

Teil I: Grundlagen der Elektrotechnik

Vorwort:

Elektrotechnik / Informatik und Maschinenbau erzeugen die (nicht erforderlich zu erläuternden) physischen Grundlagen der gesellschaftlichen Existenz der Menschen.

Die im Denken verwandten Naturwissenschaften, speziell Φ , Chemie und Mathe liefern entscheidende schöpferische Beiträge zu Erkenntnisgewinn sowie angewandter Forschung und Technologie.

Die Medizin entwickelt ihren Fortschritt weitgehend als Nutzer ing.-technischer- und naturwiss. Fo./Entw. und deren Produkte. Sie würdigt diese als "Anwendung" unter nahezu ausschließlicher Herausstellung der eigenen Ergebnisse.

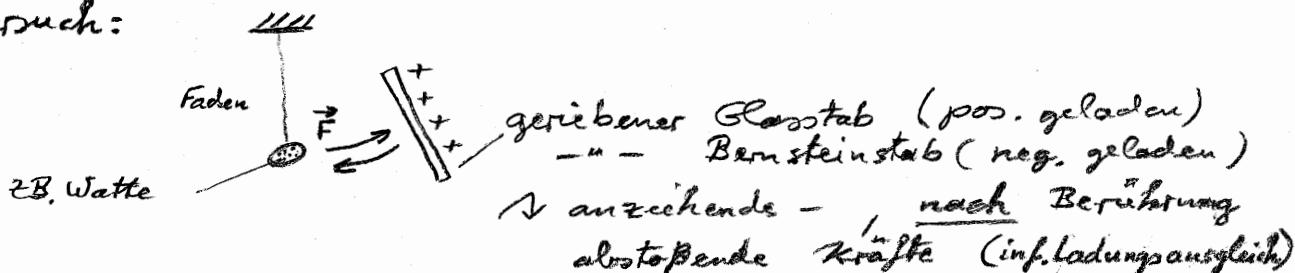
Daneben gibt es andere Disziplinen, die leichter zu studieren sind und meist den Appendix "-wissenschaft" benötigen, weil sie sich an temporären gesellschaftspolitisch bestimmten Vorstellungen oder Ideologien orientieren...

Elektr. Strömungsfeld

Gegenüber Mechanik (Newton: Länge, Masse, Zeit) ist neue Grundgröße einzuführen, um die Zusammenhänge der E-Technik darst. zu können, die

Elektrische Ladung Q (Quantum)

Versuch:

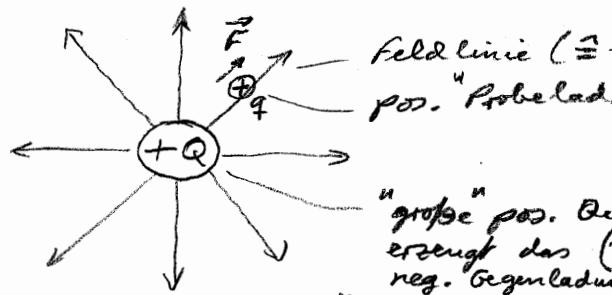


"Elektrizität" abgel. v. griech. Elektron: Erscheinung des geriebenen Bernsteins...
Ladung ist nicht durch andere Größen erklärt, sondern dient als Grundgröße selbst zur Darstellung elektrischer Erscheinungen!

A El. Ladung selbst ist Ursache für ein elekt. Kraftfeld:
dies $\hat{=}$ gespeicherter Energie infolge (erfolgter) Ladungstrennung

Ladungen werden nicht "erzeugt", sondern entstehen durch Ladungstrennung - unter Energieaufwand! - paarweise als pos.- und neg. Ladung.

(2)



Feldlinie (\equiv Kraftlinie) $\hat{=}$ Richtung der Kraft auf eine pos. "Probeladung" q

Betrag der Feldgröße ist durch die Liniendichte gegeben

"große" pos. Quell-ladung $+Q$ erzeugt das (Kraft) Feld, die neg. Gegenladung liegt im ∞ -lichen! } Richtung der Feldlinien pos. gezählt von $+$ zur $-$ -ladung

"Feldbilddarstellung" des el.-Feldes

Allg. ex. - pos. - u. neg. Ladungen

- gleichnamige Ladungen $\leftarrow \vec{q} \rightarrow \vec{q}$ z.B. Coulomb-Gesetz: für Punktladungen
- ungleichnamige $\sim \vec{F} \rightarrow +q \leftarrow -q$ $F = k_0 \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}, k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

B Elektrische Ladungen unterliegen auch (als Objekt) dem Krafteinfluss eines vorhandenen elektr. Feldes! \curvearrowright Ladenträgerbewegung \rightarrow el. Strom!

Herkunft der Ladung: \Rightarrow frei bewegliche Ladeträger, nicht an Atome gebunden

\Rightarrow Bohr'sches Atom-Modell ... liefert Erklärung für:

- "e⁻-Gas" außerhalb des Kernanziehungskräfte (Metalle)
- e⁻-Aktivierung ins Leitungsband (+aw) im Halbleiter
- Ionenbildung (e⁻-Austausch in der Zelle, Elektrochemie)

! Ladungserhaltungssatz: in einem abgeschlossenen System ist die Netto-Ladungsmenge $= (+Q) - (-Q) = \text{const.} !$

Quantenz: Ladung ex. nur als ganzzahliges Vielfaches N der Elementarladung e (eines Elektrons e⁻):

$$\Rightarrow \text{eine } e^- \text{-Ladung: } e = -1,602 \cdot 10^{-19} \text{ As}$$

Einheit der el. Ladungsmenge
[Q] = 1 As = 1 C
(Coulomb)

$$\curvearrowright (\text{Gesamt}) \text{Ladung } Q = \pm N \cdot e$$

Ladungsträgeranzahl

(zB): Ladungsträgerdichte / Anzahl frei im Feld beweglicher e⁻:

Metalle $\approx 10^{23} e^- / \text{cm}^3$, DRAM-Sp.-Zelle $\approx 10^5 e^-$ gesp.
Halbleiter $10^{10} - 10^{20} e^- / \text{cm}^3$, Isolatoren ideal: keine freien Ladeträger

! Rekombination: jew. pos.- und neg. Ladungen "verschwinden" durch Annäherung (\Rightarrow "Rekombination" im HL)

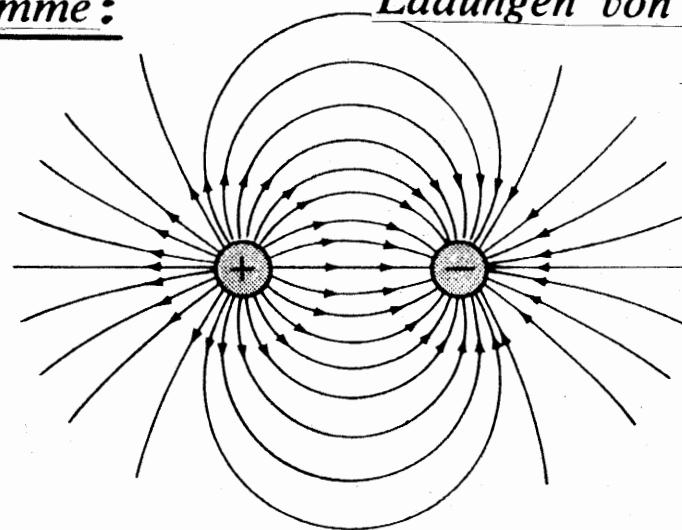
(die Σ der el. Ladungen bleibt dabei in einem geschlossenen System konstant!)

Anwendungen:

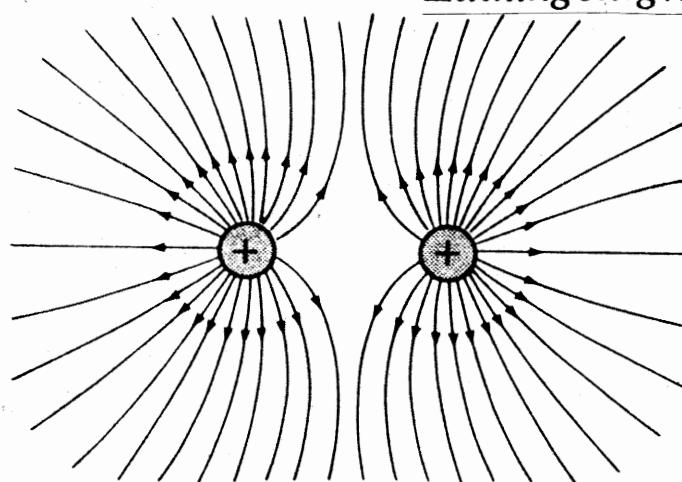
El. statisches Papieraufspannen auf Plottern / XEROX-Ladungsbild, Kondensatormikroskop / el.stat. Voltmeter, Tintenstrahldrucker / e-Strahl-Bildschirm (CRT)

Feldliniendiagramme:

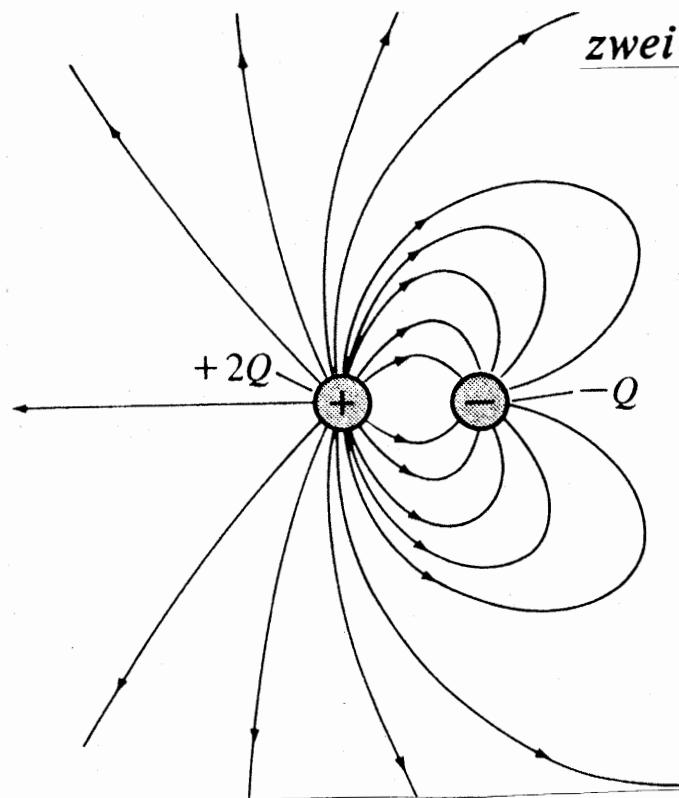
Ladungen von unterschiedlichem Vorzeichen (Dipol)



Ladungen gleichen Vorzeichens



zwei Ladungen der Größe
 $-Q$ und $+2Q$



③

Elektrischer Strom

$\hat{=}$ Bewegung von Ladungsträgern: in einer bestimmten Zeit Δt fließt eine bestimmte Menge durch einen betrachteten Querschnitt:

→ elekt. Strom = Strom von Ladungsträgern [Ladungsmenge / Zeit]
(Konvektionsstrom, Ladungsstrom)

Angabe eines mittleren Stromes el. Ladungen im betrachteten Querschnitt A

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

phys. Einheit $[I] = \frac{[Q]}{[t]} = \frac{As}{s} = A$ Ampere

Allg. folgt nach Grenzübergang für den "Augenblickswert" eines zeitlich veränderlichen Stromes die differenzielle Darstellung:

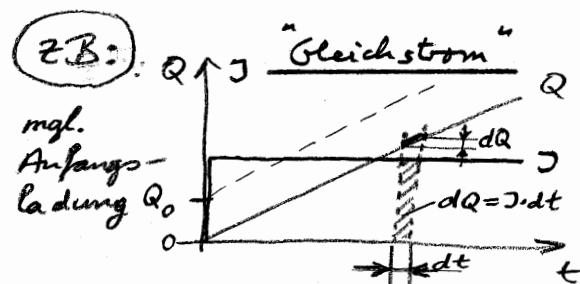
Def.:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt}$$

bzw. für die transport. Ladung Q
 $dQ = I \cdot dt$

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I \cdot dt + Q_0$$

↑
Integrationskonstante für bestimmtes Integral beachten

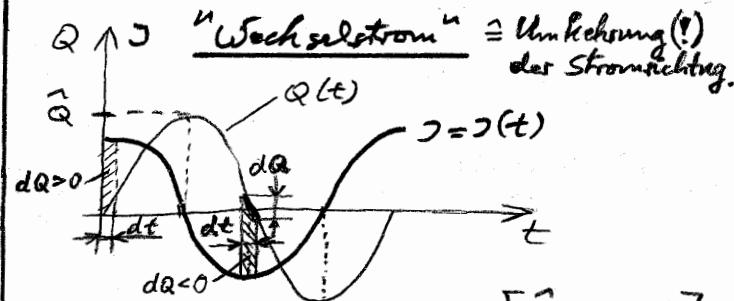


bzw. dabei transportierte Ladung

$$I = \frac{Q}{t} = \text{const.}$$

$$Q = I \int_{t_1}^{t_2} dt = I \cdot (t_2 - t_1) + Q_0$$

$$\underline{Q = I \cdot \Delta t + Q_0}$$



$$\text{f. harmon. Fkt.: } I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d[\hat{Q} \cdot \sin \omega t]}{dt}$$

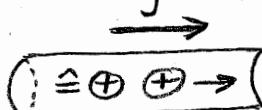
ω -Kreisfrequenz
 $\omega = 2\pi f$

$$I = \hat{Q} \cdot \omega \cdot \cos \omega t$$

wobei $\hat{Q} = \hat{Q} \cdot \omega = \text{Amplitude}$

! Zählpfeilrichtung I $\hat{=}$ "Technische Stromrichtung"

Bem: festgelegt zu einer Zeit, als noch nichts über die Leitungs-e- als Träger des Stroms bekannt war...



positiv in Richtung der Bewegung pos. Lad.-träger (also entgegengesetzt zur e-Beweg.) definiert

ZB:

Blitz $\rightarrow 70 \text{ kA}$

Autobatterie $\approx 100 \text{ A}$

El. Heizgrät 10 A

PC 1 A

LED 20 mA

e-Strom CRT $< 1 \text{ mA}$

DC's $\approx \mu\text{A} \dots \text{mA}$

El. Strom ist die einzige zusätzlich für E-Technik notwendige Grundeinheit!, wird aus Bewegung der Ladung Q (als neue Grundgröße) definiert

(4)

Wechselwirkungen des el. Stromes mit anderen physikal. Erscheinungen:

- von Magnetfeld umwirbelt (Festplattenspeicher, Motoren ...)
- Wärmeentwicklung (Heizgeräte, Glühdrahtinstrumente ...)
- Chemische Wirkung (Oberflächenveredlung, Batterien ...)
und Stofftransport
- Kraftwirkung auf bewegte Ladeträger (CRT, Drucksaulinstr.)
Hall-Effekt, Magn. Speicherung
- Optische Wirkung (El.-Luminiszenz)
- Physiologische Wirkung (Elektromedizin)

schädlich $> 30 \text{ mA}$ bzw.
für Menschen $> 60 \text{ V}$

Aufgabe:

Ladung $7 \text{ As} = 7 \text{ C} \hat{=} \text{ wieviel Elementarladungen?}$

$$\underline{\underline{N}} = \frac{Q}{e} = \frac{7 \text{ As}}{7,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}} = \frac{7 \cdot 10^{18}}{(\text{pos.}) \text{ Elementarladungen}}$$

Der Transport dieser Ladungsträgeranzahl pro Sekunde entspricht damit dem Gleichstrom

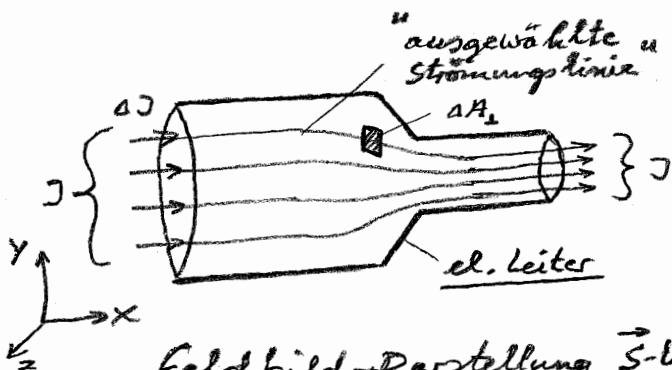
$$\underline{\underline{I}} = \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dt} = \frac{7 \text{ As}}{1 \text{ s}} = \underline{\underline{7 \text{ A}}}$$

Bem: heute Strom $I \leq 10^{-16} \text{ A}$ nachweisbar

mit $I = \frac{N \cdot e}{t}$ sind das $N = \frac{I \cdot t}{e} = \frac{10^{-16} \text{ A} \cdot 1 \text{ s}}{7,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}}$

$\underline{\underline{N = 625 \cdot e \text{ pro Sekunde!}}}$

Stromdichte \vec{S}



feldbild-Darstellung \vec{S} -linien

Dif. Stromanteil dI wird auf dif. kleine senkrecht durchflossene Teilfläche dA_1 bezogen

Def.: Stromdichte
 $S = f(x, y, z)$

Vorstellung:

Unterteilung des Gesamtstromes I in Teilströme dI durch Teilflächen dA_1 . Hieraus wird erkennbar:
Stromliniendichte ist ortabhängig

Stromdichte \vec{S} als wichtigste Feldgröße des el. Stromes, charakt. dessen räumliche Verteilung! (= Vektor)

$\hat{=}$ Ang. der Stromq. in einem Punkt

$$S = \frac{dI}{dA_1} \rightarrow S = \lim_{dA_1 \rightarrow 0} \frac{dI}{dA_1}, \vec{S} = \frac{dI}{dA}$$

5

$$\text{phys. Einheit } [S] = \gamma \frac{A}{m^2}$$

Beispiele für $S = \text{const.}$

- : "Offener" Cu-Leiter: $S \approx 5 \dots 70 \frac{A}{mm^2}$ (konvektionsgekühlt)
- : Trafo-Draht : $\leq 3 \frac{A}{mm^2}$ (nicht gekühlt)
- : HL-Bauelemente : $\approx 10 \dots 700 \frac{A}{mm^2}$
- : Blitz : $\approx 10^2 \dots 10^3 \frac{A}{mm^2}$

In der Feldbild-Darstellung gilt für die Darstellung der Feldgröße \vec{S} :
Betrag $|\vec{S}| \hat{=} \text{Dichte der Stromungslinien}$; Richtung $\hat{=} \text{Feldlinienrichtung}$

Umkehrung für Strom: Gesamtstrom I (z.B. Skin-Effekt) aus $S(x,y)$ zu bestimmen:

$$J = \int_A S \cdot dA_1 = \int_A S \cdot \cos(\vec{S}, \vec{A}) \cdot dA = \int_A \vec{S} \cdot d\vec{A}$$

↑

<u>Skalar!</u> 	für eine nicht \perp durchfloss. Fläche A	<u>Vektorbeschreibung</u> <u>Skalarprodukt!</u> 
---	--	---

$\logik \equiv \text{Theorie der Felder!}$

$dJ \left\{ \frac{\vec{S}}{dA} \right\} / dA$

Strom kontinuität → Nächthoffscher Satz

The diagram shows a central irregular shape labeled 'V' representing a volume element. This volume is surrounded by a boundary labeled 'Hüllfläche A'. Four arrows point from the right towards the surface A, indicating the direction of a vector field. To the left of the volume V, there is a brace symbol with the letter 'J' above it, suggesting a summation or integral over the volume.

