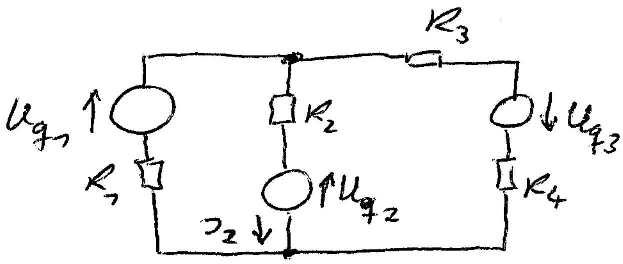
72

geg:



ges: I_2 nach Überlagerungssatz mit Stromteiler-Regel

$$I_{2(1)} = \underbrace{\frac{U_{q1}}{R_1 + R_2 || (R_3 + R_4)}}_{\text{Strom durch } U_{q1}} \cdot \underbrace{\frac{(R_3 + R_4)}{R_2 + (R_3 + R_4)}}_{\text{Stromteilerf. für } I_{2(1)}}$$

$$I_{2(2)} = - \frac{U_{q2}}{R_2 + R_1 || (R_3 + R_4)} \quad \hat{=} \text{ Strom durch } U_{q2}$$

$$I_{2(3)} = - \underbrace{\frac{U_{q3}}{R_3 + R_4 + (R_1 || R_2)}}_{\text{Strom durch } U_{q3}} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$\underline{\underline{I_2 = I_{2(1)} + I_{2(2)} + I_{2(3)}}} = \ldots$$

$\downarrow$ ev. zusammenfassen ...

---

in dieser Datei sind enthalten:

Überlagerungssatz – Aufgaben

72, 75, 77, 78

Maschenstrom-Analyse

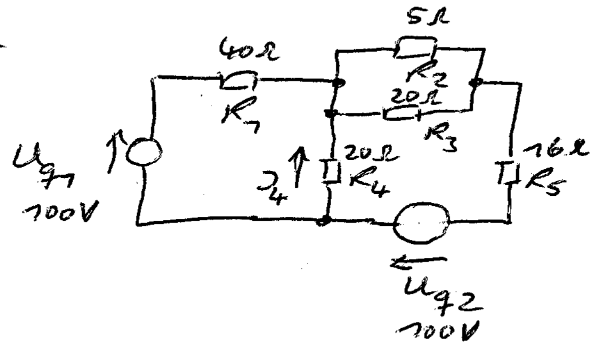
79, 88, 89, 90

Knotenspannungs-Analyse

83, 84, 85, 86

75

geg:



ges: I_4 nach Überlagerungssatz

a.) mit Stromteiler

$$I_4 = I_{4(1)} + I_{4(2)} = \overbrace{\frac{-U_{q1}}{R_1 + R_4 || (R_2 || R_3 + R_5)}}^{\text{Strom durch Quelle}} \cdot \overbrace{\frac{R_5 + R_2 || R_3}{R_4 + R_5 + R_2 || R_3}}^{\text{Stromteilerfaktor}}$$

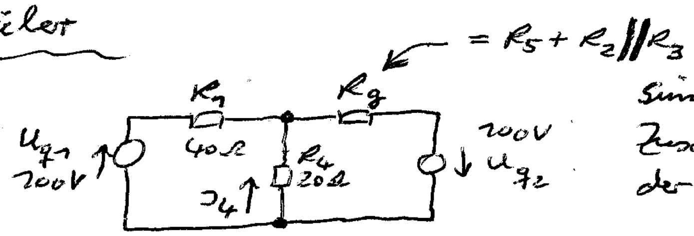
$$+ \frac{U_{q2}}{R_4 || R_1 + R_2 || R_3 + R_5} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_4}$$

$$I_4 = -\frac{100\,V \cdot 20}{50\,\Omega \cdot 40} + \frac{100\,V \cdot 40}{\frac{100}{3}\Omega \cdot 60}$$

$$\underline{\underline{I_4}} = -1\,A + 2\,A = \underline{\underline{1\,A}}$$

b) mit Spannungsteiler

$$I_4 = \frac{U_4}{R_4}$$



sinnvoll hier Zusammenfassg. der Widerst.

