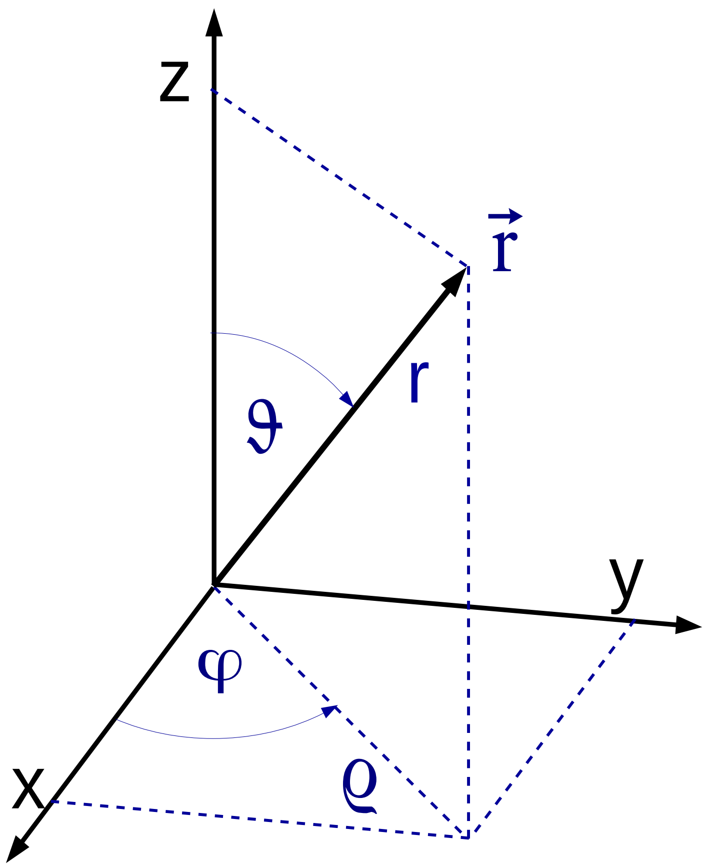
Hilfsblätter zur "Theoretischen Elektrotechnik"

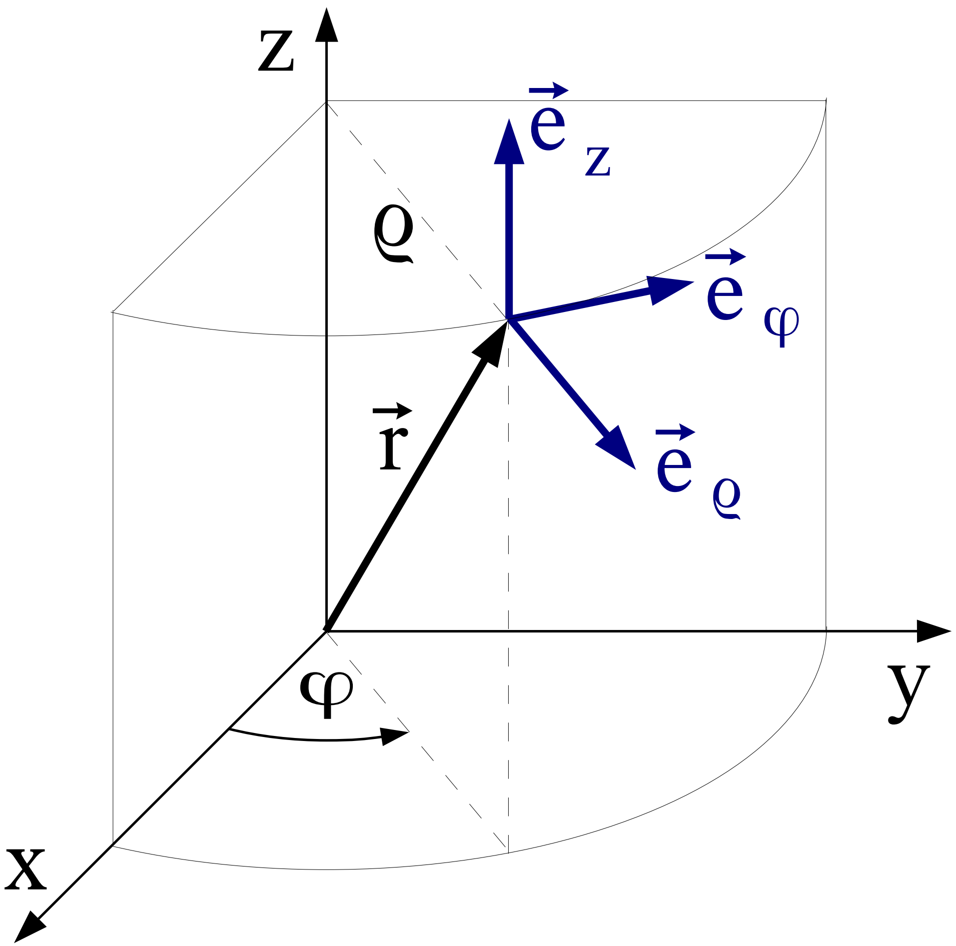
Der Zusammenhang zwischen kartesischen, Kreiszylinder- und Kugelkoordinaten