es gilt: Erhaltung der Ladung im abgeschl. Syst.

$$\text{Kontinuitäts-} \quad \frac{dQ}{dt} = 0 = C_{zu} - C_{ab}$$

gleichung :

$$\text{d.h.: } Q_{zu} = Q_{ab}$$

$$\text{bzw.: } \int \vec{S} \cdot d\vec{A} = 0$$

Hilfe

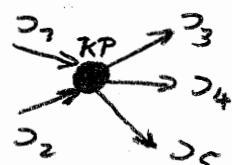
$$\Rightarrow (\text{differenzielle}) \text{ Stromänderung } \frac{dI}{dt} = \vec{S} \cdot d\vec{A} = 0 !$$

\Rightarrow Strom $\hat{=}$ "geschlossenem Band", d.h. keine Quellen;
 ↗ Begriff "Stromkreis" (damit kein Anfang / Ende)

Wird Volumenelement als Knoten verstanden, so ist die vorzeichenrichtige Stromsumme = 0, daraus folgt der

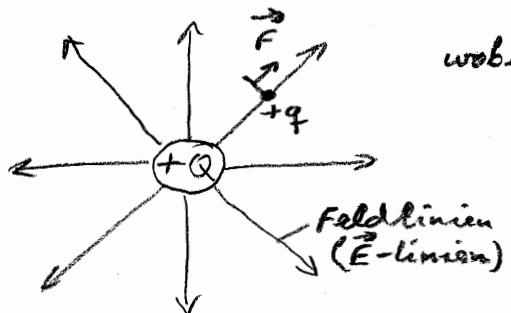
Knotenpunktsatz, "1. Kirchhoff'scher Satz":

$$\sum \text{ } \sum_{\text{zufließend}} = \sum \text{ } \sum_{\text{abfließend}}$$



Elektrische Feldstärke \vec{E} , elektr. Potential φ

Die Ursache für die e^- -Bewegung ist die elektr. Feldstärke \vec{E} . Das elektr. Feld stellt sich als Kraftfeld dar:



wobei neg. Gegenladung im ∞ -Lichen!

Kraftwirkung auf "Probeladung" $+q$ wird durch el. Feldstärke \vec{E} beschrieben:

Kraftwirkung

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

dh: \vec{F} und \vec{E} verknüpft über Ladung q , Kraft in \vec{E} -Richtung positiv gezählt

→ Definitionsglg. der el. Feldstärke

$\vec{E} \equiv$ Kraft auf Probeladung!

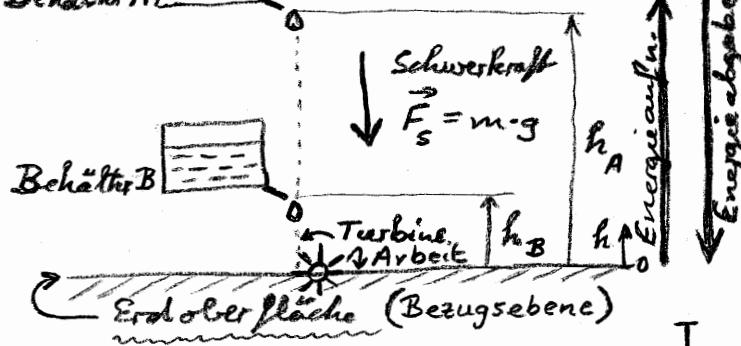
$$\text{Einheit } [E] = \frac{N}{As} \text{ bzw. } [E] = \frac{1 \text{ Ws/m}}{1 \text{ As}} = \frac{1 \text{ V}}{\text{m}}$$

Einführung des el. Potentials (hierzu Modell - Vergleich):

Gravitationsfeld

Elektr. Feld (homogen, dh. $E = f(x)$)

Wasser-Behälter A

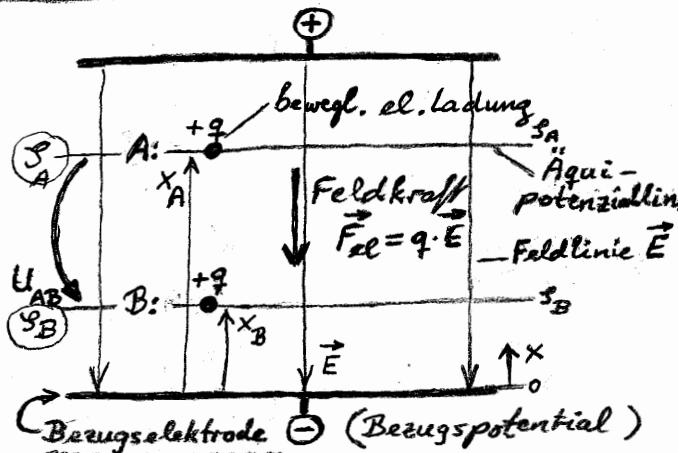


$$\text{Pot. Energie } W_{\text{pot}} = F_s \cdot h = m \cdot g \cdot h$$

Bezug auf Masseeinheit m

→ "Schwere"- bzw. "Gravitationspotential"

$$V_{\text{pot}} = \frac{W_{\text{pot}}}{m} = g \cdot h$$



$$W = F_{\text{el}} \cdot x = q \cdot E \cdot x \quad [W] = \text{Ws}$$

Bezug auf Ladung q

→ "Elektrisches Potential"

$$\varphi = \frac{W}{q} = E \cdot x \quad [\varphi] = \text{V}$$

→ Potential Begriff:

- unabhängig von best. Masse bzw. Ladung!
- einem (willkürlichen) Bezugspunkt zuzuordnen.
- allg. (energetische) Eigenschaft des betrachteten Aufpunktes im (Kraft-)Feld

Def: Das el. Potential eines Punktes (in Bezug auf einen anderen!) $\hat{=}$ der Arbeit ($\hat{=}$ Energie), die gegen die el. Feldkraft aufgebracht werden muss, um eine beliebige Ladung vom Bezugspunkt in den Pkt. P_i zu bringen, dividiert durch die Größe dieser Ladung. $[S] = \frac{[W]}{[q]} = \frac{[F] \cdot [s]}{[q]} = \frac{Ws/m \cdot m}{As} = \underline{\underline{1V}}$

! S ist ein Skalar (im Gegensatz zu $\vec{S}, \vec{E}, \vec{F}_e$ als Vektoren)
Vorteil für Feldberechnung, da lineare Überlagerung v. Einzelpotentialen ausführbar!

(sogilt im Pkt. A: $S_A = \frac{W_A}{q} = \frac{F_e \cdot x_A}{q} = \vec{E} \cdot \vec{x}_A$, homog. Feld!)
wobei der Bezugspkt. die Θ -Elektrode der Felddarstellung ist!)

Das elektro. Potential ist die der pot. Energie einer Ladung an einem Ort zugeordnete (skalare) Größe.

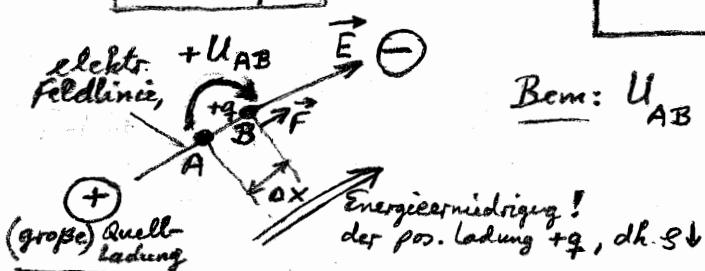
Elektrische Spannung

ist def. als Potentialdifferenz zwischen 2 verschiedenen Punkten (des Feldes) A u. B mit den Energiewerten W_A und W_B :

$$\text{mit } S = \frac{W}{q}$$



$$U_{AB} = S_A - S_B = \frac{W_A}{q} - \frac{W_B}{q} = \vec{E} \cdot \vec{\Delta x}$$



$$\text{Bem: } U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{x} \quad \text{für inhomogenes Feld mit } \vec{E} = f(x)$$

$$[U] = \frac{[W]}{[q]} = \frac{Ws}{q} = \underline{\underline{1V}}$$

El. Spannung U_{AB} ist die auf die Ladung q bezogene Energieänderung, die von Pkt. A nach Pkt. B im Feld geleistet wird; pos. gezählt in Feldstärkerichtung.

Bem: El. Spannung (als Differenz zweier Größen) ist nicht auf einen willkürlichen Bezugspkt. definiert.

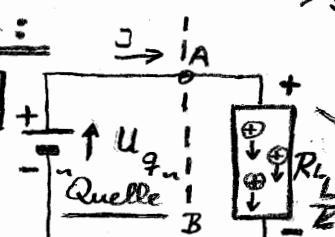
d.h. beliebiger "Massebezug" mgl.: in einer el. Schaltung kann jeder (Knoten) Punkt als "Masse" def. werden
keine Veränderung der el. Spannungen

Quelle - Last Betrachtung:

Energieerhöhung $W_{\text{pot. d. Ladng.}}$

$$\text{"EMK"} \quad \frac{+ \Delta W}{q} = U_q \quad (\text{Quell-Spannung})$$

Bewegungsantrieb des el. Stromes, d.h. pos. Ladungen von (-) nach (+) bewegt (i.a. nichtelektr. Kraft)

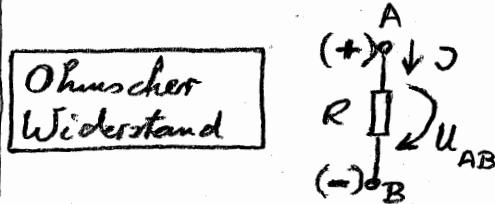
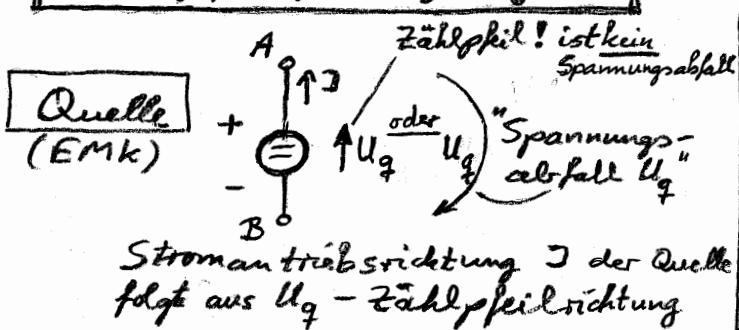


Verlust an pot. Energie

$$\frac{- \Delta W}{q} = U \quad (\text{Spannabfall})$$

Umwandlung el.- in nichtelektr. Energie (Wärme), pos. Ladg. von (+) nach (-) bew.