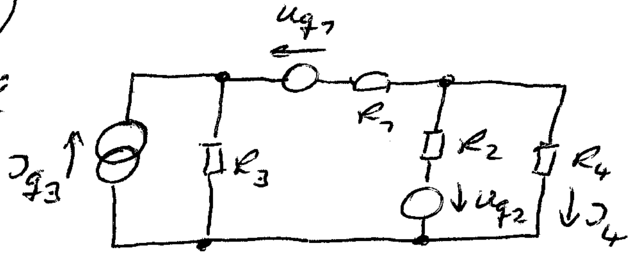
$$U_4 = -U_{q1} \frac{R_4 || R_g}{R_1 + R_4 || R_g} + U_{q2} \frac{R_4 || R_1}{R_g + R_4 || R_1}$$

$$= -100\,V \frac{1}{5} + 100\,V \frac{40}{100}$$

$$\underline{\underline{U_4}} = -20\,V + 40\,V = \underline{\underline{20\,V}} \quad \curvearrowright \quad I_4 = \frac{20\,V}{20\,\Omega} = 1\,A$$

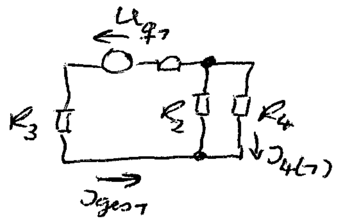
77

geg:



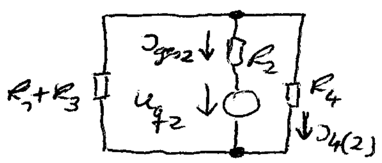
ges: I_4 nach Überlagerungssatz

- Wirkung von U_{q1}: $I_{ges1} = \dfrac{U_{q1}}{R_1+R_3+R_2 || R_4}$ (= Strom durch die Quelle 1)



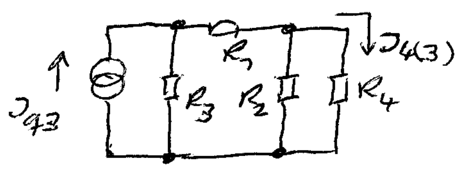
$$\curvearrowright \quad I_{4(1)} = -I_{ges1} \cdot \frac{R_2}{R_2+R_4} = \frac{-U_{q1} \cdot R_2}{(R_1+R_3)(R_2+R_4)+R_2R_4}$$

- Wirkung von U_{q2}: $I_{ges2} = \dfrac{U_{q2}}{(R_1+R_3)||R_4+R_2}$



$$\curvearrowright \quad I_{4(2)} = -I_{ges2} \cdot \frac{R_1+R_3}{R_1+R_3+R_4} = \frac{-U_{q2}(R_1+R_3)}{(R_1+R_3)(R_2+R_4)+R_2R_4}$$

- Wirkung von I_{q3}: $\dfrac{I_{4(3)}}{I_{q3}} = \dfrac{R_2}{R_2+R_4} \cdot \dfrac{R_3}{R_1+R_3+R_2 || R_4}$



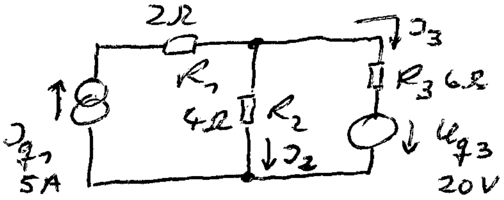
$$\curvearrowright \quad I_{4(3)} = \frac{I_{q3} \cdot R_2 \cdot R_3}{(R_1+R_3)(R_2+R_4)+R_2 \cdot R_4}$$

$$I_4 = I_{4(1)} + I_{4(2)} + I_{4(3)}$$

$$I_4 = \frac{-U_{q1}R_2 - U_{q2}(R_1+R_2) + I_{q3}R_2R_3}{(R_1+R_3)(R_2+R_4)+R_2R_4}$$

78

geg:



ges: Zweigströme I_2 u. I_3 nach Überlagerungssatz

$I_1 = 5A$

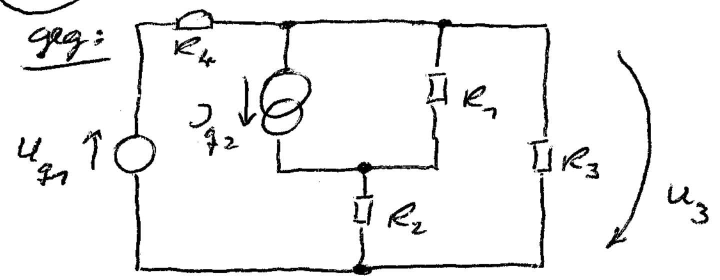
$$I_2 = I_{q1}\frac{R_3}{R_2+R_3} - \frac{U_{q3}}{R_2+R_3} = 5A\cdot\frac{6}{4+6} - \frac{20V}{(4+6)\Omega} = 1A$$