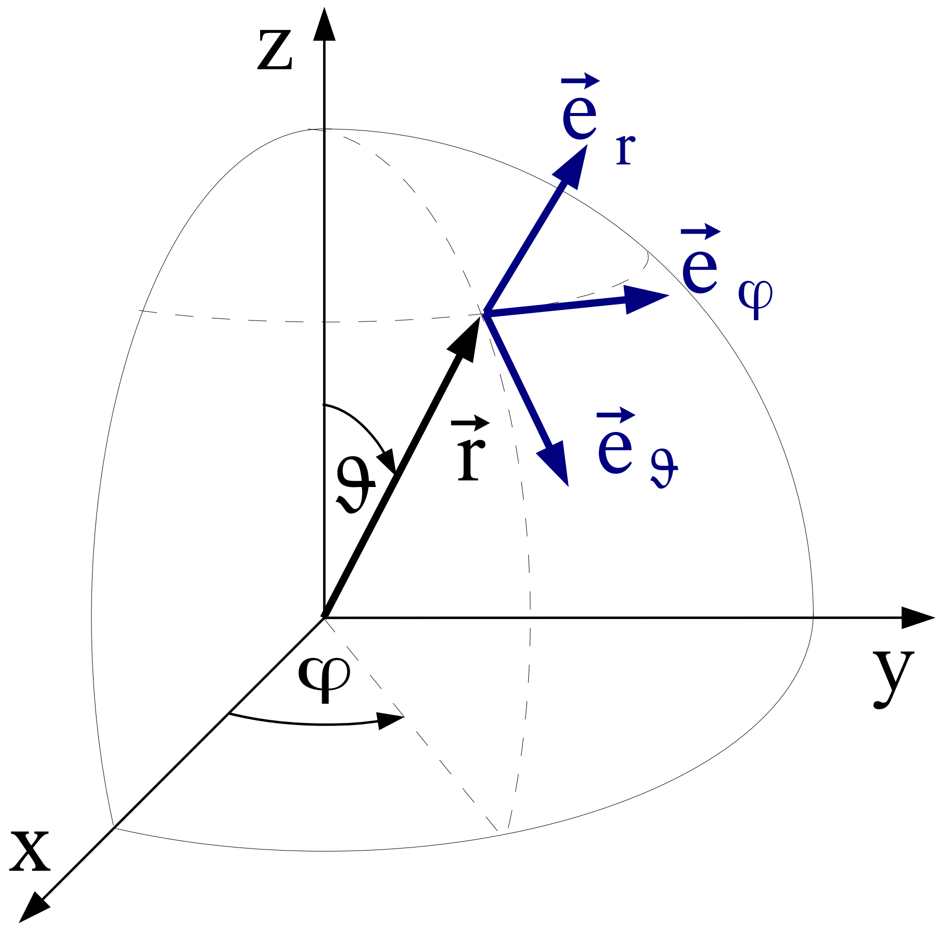


Kartesische Koordinaten	Zylinderkoordinaten	Kugelkoordinaten
x	$\varrho \cos\varphi$	$r \sin\vartheta \cos\varphi$
y	$\varrho \sin\varphi$	$r \sin\vartheta \sin\varphi$
z	z	$r \cos\vartheta$
$\sqrt{x^2 + y^2}$	ϱ	$r \sin\vartheta$
$\arctan\frac{y}{x}$	φ	φ
z	z	$r \cos\vartheta$
$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$\sqrt{\varrho^2 + z^2}$	r
$\arctan\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$	$\arctan\frac{\varrho}{z}$	ϑ
$\arctan\frac{y}{x}$	φ	φ

Dr. Dirk Hecht, Universität Rostock, Institut für Allgemeine Elektrotechnik, April 2015, August 2020

Kreiszylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten





<u>Zylinderkoordinaten</u>: ϱ, φ, z

<u>Kugelkoordinaten</u>: r, ϑ, φ

Die Einheitsvektoren zeigen in Richtung wachsender Koordinaten.

