. Weiland. Stability of Finite Difference Time Domain Methods related to Space and Time Discretization. *IEEE-MTT*. submitted.
- [6] P. Fellingner. *Ein Verfahren zur numerischen Lösung elastischer Wellenausbreitungsprobleme im Zeitbereich durch direkte Diskretisierung der elastodynamischen Grundgleichungen*. PhD thesis, Gesamthochschule Kassel, 1991.
- [7] P. Hahne. *Zur numerischen Feldberechnung zeitharmonischer elektromagnetischer Felder*. PhD thesis, Darmstadt University of Technology, 1992.
- [8] B. Heinrich. *Finite Difference Methods on Irregular Networks*. Akademie Verlag, Berlin, 1987.
- [9] J.D. Jackson. *Klassische Elektrodynamik*. W. de Gruyter, Berlin, New York, 1983.
- [10] K. Paulsen and D.R. Lynch. Elimination of Vector Parasites in Finite Element Maxwell Solutions. *IEEE-MTT*, 39(3):395–404, March 1991.
- [11] P. Pinder and T. Weiland. Numerical Calculation of Coupled Electromagnetic and Thermal Fields Using the Finite Integration Method. In *PIERS'96*, 1996.
- [12] T. Pröpper. *Numerische Integration der Gitter-Maxwell-Gleichungen zur Lösung langsam-veränderlicher Feldprobleme*. PhD thesis, Darmstadt University of Technology, 1995.
- [13] P.-A. Raviart and J.-M. Thomas. A Mixed Finite Element Method for Second Order Elliptic Problems. In I. Galligani and E. Magenes, editors, *Mathematical Aspects of the Finite Element Method*, pages 292–315. Springer-Verlag, 1977.
- [14] D. Schmitt. *Zur numerischen Berechnung von Resonatoren und Wellenleitern*. PhD thesis, Darmstadt University of Technology, 1994.
- [15] U. van Rienen. *Zur numerischen Berechnung zeitharmonischer elektromagnetischer Felder in offenen, zylindersymmetrischen Strukturen unter Verwendung von Mehrgitterverfahren*. PhD thesis, Darmstadt University of Technology, 1989.

- [16] U. van Rienen, P. Pinder, and T. Weiland. Consistent Finite Integration Approach for the Coupled Calculation of Electromagnetic Fields and Stationary Temperature Distributions. In *7th Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation (CEFC)*, page 294, Okayama, Japan, March 1996.
- [17] U. van Rienen and T. Weiland. Triangular Discretization Method for the Evaluation of RF-Fields in Waveguides and Cylindrically Symmetric Cavities. *Part.Acc.*, 20:239–267, 1986/87.
- [18] T. Weiland. Eine Methode zur Lösung der Maxwellschen Gleichungen für sechskomponentige Felder auf diskreter Basis. *AEÜ*, 31:116–120, 1977.
- [19] T. Weiland. Zur Berechnung der Wirbelströme in beliebig geformten, lamellierten, dreidimensionalen Eisenkörpern. *Archiv für Elektrotechnik*, 60:345–351, 1978.
- [20] T. Weiland. On the Numerical Solution of Maxwell's Equations and Applications in Accelerator Physics. *Part.Acc.*, 15:245–291, 1984.
- [21] T. Weiland. On the Unique Numerical Solution of Maxwellian Eigenvalue Problems in Three Dimensions. *Part.Acc.*, 17:227–242, 1985.
- [22] T. Weiland. Ein allgemeines Verfahren zur Lösung der Maxwell'schen Gleichungen und seine Anwendung in Physik und Technik. *Physikalische Blätter*, 41:380, 1986.
- [23] T. Weiland. Elektromagnetisches CAD - Rechnergestützte Methoden zur Berechnung von Feldern. Script, Darmstadt University of Technology, Mai 1995.
- [24] T. Weiland. High Precision Eigenmode Computation. *Part.Acc.*, 56:61–82, 1996.
- [25] H. Wolter. *Berechnung akustischer Wellen und Resonatoren mit der FIT-Methode*. PhD thesis, Darmstadt University of Technology, 1995.
- [26] K.S. Yee. Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media. *IEEE-AP*, 14:302–307, 1966.