Zählpfeilfestlegungen

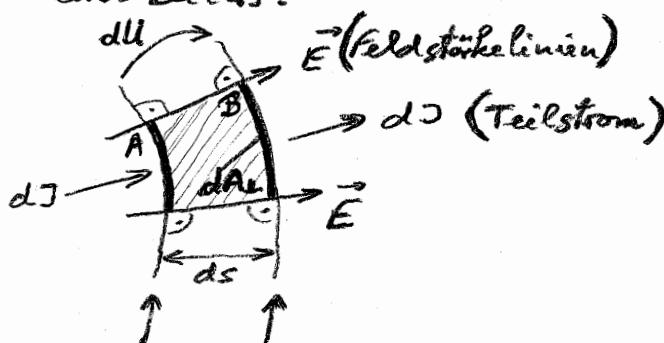


Spannungsabfall UAB über R
in folge Stromrichtung J

weiterhin gilt: $u_{AB} = -u_{BA}$ (\equiv Umkehrung der Spannungsabfallrichtung)

Zusammenhang \vec{S} und \vec{E}

Betrachtung eines kleinen Volumenelements im Strömungsfeld eines Leiters:



Aquipotentialflächen liegen

\perp auf $\vec{E} - (\vec{S})$ -Linien!

⇒ "Quadratahnliche Figuren"
(= Zeichnungs-Hilfe!
zur Feldbild-Darstellung)

aus den gekennzeichneten Größen folgt damit $E = g \cdot$

$$\text{bzw. } \vec{s} = x \cdot \vec{E}$$

$$\quad \quad \quad] \text{ mit } x = \frac{7}{3}$$

mit: || ze - Leitfähigkeit (spez.)

g - spezif. Widerstand

(Materialkenngröße: Tabellen-Bücher)

Vgl. "Widerstands-Bemessungs-Gleichung" (später)

(3)

Zusammenhang U , s und \vec{E}

bekannt: $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ und $U = \frac{1}{q} W$

aus Betrachtung des Potenzialfeldes

Die Verschiebung einer Ladung q längs einer Feldlinie (E-Linie $\hat{=}$ Kraftlinie) ergibt: $\Delta W = F \cdot ds = q \cdot dU$ $ds = \text{Wegelement in Feldstärkerichtung } \vec{E}$
mit $F = q \cdot E$

$$\Rightarrow E = \frac{dU}{ds}$$

d.h. $E \hat{=}$ Spannungsabfall dU längs ds in Feldstärkerichtung $/ds$

Damit wird:

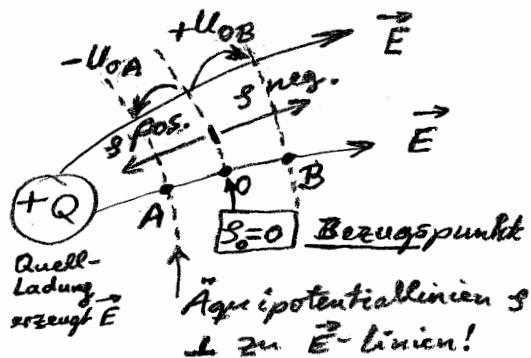
$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = s_A - s_B$$

Beachte Vorzeichen: Es zählt Spannungsabfall pos.

in \vec{E} -Richtung

aber:

s nimmt zu entgegen \vec{E} -Richtg.



Der Spannungsabfall zwischen zwei Punkten A und B ist gleich dem (Weg-)Linienintegral der Feldstärke $E(s)$ zwischen diesen Punkten und ist unabhängig vom Weg zwischen A und B.

Damit wird das Potential s_A bezogen auf $s_0 = 0$:

$$s_A = \int_A^0 \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_0^A \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

(!) beachte die Integrationsgrenzen

Für die Feldstärke gilt damit:

$$\vec{E} = - \frac{ds}{ds} \cdot \vec{e}_E$$

(s ist ein Skalar!)

Einheitsvektor in \vec{E} -Richtung (bzw. in Normalrichtung der Äquipotentialfläche $s = \text{const.}$)

Für best. Integral: ! Integrationskonstante: Potentialwerte hängen von der Wahl des Bezugspunktes 0 (z.B.: $s_0 = 0$) ab!

(Allg. Vergleich für pot. Energie: $s \hat{=}$ Höhenlinien auf Landkarte!)

10

Bemerkung zur Feldberechnung: räumlicher Leiter,
d.h. inhomogenes Feld!

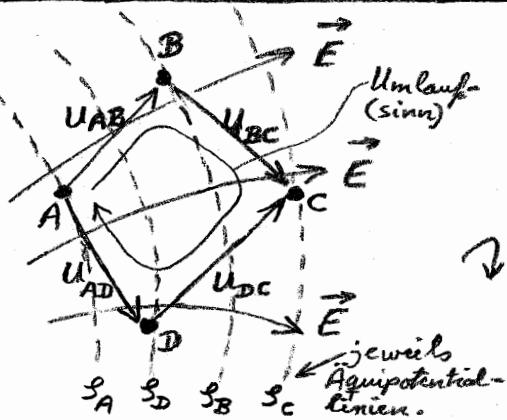
z.B.: bekannt ist \vec{J} :
(bzw. vorausgesetzt)

$$\begin{array}{l} \rightarrow S \rightarrow E \rightarrow U \rightarrow R \\ = \frac{\vec{J}}{A_L} \quad = \frac{S}{x} \quad = \int E ds \quad = \frac{U_{\text{ges}}}{\vec{J}} \end{array}$$

[Ende der Feldgrößenbetrachtung]

Maschensatz

Für Ausschnitt aus E -Feld:



Betrachtung beliebiger Punkte A, B, C, D im E -Feld (Pkt. längs S -linien verschiebbar!):

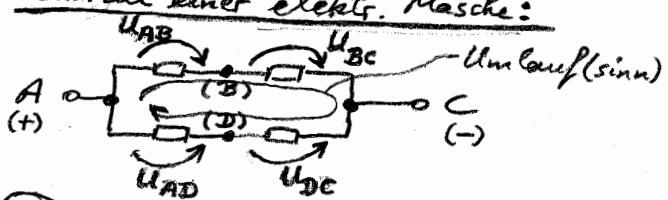
Bildung eines geschlossenen Umlaufs für die Spannungen U_{ij} :

→ aus dem Zusammenhang von U und W und dem Energieerhaltungssatz folgt der

Maschensatz, "2. Kirchhoff'scher Satz":

$$\sum U_{ij} = 0 \quad \text{für einen beliebigen geschlossenen Umlauf (=Masche)}$$

Im Fall einer elekt. Masche:



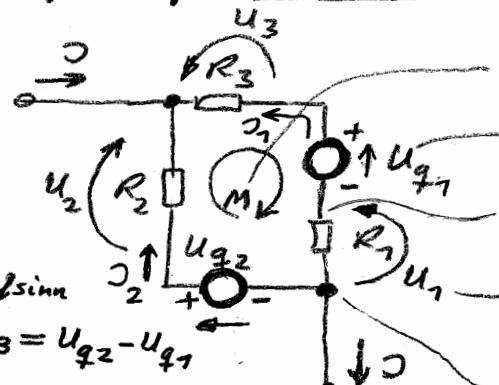
hier gilt: $U_{AB} + U_{BC} - U_{DC} - U_{AD} = 0$, d.h.: vorzeichenrichtige Summe aller Spannungsabfälle in einer Masche = 0 (Vorzeichen $\hat{=} \text{Maschenlaufsinn}$)

! Umlaufrichtung beliebig wählbar: Umkehrg. $\hat{=} \text{Multipl. mit } (-1)$

Auch Formulierung des Maschensatzes:
mit Quellspannungen

$$\begin{aligned} & \sum \text{aller Quellspannungen (EMK)} U_{qj} \\ & = \sum \text{aller Spannungsabfälle } U_i \end{aligned}$$

Begriffe:



Masche (mit Umlaufsinn, z.B. \curvearrowright)

Spannungsquelle

Zweig (Zweigstrom I_2) $\hat{=} \text{Verbindung zwischen 2 Knotenpunkten}$

Spannungsabfall

(Richtung $\hat{=} \text{Zweigstromrichtung}$)

Knotenpunkt, verbindet i.a. ≥ 3 Zweige

für Maschenumlaufsinn

$$(M1): -U_1 + U_2 - U_3 = U_{q2} - U_{q1}$$

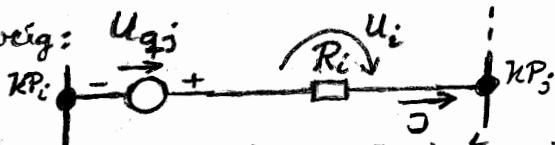
Maschengleichung

! Maschensatz, wie hier angegeben
gilt unabhängig vom von außen eingeprägten Strom I .