Dr. Dirk Hecht, Universität Rostock, Institut für Allgemeine Elektrotechnik, April 2015, August 2020

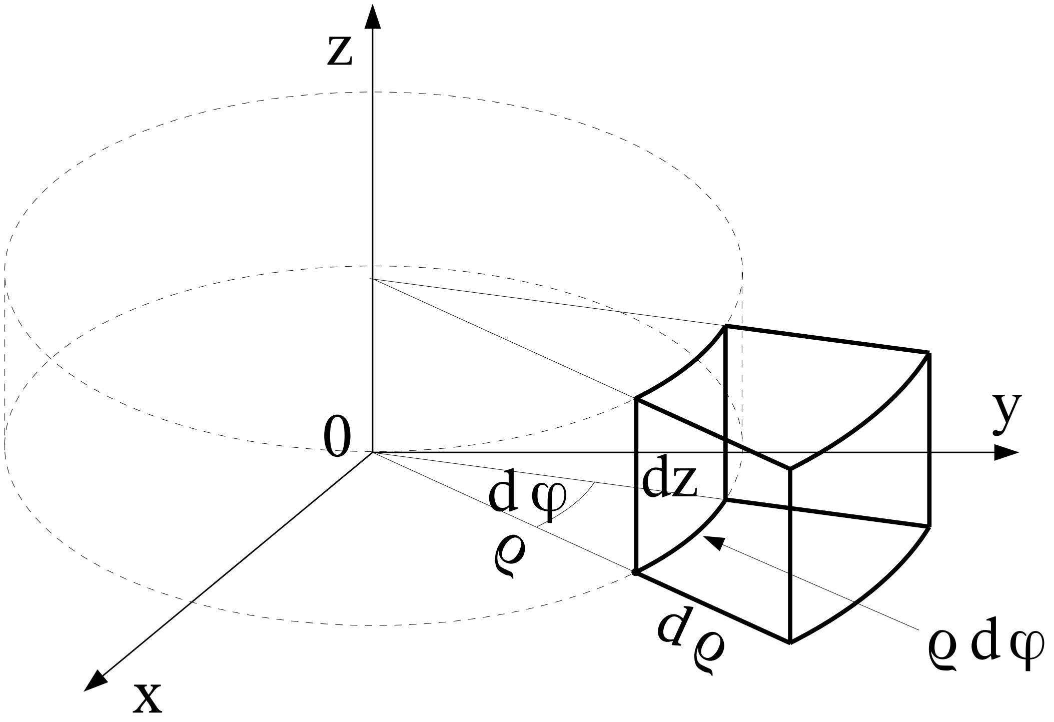
Der Zusammenhang zwischen den Vektorkomponenten in verschiedenen Koordinatensystemen