$$I_3 = I_{q1}\frac{R_2}{R_2+R_3} + \frac{U_{q3}}{R_2+R_3} = 5A\cdot\frac{4}{4+6} + \frac{20V}{(4+6)\Omega} = 4A$$

$$\left(I_{q1} = 5A = I_2 + I_3 \right)$$

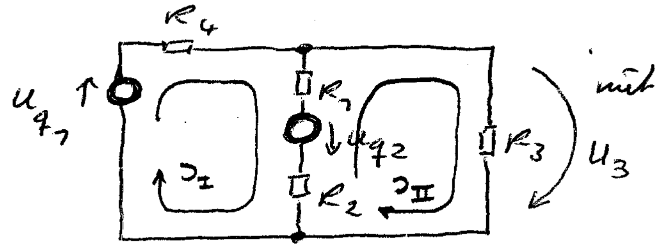
79

geg:



ges: U_3 nach Maschenstromanalyse / = Überlagerungssatz Superpositionsprinzip

Zuerst Quellenumwandlg (reale Stromquellen → reale Spanngsqu.)



mit $U_{q2} = J_{q2} \cdot R_1$

wobei gilt: $\underline{\underline{U_3 = \overline{J_{II}} \cdot R_3}}$

a) $\boxed{\text{Maschenstromanalyse:}}$

$$\text{(I)}\quad U_{q1} + U_{q2} = J_I(R_1 + R_2 + R_4) - J_{II}(R_1 + R_2)$$

$$\text{(II)}\quad -U_{q2} = -J_I(R_1 + R_2) + J_{II}(R_1 + R_2 + R_3)$$

Determinante:
$$\begin{pmatrix} (R_1+R_2+R_4) & -(R_1+R_2) \\ -(R_1+R_2) & (R_1+R_2+R_3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} J_I \\ J_{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{q1}+U_{q2} \\ -U_{q2} \end{pmatrix}$$

$$J_3 = J_{II} = \frac{D_{II}}{\det R} = \frac{\begin{vmatrix} R_1+R_2+R_4 & U_{q1}+U_{q2} \\ -(R_1+R_2) & -U_{q2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (R_1+R_2+R_4) & -(R_1+R_2) \\ -(R_1+R_2) & (R_1+R_2+R_3) \end{vmatrix}}$$

$$D_{II} = (\cancel{R_1+R_2}+R_4)(-U_{q2}) + (R_1+R_2)(U_{q1} + \cancel{U_{q2}}) = \underline{U_{q1}(R_1+R_2) - U_{q2} \cdot R_4}$$

$$\det R = (R_1+R_2+R_4)(R_1+R_2+R_3) - (R_1+R_2)^2$$
$$= \cancel{R_1^2} + \cancel{R_1R_2} + R_1R_3 + \cancel{R_2R_1} + \cancel{R_2^2} + R_2R_3 + R_4(R_1+R_2+R_3) - \cancel{R_1^2} - \cancel{2R_1R_2} - \cancel{R_2^2}$$
$$= R_1R_3 + R_2R_3 + R_1R_4 + R_2R_4 + R_3R_4 = \underline{\underline{R_4(R_1+R_2) + R_3(R_1+R_2+R_4)}}$$

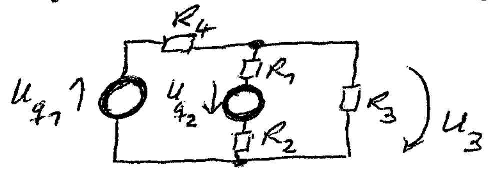
mit:
$U_3 = J_{II} \cdot R_3$
$U_{q2} = J_{q2} \cdot R_1$

$$\underline{\underline{U_3}} = \frac{U_{q1} \cdot R_3(R_1+R_2) - J_{q2} R_1 R_3 R_4}{R_1R_3 + R_2R_3 + R_1R_4 + R_2R_4 + R_3R_4} = \underline{\underline{\frac{U_{q1}(R_1+R_2) - J_{q2} R_1 R_4}{(R_1+R_2+R_4) + \frac{R_4}{R_3}(R_1+R_2)}}}$$

weiter zu Aufg. 79:

b.) $\boxed{\text{Superpositionsprinzip:}}$

Nutzung der Schaltung mit umgewandelter Quelle (I_{q2}, R_1):