Zur Vorzeichenfestlegung in Maschengleichung der Form: $\sum u_i = \sum u_{qj}$

- Willkürlicher Umlaufsinn in der Masche wählbar!
 \rightsquigarrow Vz.-Festlegung für Summanden

z.B. im Zweig: u_{qj}



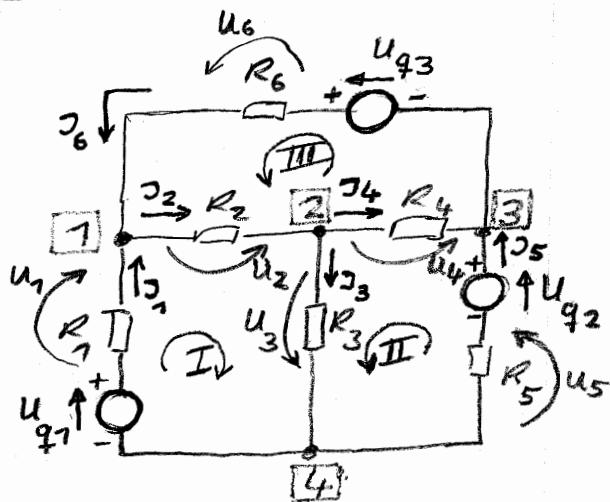
! Vorzeichen-
festlegung
für Summanden
des Maschenumlaufs: neg. pos.

Zweigstromrichtung
Maschen-
Umlaufsinn

Richtung von Zweigstrom
zweckmäßig
entsprechend Quell-
antriebsrichtung
festlegen!
(grundsätzlich beliebig)

Beispiel: Netzwerkberechnung, Kirchhoff'sche Sätze

geg.: Schaltung mit R_i , u_{qj}



ges: belieb. Strom oder
Spannungsabfall im Netzwerk

hier

ex. 3 Maschen (jeder Zweig muss von wenigstens einer Masche erfasst werden)
Jede Masche muss über mindestens einen Zweig mit einer anderen verknüpft sein!

ex. 4 Knotenpunkte \square

Spannungsabfälle über R_i entspr.
Richtung der Zweigströme festgelegt $\textcircled{1}$

Lösung:

→ hier ex. 6 unbekannte Zweigströme \rightsquigarrow 6 Gleichungen erf.!

diese aus Knotenpunkt- und Maschensätzen aufstellbar:

\rightsquigarrow Gleichungssystem entsteht, Ordnen nach Indizes

- Lösung aus Koeffizientenmatrix durch Determinantenrechnung, z.B. Cramer'sche Regel oder
- Lösung des linearen Gleichungssystems z.B. durch Gauß'schen Algorithmus (Gauß-Seidel-Verfahren), wenn Widerstände zu bestimmen sind.
(bzw. für gesuchte u_i oder I_j lösen)

(72)

Es entstehen unter spaltenweiser Sortierung nach Indizes:

Knotenpunkt-gleichungen

1

$$+j_1 - j_2 + j_6 = 0$$

2

$$+j_2 - j_3 - j_4 = 0$$

3

$$+j_4 + j_5 - j_6 = 0$$

4

$$-j_1 + j_3 - j_5 = 0$$

$$= 0$$

\sum aller KP-Gleichungen
 $= 0$ gilt allgemein!
(jeder j fließt jeweils
einmal zu- und ab
innerhalb der Menge der
Knotenpunkte)

Gl. 4 ist z.B. \sum
der KP-Gleichungen (1...3) (-
d.h. Gl. 4 ist linear abhängig
(keine neue Information!)

Maschen-gleichungen

I

II

III

IV

V

VI

VII

VIII

IX

X

XI

XII

XIII

XIV

XV

XVI

XVII

XVIII

XIX

XX

XI

XII

XIII

XIV

XV

XVI

XVII

XVIII

XIX

XX

XI

XII

XIII

XIV

XV

XVI

XVII

XVIII

XIX

XX

XI

XII

XIII

XIV

XV

XVI

XVII

XVIII

XIX

XX

XI

XII

XIII

XIV

XV

XVI

XVII

XVIII

XIX

XX

XI

XII

XIII

XIV

XV

XVI

XVII

XVIII

XIX

XX

XI

XII

XIII

XIV

XV

XVI

XVII

XVIII

XIX

XX

XI

XII

XIII

XIV

XV

XVI

XVII

XVIII

XIX

XX

XI

XII

XIII

XIV

XV

XVI

XVII

XVIII

XIX

XX

XI

XII

XIII

XIV

XV

XVI

XVII

XVIII

XIX

XX

XI

XII

XIII

XIV

XV

XVI

XVII

XVIII

XIX

XX

XI

XII

XIII

XIV

XV

XVI

XVII

XVIII

XIX

XX

XI

XII

XIII

XIV

XV

XVI

XVII

XVIII

XIX

XX

XI

XII

XIII

XIV

XV

XVI

XVII

XVIII

XIX

XX

XI

XII

XIII

XIV

XV

XVI

XVII

XVIII

XIX

XX

XI

XII

XIII

XIV

XV

XVI

XVII

XVIII

XIX

XX

XI

XII

XIII

XIV

XV

XVI

XVII

XVIII

XIX

XX

XI

XII

XIII

XIV

XV

XVI

XVII

XVIII

XIX

XX

XI

XII

XIII

XIV

XV

XVI

XVII

XVIII

XIX

XX

XI

XII

XIII

XIV

XV

XVI

XVII

XVIII

XIX

XX

XI

XII

XIII

XIV

XV

XVI

XVII

XVIII

XIX

XX

XI

XII

XIII

XIV

XV

XVI

XVII

XVIII

XIX

XX

XI

XII

XIII

XIV

XV

XVI

XVII

XVIII

XIX

XX

XI

XII

XIII

XIV

XV

XVI

XVII

XVIII

XIX

XX

XI

XII

XIII

XIV

XV

XVI

XVII

XVIII

XIX

XX

XI

XII

XIII

XIV

XV

XVI

XVII

XVIII

XIX

XX

XI

XII

XIII

XIV

XV

XVI

XVII

XVIII

XIX

XX

XI

XII

XIII

XIV

XV

XVI

XVII

XVIII

Elektrischer Widerstand

Bewegung der Ladeträger \Rightarrow Übertragung von Energie auf die Atome
 (Stöße mit Metallgittern)
 \rightsquigarrow Wärmeentwicklung
 ($\hat{=}$ Energieabgabe)

D.h., der Leiter setzt der Driftbewegung einen "Widerstand" entgegen:

R ist umso \uparrow , je mehr Energie (d.h. $U \uparrow$) für das Treiben einer best. Ladung erf. ist.

\rightsquigarrow Def.:

Elektr. Widerstand

$$R = \frac{U}{J}$$

Zählpfeile: 

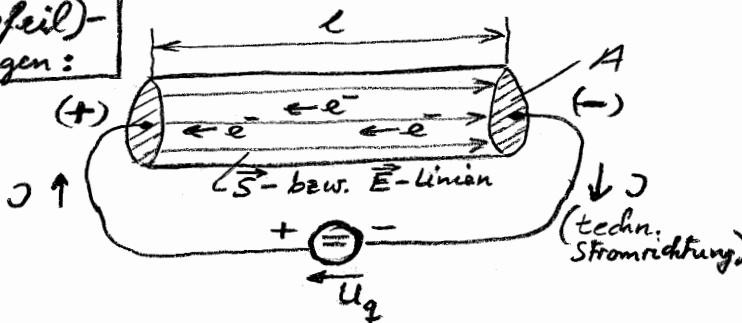
$R = \text{const.}$ gilt nur für Ohmschen Widerstand!, wobei $R \neq f(J, U)$

Gesamte eingespeiste Energie wird in Wärme umgewandelt, als Wirkleistung! (passiver ZP)

$$[R] = \frac{V}{A} = \Omega \text{ (1826 Ohmsches Gesetz)}$$

$$[G] = \frac{1}{R} = \text{Leitwert: Siemens}$$

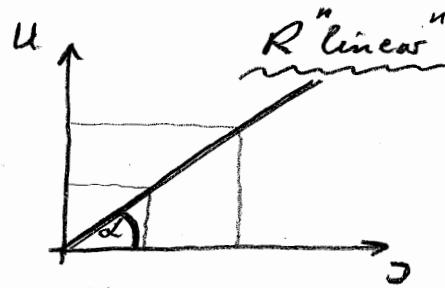
Zähl(pfeil)-richtungen:



$$S = \frac{J}{A} \quad \left. \begin{array}{l} \\ E = \frac{U_q}{l} \end{array} \right\} \text{gilt im homogenen Feld}$$

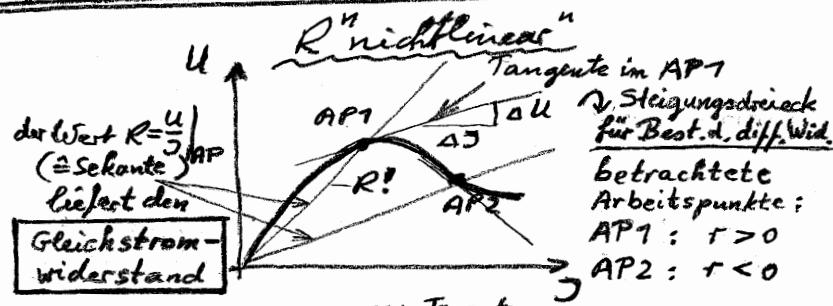
$$\vec{F}_{e^-} = -e \vec{E}$$

Widerstands-Begriffe (Kennlinie abhängig von Temperatur-/Feldeffekten)



$$R = \frac{U}{J} = \text{const.!} \text{ (für jeden Arb.pkt.)}$$

linearer (ohm-scher) Wid.
 ist immer positiv!



$$r = \frac{dU}{dJ} \Big|_{AP} \Rightarrow \frac{\Delta U}{\Delta J} \Big|_{AP} = \text{Anstieg im AP}$$

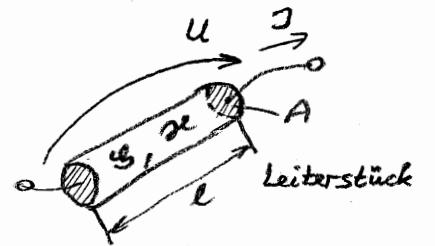
differentieller Wid. $r = f(U, J)$
 pos. und neg. mgl.!