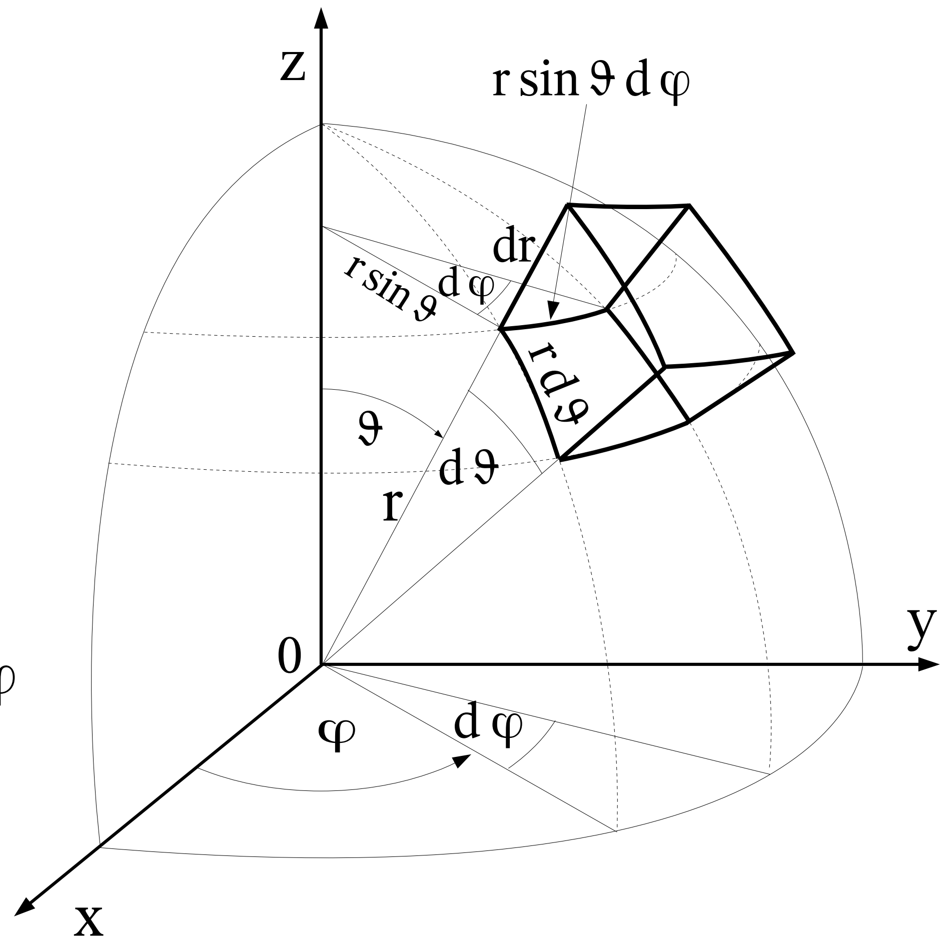
Kartesische Koordinaten	Zylinderkoordinaten	Kugelkoordinaten
A_x A_y A_z	$A_\varrho \cos\varphi - A_\varphi \sin\varphi$ $A_\varrho \sin\varphi + A_\varphi \cos\varphi$ A_z	$A_r \sin\vartheta \cos\varphi + A_\vartheta \cos\vartheta \cos\varphi - A_\varphi \sin\varphi$ $A_r \sin\vartheta \sin\varphi + A_\vartheta \cos\vartheta \sin\varphi + A_\varphi \sin\varphi$ $A_r \cos\vartheta - A_\vartheta \sin\vartheta$
$A_x \cos\varphi + A_y \sin\varphi$ $-A_x \sin\varphi + A_y \cos\varphi$ A_z	A_ϱ A_φ A_z	$A_r \sin\vartheta + A_\vartheta \cos\vartheta$ A_φ $A_r \cos\vartheta - A_\vartheta \sin\vartheta$
$A_x \sin\vartheta \cos\varphi + A_y \sin\vartheta \sin\varphi + A_z \cos\vartheta$ $A_x \cos\vartheta \cos\varphi + A_y \cos\vartheta \sin\varphi - A_z \sin\vartheta$ $-A_x \sin\varphi + A_y \cos\varphi$	$A_\varrho \sin\vartheta + A_z \cos\vartheta$ $A_\varrho \cos\vartheta - A_z \sin\vartheta$ A_φ	A_r A_ϑ A_φ

Setzt man an Stelle der Vektorkomponenten die Einheitsvektoren ein, so erhält man den Zusammenhang zwischen den Einheitsvektoren in den verschiedenen Koordinatensystemen.

Dr. Dirk Hecht, Universität Rostock, Institut für Allgemeine Elektrotechnik, April 2015, August 2020

Linien-, Flächen- und Volumenelemente in Kreiszylinder- und Kugelkoordinaten





$$dV = d\varrho \cdot \varrho\, d\varphi \cdot dz$$

$$dV = dr \cdot r\, d\vartheta \cdot r \sin\vartheta\, d\varphi$$

Dr. Dirk Hecht, Universität Rostock, Institut für Allgemeine Elektrotechnik, April 2015, August 2020

Hilfsblätter zur "Theoretischen Elektrotechnik"

Vektoranalytische Ausdrücke in verschiedenen Koordinatensystemen

	Kartesische Koordinaten	Zylinderkoordinaten	Kugelkoordinaten
$\mathrm{grad}\,\Phi$	$\vec{e}_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z}$	$\vec{e}_\varrho \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z}$	$\vec{e}_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$
$\mathrm{div}\,\vec{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho A_\varrho\right) + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(A_\vartheta \sin\vartheta\right) + \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$
$\mathrm{rot}\,\vec{A}$	$\vec{e}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) +$ $+ \vec{e}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) +$ $+ \vec{e}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$	$\vec{e}_\varrho \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right) +$ $+ \vec{e}_\varphi \left(\frac{\partial A_\varrho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \varrho}\right) +$ $+ \vec{e}_z \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho A_\varphi\right) - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial A_\varrho}{\partial \varphi}\right)$	$\vec{e}_r \frac{1}{r \sin\vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(A_\varphi \sin\vartheta\right) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi}\right) +$ $+ \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(r A_\varphi\right)\right) +$ $+ \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r A_\vartheta\right) - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta}\right)$
$\Delta\Phi$	$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho}\right) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}$
$\vec{ds}$	$\vec{e}_x dx + \vec{e}_y dy + \vec{e}_z dz$	$\vec{e}_\varrho d\varrho + \vec{e}_\varphi \varrho\, d\varphi + \vec{e}_z dz$	$\vec{e}_r dr + \vec{e}_\vartheta r\, d\vartheta + \vec{e}_\varphi r \sin\vartheta\, d\varphi$