$$\underline{\underline{U_3 = U_{3(1)} + U_{3(2)}}}$$

$$U_{3(1)} = U_{q1} \frac{(R_1+R_2) \| R_3}{R_4 + (R_1+R_2) \| R_3} = \frac{U_{q1}}{R_4 \frac{(R_1+R_2)+R_3}{(R_1+R_2)\cdot R_3} + 1}$$

$$= \frac{U_{q1}(R_1+R_2)}{\frac{R_4}{R_3}(R_1+R_2+R_3) + (R_1+R_2)}$$

$$U_{3(2)} = -U_{q2} \frac{R_3 \| R_4}{R_3 \| R_4 + R_1 + R_2} = -\frac{U_{q2}}{1 + \frac{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}{R_3 \cdot R_4}}$$

$$= -\frac{U_{q2}\cdot R_3 \cdot R_4}{R_3R_4 + R_1R_3 + R_1R_4 + R_2R_3 + R_2R_4}$$

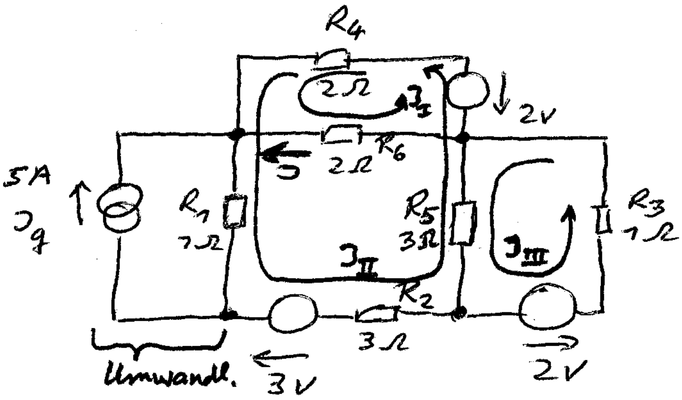
$$= -\frac{I_{q1}\cdot R_4 \cdot R_1}{R_4 + R_1 + R_2 + (R_1+R_2)\frac{R_4}{R_3}}$$

$$\curvearrowright \underline{\underline{U_3 = \frac{U_{q1}(R_1+R_2) - I_{q1} R_1 R_4}{R_1 + R_2 + R_4 + \frac{R_4}{R_3}(R_1+R_2)}}}$$

gleiches Ergebnis, wie bei MSA!

88

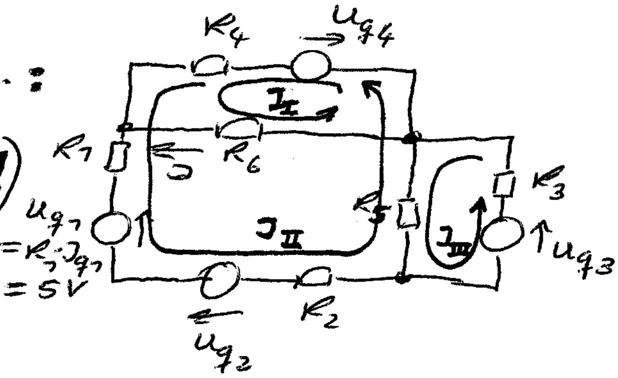
geg:



ges: I

nach Maschenstromanalyse

⟹ Quellenumwandlg.:
(techn. Stromquelle in -"- Spannungsquelle!)



$I = -I_I$

hier: $\left.\begin{array}{l} k = 3 \\ z = 5 \end{array}\right\}$ $\quad m = z-(k-1) = 3$ Gleichungen erforderlich!

$$\begin{array}{llllll} \mathrm{I}: & -U_{q4} & = I_I (R_4 + R_6) & + I_{II} \cdot R_4 & \\ \mathrm{II}: & -U_{q1} - U_{q4} - U_{q2} & = I_I \cdot R_4 & + I_{II}(R_1 + R_2 + R_4 + R_5) & - I_{III} \cdot R_5 \\ \mathrm{III}: & U_{q3} & = & - I_{II} \cdot R_5 & + I_{III}(R_3 + R_5) \end{array}$$