(74)

Widerstandsbemessungsgleichung

für homogenes Stromungsfeld wird aus den Feldgrößen:

$$R = \frac{U}{J} = \frac{E \cdot l}{S \cdot A} = \frac{\sigma \cdot l}{A} = \frac{l}{\sigma \cdot A}$$



$$\vec{S} = \sigma \cdot \vec{E}$$

$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$

σ - spezifische Leitfähigkeit } s. auch
 ρ - spezifischer Widerstand } S. 8

⇒ Tabellen, z.B.: $\rho_{Cu} = 77,8 \cdot 10^{-8} \Omega \text{mm}^2/\text{m}$

Angabe der phys. Dimension $[S] = \Omega \text{m}$ oder $\Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$

$$[\sigma] = \frac{1}{\Omega \text{m}} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}}$$

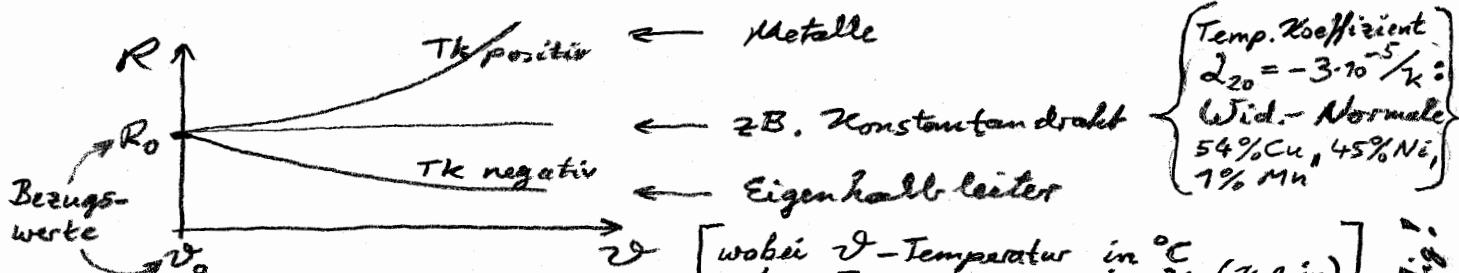
Leistungsumsätze

je nach Bauform / Größe u. Temperaturbereich festgelegt

$$P = U \cdot J = \frac{U^2}{R} = J^2 \cdot R$$

Belastbarkeit (in Reihen)
z.B. $\frac{7}{20} \text{W}$, $\frac{7}{40} \text{W}$
(bis einige W)

Temperaturabhängigkeit von R



wobei ϑ - Temperatur in °C
oder T - " in K (Kelvin)

- Verlauf abhäng. von:
- Ladungsträgergeneration = $f(\vartheta)$ exp.
 - Verringerung der Beweglichkeit = $f(\vartheta)$ (infolge Gitterschwingung ↑ mit ϑ ↑)

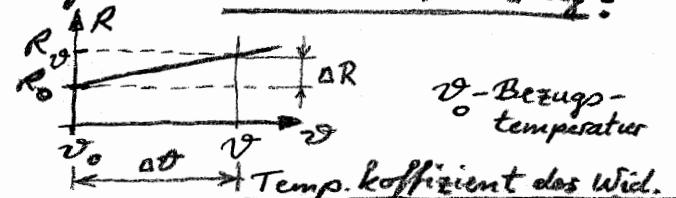
Bei kleinen ϑ → Betrachtung als lineare Änderung:

$$R_\vartheta = R_0 + \alpha R$$

$$\checkmark R_\vartheta = R_0 + \frac{dR}{d\vartheta} \vartheta$$

$$R_\vartheta = R_0 (1 + \alpha \cdot \vartheta)$$

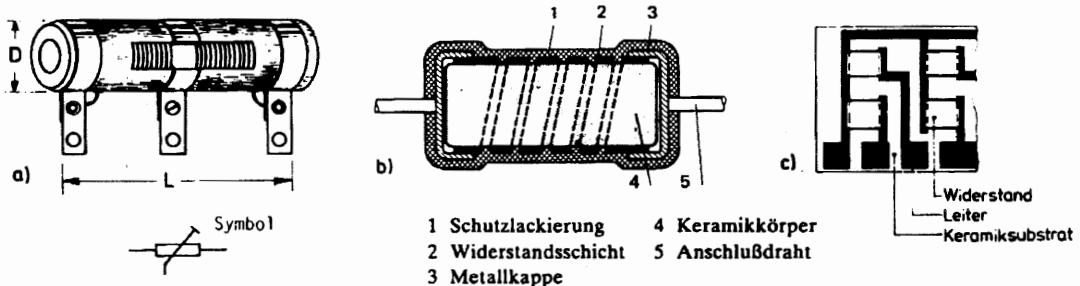
$$\text{Temp. Differenz } \Delta\vartheta = \vartheta - \vartheta_0$$



$$\alpha = \frac{dR/R_0}{d\vartheta}$$

Angabe bei best. Temperatur ϑ_0 !

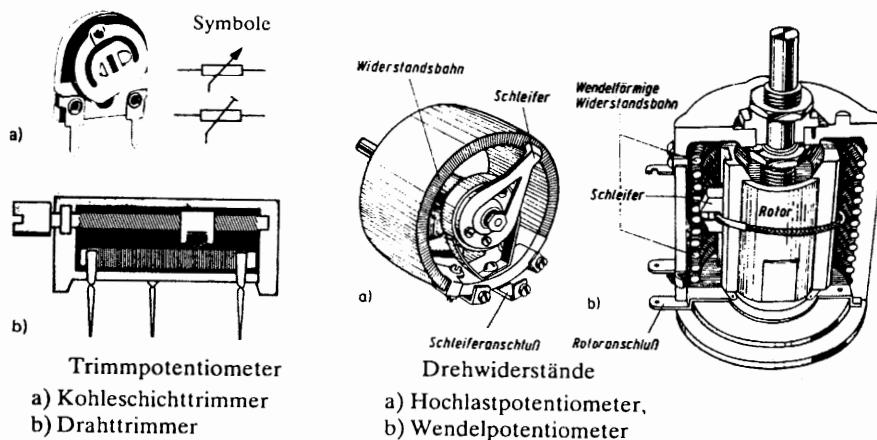
Bauformen von Festwiderständen



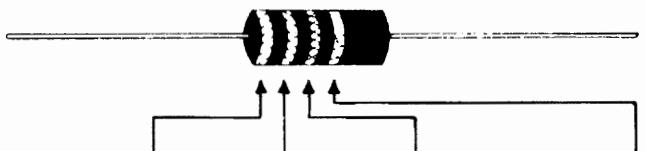
Ausführungsformen von Widerständen

a) Drahtwiderstand, b) Schichtwiderstand, c) Dickschichtkombination

Bauformen veränderlicher Widerstände



Farbcode und Normreihen



Kennfarbe	1. Ring: 1. Wertziffer	2. Ring: 2. Wertziffer	3. Ring: Multiplikator	4. Ring: Toleranz
farblos	-	-	-	$\pm 20\%$
silber	-	-	$\times 10^{-2} \Omega = 0,01 \Omega$	$\pm 10\%$
gold	-	-	$\times 10^{-1} \Omega = 0,1 \Omega$	$\pm 5\%$
schwarz	(0)	0	$\times 10^0 \Omega = 1,0 \Omega$	-
braun	1	1	$\times 10^1 \Omega = 10 \Omega$	$\pm 1\%$
rot	2	2	$\times 10^2 \Omega = 100 \Omega$	$\pm 2\%$
orange	3	3	$\times 10^3 \Omega = 1 \text{ k}\Omega$	-
gelb	4	4	$\times 10^4 \Omega = 10 \text{ k}\Omega$	-
grün	5	5	$\times 10^5 \Omega = 100 \text{ k}\Omega$	$\pm 0,5\%$
blau	6	6	$\times 10^6 \Omega = 1 \text{ M}\Omega$	-
violett	7	7	$\times 10^7 \Omega = 10 \text{ M}\Omega$	-
grau	8	8	$\times 10^8 \Omega = 100 \text{ M}\Omega$	-
weiß	9	9	$\times 10^9 \Omega = 1000 \text{ M}\Omega$	-

Beispiel: braun rot orange gold } $12 \times 1 \text{ k}\Omega = 12 \text{ k}\Omega \pm 5\%$

Abbildung 4: Farbcode für Widerstände

E6 Toleranz $\pm 20\%$	E 12 Toleranz $\pm 10\%$	E 24 Toleranz $\pm 5\%$
1,0	1,0	1,0
		1,1
		1,2
		1,3
1,5	1,5	1,5
		1,6
		1,8
		2,0
2,2	2,2	2,2
		2,4
		2,7
		3,0
3,3	3,3	3,3
		3,6
		3,9
		4,3
4,7	4,7	4,7
		5,1
		5,6
6,8	6,8	6,2
		6,8
		7,5
		8,2
		9,1

Für Anwendungen, die geringere Toleranzen erfordern, gibt es darüber hinaus die Normreihen E48 ($\pm 2\%$) und E96 ($\pm 1\%$).