Dr. Dirk Hecht, Universität Rostock, Institut für Allgemeine Elektrotechnik, April 2015, August 2020

Formeln zur Vektoralgebra und Vektoranalysis

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

$$\operatorname{grad}(\Phi + \Psi) = \operatorname{grad}\Phi + \operatorname{grad}\Psi$$

$$\operatorname{grad}(c\,\Phi) = c\operatorname{grad}\Phi \qquad c = \text{const.}$$

$$\operatorname{grad}(\Phi\Psi) = \Phi\operatorname{grad}\Psi + \Psi\operatorname{grad}\Phi$$

$$\operatorname{grad}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{A}\operatorname{grad})\vec{B} + (\vec{B}\operatorname{grad})\vec{A} + \vec{A}\times\operatorname{rot}\vec{B} + \vec{B}\times\operatorname{rot}\vec{A}$$

$$\operatorname{grad} r = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{e}_r \quad \text{mit} \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\operatorname{grad}\Phi(r) = \Phi'(r)\vec{e}_r$$

$$\operatorname{grad}\frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{1}{r^2}\vec{e}_r \quad ; \quad \operatorname{grad}[\ln(r)] = \frac{\vec{r}}{r^2} = \frac{1}{r}\vec{e}_r$$

$$\operatorname{div}(\vec{A}+\vec{B}) = \operatorname{div}\vec{A} + \operatorname{div}\vec{B} \;;\; \operatorname{div}(c\,\vec{A}) = c\operatorname{div}\vec{A} \qquad c = \text{const.}$$

$$\operatorname{div}(\Phi\vec{A}) = \Phi\operatorname{div}\vec{A} + \vec{A}\operatorname{grad}\Phi$$

$$\operatorname{div}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\operatorname{rot}\vec{A} - \vec{A}\operatorname{rot}\vec{B}$$

$$\operatorname{div}\vec{e}_r = \frac{2}{r} \quad ; \quad \operatorname{div}\vec{r} = 3 \quad \text{mit} \quad \vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$$

$$\operatorname{div}[\Phi(r)\vec{r}] = \operatorname{div}\vec{r}\cdot\Phi(r) + r\cdot\Phi'(r) \quad ; \quad \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A} = 0$$

$$\operatorname{rot}(\vec{A}+\vec{B}) = \operatorname{rot}\vec{A}+\operatorname{rot}\vec{B} \quad ; \quad \operatorname{rot}(c\,\vec{A}) = c\operatorname{rot}\vec{A}$$

$$\operatorname{rot}(\Phi\vec{A}) = \Phi\operatorname{rot}\vec{A} + \operatorname{grad}\Phi\times\vec{A}$$

$$\operatorname{rot}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\operatorname{div}\vec{B} - \vec{B}\operatorname{div}\vec{A} + (\vec{B}\operatorname{grad})\vec{A} - (\vec{A}\operatorname{grad})\vec{B}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \Delta\vec{A}$$

$$\operatorname{rot}[\Phi(r)\,\vec{r} = \vec{0}] \quad ; \quad \operatorname{rot}(\operatorname{grad}\Phi) = \vec{0}$$

$$(\vec{A}\operatorname{grad})\vec{B} = (\vec{A}\operatorname{grad}B_x)\vec{e}_x + (\vec{A}\operatorname{grad}B_y)\vec{e}_y + (\vec{A}\operatorname{grad}B_z)\vec{e}_z$$

$$\Delta\vec{A} = \Delta A_x\vec{e}_x + \Delta A_y\vec{e}_y + \Delta A_z\vec{e}_z =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right)\vec{e}_y +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\vec{e}_z$$

STOKESscher Integralsatz: $\oint \vec{H}\cdot d\vec{s} = \iint \operatorname{rot}\vec{H}\,d\vec{A}$

GAUSSscher Integralsatz: $\oint\!\!\!\oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = \iiint \operatorname{div}\vec{B}\,dV$

Dr. Dirk Hecht, Universität Rostock, Institut für Allgemeine Elektrotechnik, April 2015, August 2020