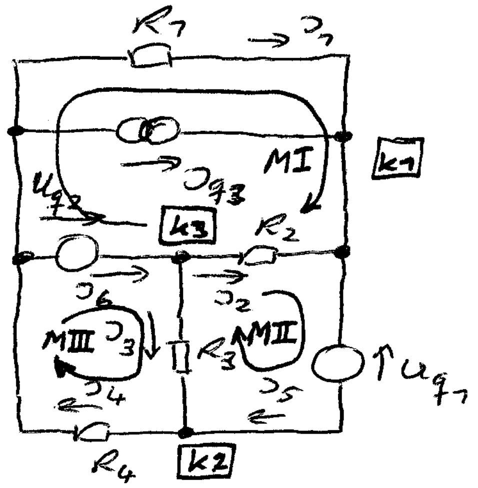
$$\begin{pmatrix} (R_4+R_6) & R_4 & 0 \\ R_4 & (R_1+R_2+R_4+R_5) & -R_5 \\ 0 & -R_5 & (R_3+R_5) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_{q4} \\ -U_{q1} - U_{q2} - U_{q4} \\ U_{q3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4\Omega & 2\Omega & 0 \\ 2\Omega & 9\Omega & -3\Omega \\ 0 & -3\Omega & 4\Omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2V \\ -10V \\ 2V \end{pmatrix}$$

↯ $\det R = 92\,\Omega^3$, $\quad D_1 = 14\,V\Omega^2 \quad \Rightarrow I = -I_I = \dfrac{-D_1}{\det R} = -\dfrac{14}{92}\,A = -0{,}15\,A$

89

geg:



ges: a.) vollständiges Gleichungssystem nach Kirchhoff

b.) Berechnung der unbek. Zweigströme nach MSA

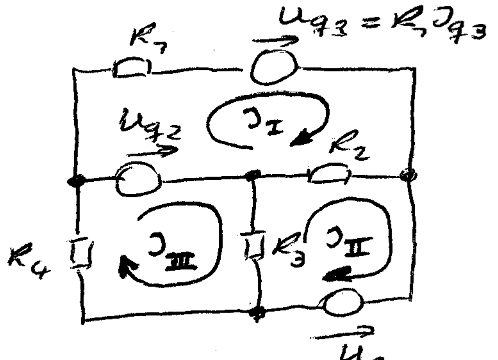
a.) hier $z = 6$ unbek. Zweigströme

$k = 3$ Knoten (unabhängige!)

$m = z - k = 3$ unabh. Maschengleichungen erforderlich

k1	$I_{q3} = -I_1 - I_2 + I_5$	6 Gleichungen! ...
k2	$0 = -I_3 + I_4 - I_5$	
k3	$0 = I_2 + I_3 - I_6$	
MI	$-U_{q2} = I_1 R_1 - I_2 R_2$	
MII	$-U_{q1} = I_2 R_2 - I_3 R_3$	
MIII	$U_{q2} = I_3 R_3 + I_4 R_4$	

b.)



nach MSA:

MI $U_{q3} - U_{q2} = I_I(R_1 + R_2) - I_{II} R_2$

MII $-U_{q1} = -I_I R_2 + I_{II}(R_2 + R_3) - I_{III} R_3$

MIII $U_{q2} = -I_{II} R_3 + I_{III}(R_3 + R_4)$

Zu 89: Zahlenrechng zu b.)

alle $R_i = 1\,\Omega$

$U_{q1} = U_{q2} = 1\,V$

$I_{q3} = 1\,A \quad \leadsto \quad U_{q3} = R_1 \cdot I_{q3} = 1\,V$

$\leadsto$ Matrix:

$$\begin{pmatrix} 2R & -R & 0 \\ -R & 2R & -R \\ 0 & -R & 2R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1V \\ 1V \end{pmatrix}$$

Lösg. mit Determinanten-Rechng.:

$I_I = -0{,}25\,A$

$I_{II} = -0{,}5\,A$

$I_{III} = 0{,}25\,A$

daraus Zweigströme aus Maschenströmen berechnen:

$I_1 = I_I - I_{q3} = -1{,}25\,A$

$I_2 = I_{II} - I_I = -0{,}25\,A$

$I_3 = I_{III} - I_{II} = 0{,}75\,A$

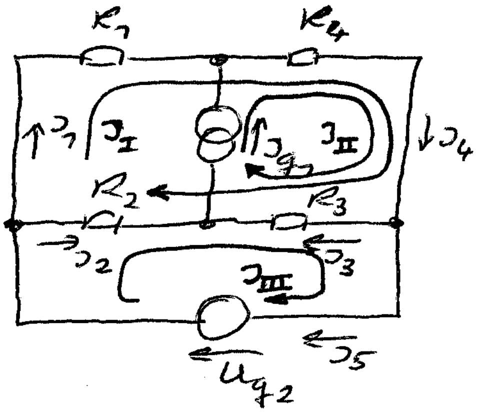
$I_4 = I_{III} = 0{,}25\,A$

$I_5 = I_{II} = -0{,}5\,A$

$I_6 = I_{III} - I_I = 0{,}5\,A$

(90)

geg:



$I_{g1} = 1\,A$
$U_{q2} = 5\,V$
$R_1 = R_3 = 2\,\Omega$
$R_2 = R_4 = 3\,\Omega$

ges: Unbekannte Zweigströme $I_1 \ldots I_5$
(nach MSA)

M_I: $0 = (R_1+R_2+R_3+R_4)\,I_I - (R_2+R_3)\,I_{III} + (R_3+R_4)\,I_{II}$

[M_{II}: $I_{II} = I_{g1}$ (bekannt!)]

M_{III}: $U_{q2} = -(R_2+R_3)\,I_I - R_3\,I_{II} + (R_2+R_3)\,I_{III}$

(!) Zur Berechnung nur Maschenstrom I_I und I_{III} erforderlich!

bekannt!

$$\begin{pmatrix} (R_1+R_2+R_3+R_4) & -(R_2+R_3) \\ -(R_2+R_3) & (R_2+R_3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_I \\ I_{III} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(R_3+R_4)\,I_{II} \\ U_{q2} + R_3\,I_{II} \end{pmatrix}$$

Det.-Rechnung mit Zahlenwerten

$$\begin{pmatrix} 10\,\Omega & -5\,\Omega \\ -5\,\Omega & 5\,\Omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_I \\ I_{III} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5\,V \\ 7\,V \end{pmatrix}$$

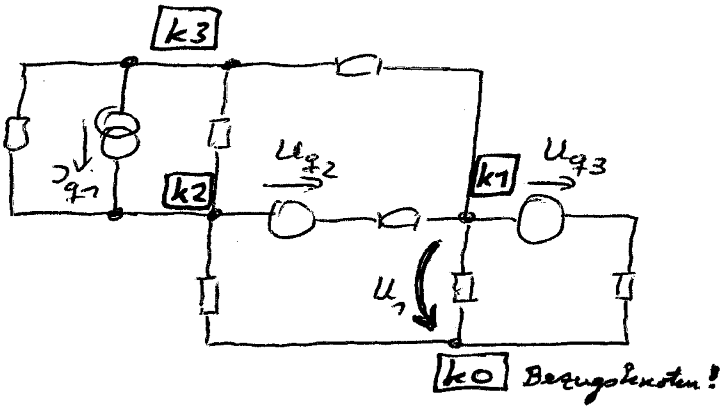
$\Rightarrow I_I = \frac{10}{25}\,A = \underline{\underline{0{,}4\,A}}$ $\qquad I_{III} = \frac{45}{25}\,A = \underline{\underline{1{,}8\,A}}$

damit Zweigströme:

$I_1 = I_I = 0{,}4\,A$
$I_2 = I_{III} - I_I = 1{,}4\,A$
$I_3 = I_I + I_{II} - I_{III} = -0{,}4\,A$
$I_4 = I_I + I_{II} = 1{,}4\,A$
$I_5 = I_{III} = 1{,}8\,A$

83

geg:



alle $R = 10\,\Omega$

$U_{q2} = U_{q3} = 50\,V$

$J_{q1} = 5\,A$

Zahlenwert-Rechnung

ges: U_1 nach Knotenspannungsanalyse

(!) Zunächst Umwandlung techn. Spgsquellen → techn. Stromqu. erf.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4G & -G & -G \\ -G & 4G & -2G \\ -G & -2G & 3G \end{pmatrix}}_{\text{Knotenleitwert-Matrix}} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_{q3} \cdot G + U_{q2} \cdot G \\ -U_{q2} \cdot G + J_{q1} \\ -J_{q1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5A \end{pmatrix}$$