I EC – Widerstands - Normreihe

E 96 ±1 %	E 48 ±2 %	E 24 ±5 %	E 12 ±10 %	E 6 ±20 %
1,00	1,00	1,0 ↑	1,0 ↑	1,0 ↑
1,02				
1,05	1,05			
1,07				
1,10	1,10			
1,13				
1,15	1,15			
1,18				
1,21	1,21	1, 2	1, 2	
1,24				
1,27	1,27			
1,30				
1,33	1,33	1, 3		
1,37				
1,40	1,40			
1,43				
1,47	1,47	1, 5	1, 5	
1,50				
1,54	1,54			
1,58				
1,62	1,62	1, 6		
1,65				
1,69	1,69			
1,74				
1,78	1,78	1, 8	1, 8	
1,82				
1,87	1,87			
1,91				
1,96	1,96	2, 0		
2,00				
2,05	2,05			
2,10				
2,15	2,15	2, 2		
2,21				
2,26	2,26			
2,32				
2,37	2,37	2, 4		
2,43				
2,49	2,49			
2,55				
2,61	2,61			
2,67				
2,74	2,74	2, 7		
2,80				
2,87	2,87			
2,94				
3,01	3,01	3, 0↓		
3,09				
3,16	3,16 ↓		3,3 ↓	3,3 ↓

E 96 ±1 %	E 48 ±2 %	E 24 ±5 %	E 12 ±10 %	E 6 ±20 %
3,24				
3,32	3,32		3,3 ↑	3,3 ↑
3,40				
3,48	3,48			
3,57				
3,65	3,65		3,6	
3,74				
3,83	3,83			
3,92			3,9	3,9
4,02	4,02			
4,12				
4,22	4,22			
4,32			4,3	
4,42	4,42			
4,53				
4,64	4,64		4,7	4,7
4,75				
4,87	4,87			
4,99				
5,11	5,11		5,1	
5,23				
5,36	5,36			
5,49				
5,62	5,62		5,6	5,6
5,76				
5,90	5,90			
6,04				
6,19	6,19		6,2	
6,34				
6,49	6,49			
6,65				
6,81	6,81		6,8	6,8
6,98				
7,15	7,15			
7,32				
7,50	7,50		7,5	
7,68				
7,87	7,87			
8,06				
8,25	8,25		8,2	8,2
8,45				
8,66	8,66			
8,87				
9,09	9,09		9,1	
9,31				
9,53	9,53			
9,76				
10,0	10,0 ↓		10,0 ↓	10,0 ↓

BEISPIEL: E 6 Reihe ($k\Omega$ -Bereich): 1,0 $k\Omega$; 1,5 $k\Omega$; 2,2 $k\Omega$; 3,3 $k\Omega$; 4,7 $k\Omega$; 6,8 $k\Omega$; 10,0 $k\Omega$ dann 15 $k\Omega$; 22 $k\Omega$ usw.

Temp.koeff. $\left[\alpha\right] = \frac{1}{K}$ \Rightarrow Tabellen, i.e. α_{20} (bei $\vartheta=20^\circ C$) angegeben

Z.B. für Metalle: $\alpha_{20} \approx 4 \cdot 10^{-3}/K$

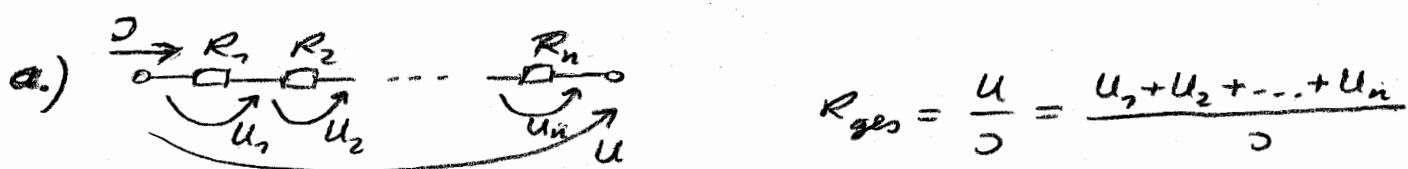
(ZB): Widerstand aus Cu-Draht gegeben.

ges: rel. Änderung R bei $\Delta\vartheta = 20 K$ (Temp.-Erhöhung)

$$\frac{\Delta R}{R_0} = \alpha \cdot \Delta\vartheta = 4 \cdot 10^{-3}/K \cdot 20 K = 0,08 = 8\%$$

[Bem: Für sehr große α wird Ansatz erweitert auf eine nichtlineare Darst.: $R_2 = R_0 \cdot [1 + \alpha\vartheta + \beta(\alpha\vartheta)^2 + \gamma(\alpha\vartheta)^3]$ mit quadrat.- und kubischem Glied. $[\beta] = \frac{1}{K^2}$ $[\gamma] = \frac{1}{K^3}$]

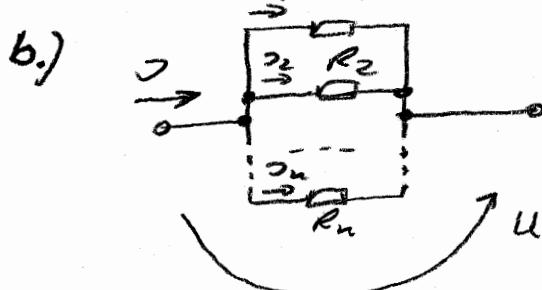
Reihen- u. Parallelschaltung von Widerständen



hier gleicher Strom I (!) durch R_i

→ für Reihenschaltung

$$R_{\text{ges}} = \sum R_i$$



$$R_{\text{ges}} = \frac{U}{I} = \frac{U}{I_1 + I_2 + \dots + I_n}$$

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{I_1}{U} + \frac{I_2}{U} + \dots + \frac{I_n}{U}$$

hier gleiche Spannung U (?) über R_i

→ für Parallelschaltung

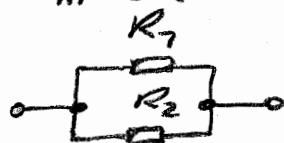
bzw. mit Leitwerten:

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \sum \frac{1}{R_i}$$

$$G_{\text{ges}} = \sum G_i$$

$$G = \frac{1}{R}$$

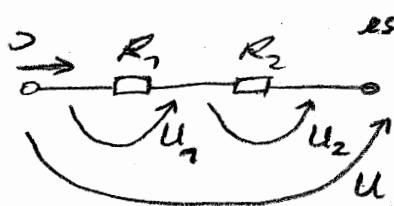
(ZB): $R_{\text{ges}} = R_1 // R_2$ (übliche Schreibweise)



$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2} \quad \rightarrow R_{\text{ges}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Spannungs- u. Stromteiler - Regel

Sp. T.



$$\text{es gilt: } U_1 + U_2 = U$$

$$\Rightarrow (R_1 + R_2) = \frac{U}{I} \text{ mit: } U_1 = I R_1 \\ U_2 = I R_2$$

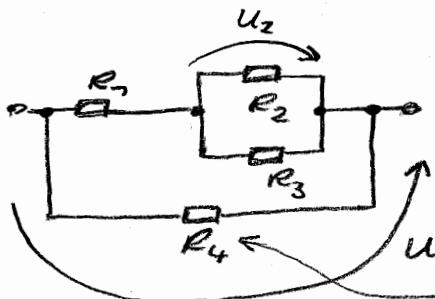
gleicher Strom durch R_i (!)

Spannungs-teiler-Regel:

$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}$	$\frac{U_1}{U} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$	$\frac{U_2}{U} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$
-------------------------------------	---	---

d.h.: Spannungsabfälle \equiv Widerstände

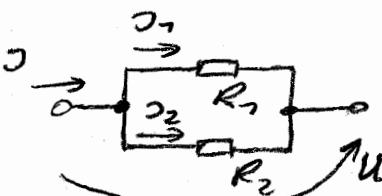
ZB:



$$\frac{U_2}{U} = \frac{R_2 // R_3}{R_1 + R_2 // R_3} = \frac{\frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}}$$

geht nicht in Rechng. ein!,
da über R_4 ohnehin die (gegebene)
Gesamtspannung U liegt.
Die Spannungsteilung erfolgt nur im oberen Zweig.

Strom T.



$$\text{es gilt: } I = I_1 R_1 = I_2 R_2 \\ I = I_1 + I_2$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{G_1}{G_2}$$

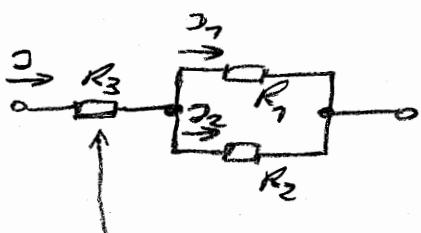
Stromteiler - Regel:

gleiche Spannung über R_i (!)

$$\frac{I_1}{I} = \frac{R_1 // R_2}{R_1} = \frac{G_1}{G_1 + G_2}$$

d.h.: Strome \equiv Leitwerte der Zweige
(umgekehrt wie Zweigwiderstände)

ZB:



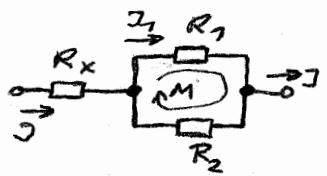
$$\frac{I_1}{I} = \frac{R_1 // R_2}{R_1} = \frac{G_1 \cdot G_2}{(G_1 + G_2) \cdot G_1}$$

geht nicht in Rechng. ein!,
da durch R_3 ohnehin der (gegebene) Gesamtstrom I fließt.
Die Stromaufteilung tritt erst am Knotenpunkt auf.

!