Bem.: Hauptdiag.: Σ aller Leitwerte
Nebendiag.: (−1) · Koppelleitwert zw. betr. Knoten und jew. Nachbarknoten
Lösungsspalte: Quellenströme zum betr. Knoten → • positiv, ← • negativ

$$\Rightarrow U_1 = \frac{D_1}{\det G}$$

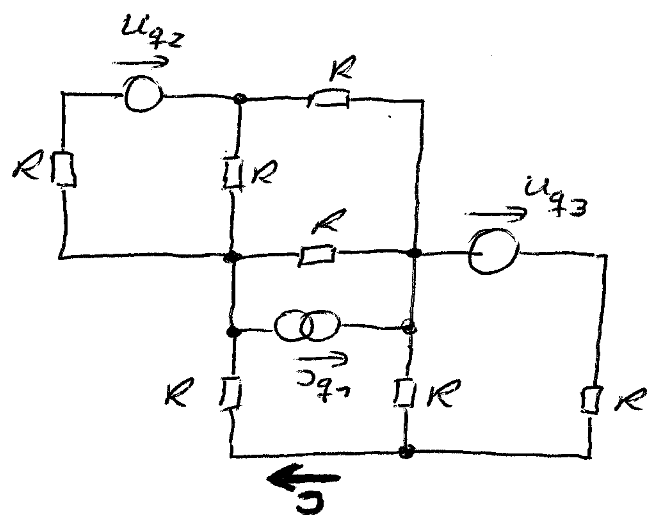
$$\det G = 48G^3 - 2G^3 - 2G^3 - 4G^3 - 16G^3 - 3G^3 = 21 \cdot G^3$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -G & -G \\ 0 & 4G & -2G \\ -5A & -2G & 3G \end{vmatrix} = -5A\left(2G^2 + 4G^2\right) = -30\,G^2 \cdot 1A$$

$$\Rightarrow U_1 = \frac{-30\,G^2 \cdot 1A}{21\,G^3} = -\frac{10 \cdot 10}{7}\,\Omega A = -14{,}28\,V$$

84

geg:



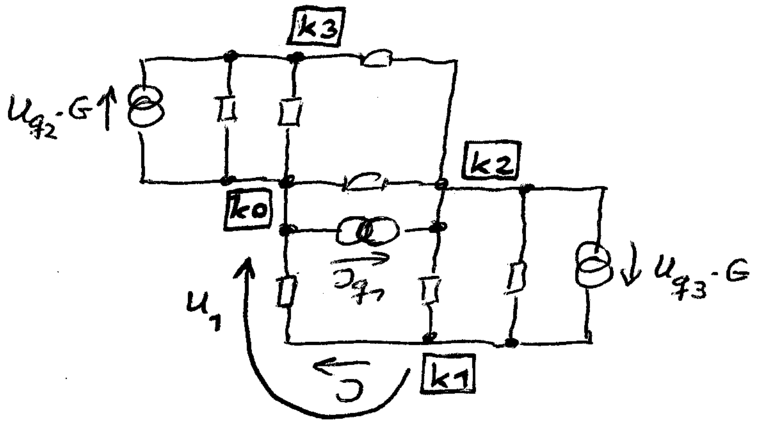
alle $R = 14\,\Omega$

$I_{q1} = 6\,A$

$U_{q2} = U_{q3} = 84\,V$

ges: Zweigstrom I nach Knotenspannungsanalyse

$\Downarrow$ Umwandlg. Spgq. in Stromquellen!



(!) k0 Bezugsknoten wählen = 1 Knoten des gesuchten Zweiges

k1 $\quad (U_1-U_2)\,2G + U_1\cdot G = 3G\cdot U_1 - 2G\cdot U_2 = U_{q3}\cdot G$

k2 $\quad (U_2-U_1)\,2G + U_2 G + (U_2-U_3)G = -2GU_1+4GU_2-GU_3 = I_{q1} - U_{q3}\cdot G$

k3 $\quad U_3\cdot 2G + (U_3-U_2)\cdot G = -GU_2 + 3GU_3 = U_{q2}\cdot G$

Determ: $\begin{pmatrix} 3G & -2G & 0 \\ -2G & 4G & -G \\ 0 & -G & 3G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6A \\ 0 \\ 6A \end{pmatrix}$

$$U_1 = \frac{D_1}{\det G}$$

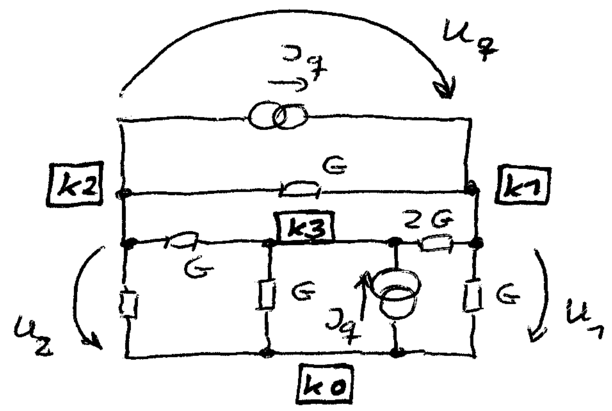
$$\det G = 36G^3 - 3G^3 - 12G^3 = 21G^3$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6A & -2G & 0 \\ 0 & 4G & -G \\ 6A & -G & 3G \end{vmatrix} = 72G^2 + 12G^2 - 6G^2 = 78G^2\cdot 1A$$

$$\Rightarrow U_1 = \frac{78G^2\cdot 1A}{21G^3} = \frac{26}{7}R\cdot 1A, \quad I = \frac{U_1}{R} = 3{,}71A$$

85

geg:



ges: U_1, U_2, U_3 durch Knotenspannungs-Analyse

direkt aus Schaltung ablesen:

$$\begin{pmatrix} 4G & -G & -2G \\ -G & 3G & -G \\ -2G & -G & 4G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_q \\ -J_q \\ J_q \end{pmatrix}$$

für U_1: $$D_1 = \begin{vmatrix} J_q & -G & -2G \\ -J_q & 3G & -G \\ J_q & -G & 4G \end{vmatrix} = 11\, J_q \cdot G^2 + 1 J_q G^2 = 12\, J_q \cdot G^2$$

für U_2: $$D_2 = \begin{vmatrix} 4G & J_q & -2G \\ -G & -J_q & -G \\ -2G & J_q & 4G \end{vmatrix} = -12\, J_q G^2 + 12\, J_q G^2 = 0$$

für U_3: $$D_3 = \begin{vmatrix} 4G & -G & J_q \\ -G & 3G & -J_q \\ -2G & -G & J_q \end{vmatrix} = 11\, J_q \cdot G^2 + 1 \cdot J_q G^2 = 12 \cdot J_q \cdot G^2$$

$$\det G = 44\, G^3 - 20\, G^3 = 24\, G^3$$

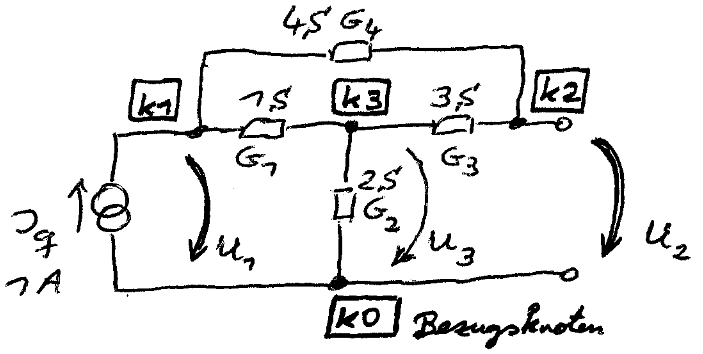
$$\Rightarrow \quad U_1 = \frac{12}{24} J_q \cdot R = \frac{1}{2} J_q \cdot R$$

$$U_2 = 0$$

$$U_q = U_2 - U_1 = -\frac{1}{2} J_q \cdot R$$

86

geg:



überbrücktes T-Glied

ges: U_1 und U_2 nach Knotenspannungsanalyse

k1: $I_q = (U_1 - U_2)\,G_4 + (U_1 - U_3)\,G_1$

k2: $0 = (U_2 - U_1)\,G_4 + (U_2 - U_3)\,G_3$

k3: $0 = (U_3 - U_1)\,G_1 + (U_3 - U_2)\,G_3 + U_3 \cdot G_2$

$$\begin{pmatrix} (G_1 + G_4) & -G_4 & -G_1 \\ -G_4 & (G_3 + G_4) & -G_3 \\ -G_1 & -G_3 & (G_1 + G_2 + G_3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_q \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$U_1 = \frac{D_1}{\det G} \qquad U_2 = \frac{D_2}{\det G}$$

Zahlenwerte:

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & -1 \\ -4 & 7 & -3 \\ -1 & -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det G = 210 - 12 - 12 - 7 - 45 - 96 = 38\ S^3$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 7 & -3 \\ 0 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 42 - 9 = 33\,\frac{A^3}{V^2} \qquad U_1 = \frac{33}{38} = 0{,}87\,V$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -(-24 - 3) = 27\,\frac{A^3}{V^2} \qquad U_2 = \frac{27}{38} = 0{,}71\,V$$