17

hieraus sog. "Vereinfachte Stromteilerregel":



$$\frac{I_1}{I} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

= nicht vom Teilstrom I_1 durch
fließenden Widerstand
ringwid. der Maschen
in der sich I aufteilt

Anwendungsbeispiel

Messbereichserweiterung:

ρ -fach höhere Spannung bzw.
 ρ -fach höherer Strom zu messen,
als der max. Anzeigewert des Instruments
zulässt. (R_I - Instrumenteninnenwiderstand)

V-Meter

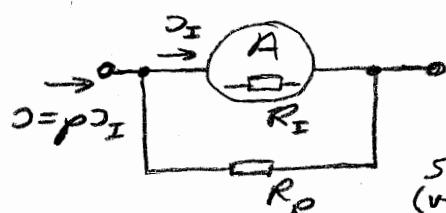


Sprungsteiler:

$$\frac{U_I}{U} = \frac{R_I}{R_V + R_I} = \frac{U_I}{\rho U_I}$$

$$\Rightarrow R_V = R_I (\rho - 1)$$

A-Meter

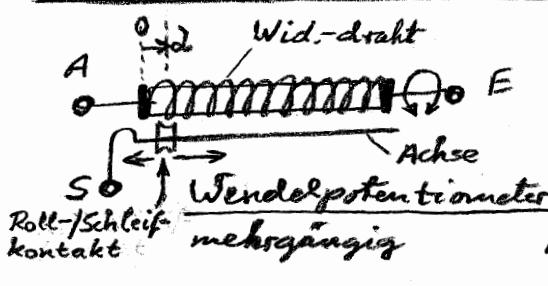


Stromteiler:
(vereinfachter)

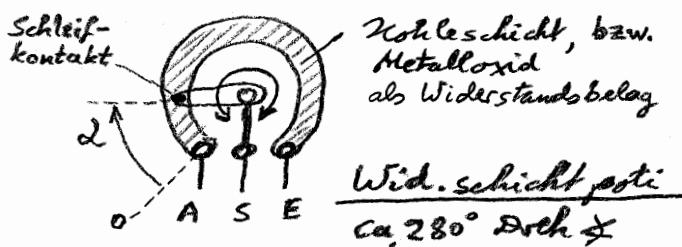
$$\frac{I_1}{I} = \frac{R_p}{R_p + R_I} = \frac{I_1}{\rho I_1}$$

$$\Rightarrow R_p = \frac{R_I}{\rho - 1}$$

Einstellbare Widerstände - Potentiometer (lineare ~)



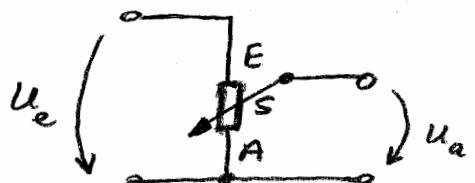
Roll-Schleif-kontakt
mehrwegig Nennwert
 $R = R_{AE}$



Wid.-schicht poti
ca. 280° Dreh &

allg: $R_{AS} = R \cdot d$ mit $d = 0 \dots 1$ (Dreh & Länge)
Einstellwert normiert auf dessen Max.wert
(Ende)

(2.B.) Potentiometerschaltung zur Einstellung einer Spannung $U_a = f(d)$



Lautstärkeregler, unbelastet

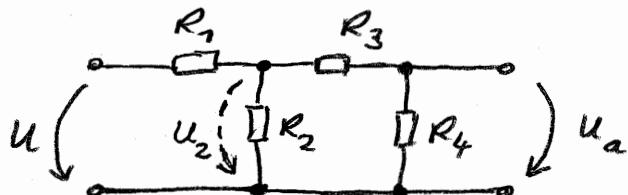
$$\begin{aligned} U_a &= \left(\frac{d}{1-d} \right) R \\ \frac{U_a}{U_e} &= \frac{dR}{dR + (1-d)R} \\ &= \frac{dR}{R} = d \end{aligned}$$

Aufteilung in 2 Wid.-
bereiche mit d

Bemerkung: Mehrfache Strom- und Spannungsteilung

Sp. T.

Voraussetzung zur Berechnung war:
in Reihe geschaltete Widerstände zur Spannungsaufteilg.



hier ist zu R_2 die
 Reihenschaltung $R_3 + R_4$
 parallel geschaltet!

Lösung durch Einführung der Hilfsgröße U_2 :

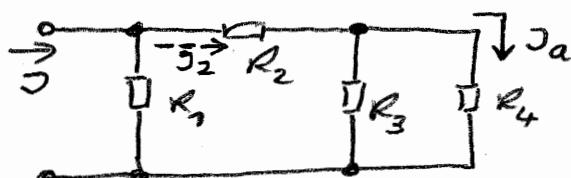
$$\frac{U_a}{U} = \frac{U_2}{U} \cdot \frac{U_a}{U_2}$$

beide Teilverhältnisse
können einzeln angegeben
werden!

$$\underline{\underline{\frac{U_a}{U} = \frac{R_2 \parallel (R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 \parallel (R_3 + R_4)} \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4}}}$$

Strom T.

Voraussetzung zur Berechnung war:
parallel geschaltete Widerstände teilen einen Strom auf



hier teilt sich der Teilstrom J_2
 noch einmal in die zu R_2
 in Reihe geschalteten Widerstände
 R_3 und R_4 auf!

Lösung durch Einführung der Hilfsgröße J_2 :

$$\frac{J_a}{J} = \frac{J_2}{J} \cdot \frac{J_a}{J_2}$$

Teilverhältnisse
einzeln angebar
(soweit nach vereinfachter
Stromteiler-Regel)

$$\underline{\underline{\frac{J_a}{J} = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3 \parallel R_4} \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_4}}}$$

Bem:

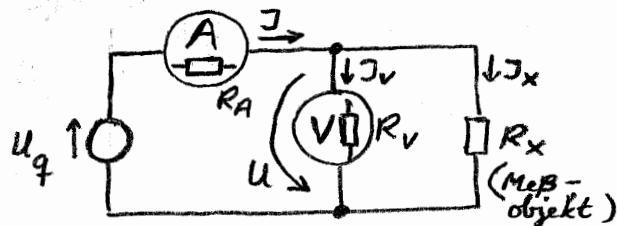
Jeweils Weiterführung der n -fachen Teilung durch Nutzung
von $n-1$ Hilfsgrößen

ZB: $\frac{U_5}{U} = \frac{U_2}{U} \cdot \frac{U_3}{U_2} \cdot \frac{U_4}{U_3} \cdot \frac{U_5}{U_4}$

für allg. Beispiel
(Hilfsgrößen kürzen sich formal
heraus)

Messschaltungen zur U- / J-Messung

Spannungsrichtige Messschaltung



$$R_x = \frac{U}{I_{jx}} \text{ soll bestimmt werden.}$$

Gemessen wird mit den Meßgeräten aber U und I_j !

Infolge des Innenwiderstandes des V-meters R_v misst das A-meter den Strom I_{jv} zuviel gegenüber dem Strom I_{jx} durch das Meßobjekt.

mit $I_{jv} = \frac{U}{R_v}$ wird I korrigiert

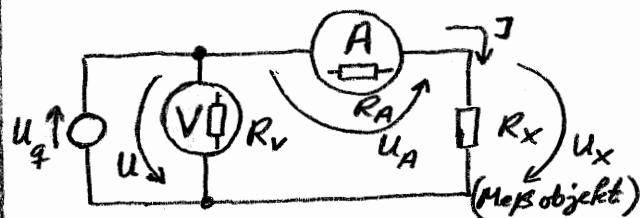
$$\Rightarrow R_x = \frac{U}{I_{jx}} = \frac{U}{I - I_{jv}} = \frac{U}{I - \frac{U}{R_v}}$$

Systemat. Meßfehler!

Der Meßfehler $\rightarrow 0$ für $R_v \rightarrow \infty$

Der Innenwid. des A-meters R_A hat keinen Einfluß auf die Meßgenauigkeit, er verschiebt nur den AP der Messung, U/J -Verhältnis bleibt konstant!

Stromrichtige Messschaltung



$$R_x = \frac{U_x}{I} \text{ soll bestimmt werden.}$$

Gemessen wird U und I !

Infolge des Innenwiderstandes des A-meters R_A misst das V-meter die Spannung U_A zuviel gegenüber der Spannung U_x am Meßobjekt.

mit $U_A = I \cdot R_A$ wird U korrigiert

$$\Rightarrow R_x = \frac{U_x}{I} = \frac{U - U_A}{I} = \frac{U}{I} - \underline{\underline{R_A}}$$

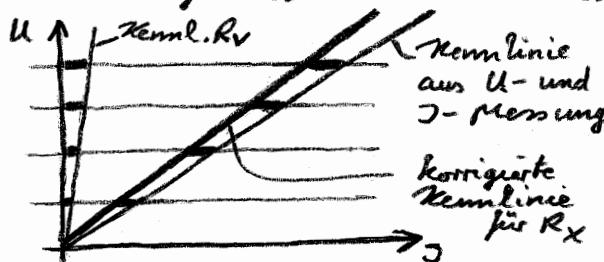
Systemat. Meßfehler!

Der Meßfehler $\rightarrow 0$ für $R_A \rightarrow 0$

Der Innenwid. des V-meters R_v hat keinen Einfluß auf die Meßgenauigkeit, er verschiebt bei vorhand. R_i der Spannungsquelle nur den AP der Messung, U/J -Verhältnis bleibt konst!

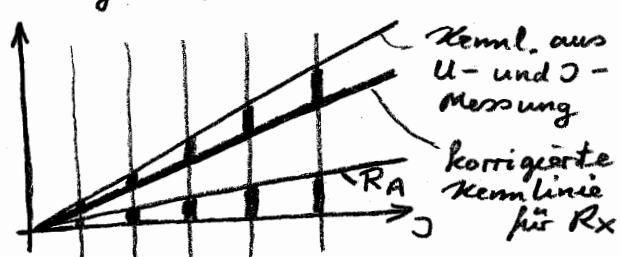
Korrektur durch grafische Kennlinienschaltung

infolge R_v wird hier "zuviel" Strom I gemessen (R_v hochohmig)



Die eingezeichnete Kennlinie für R_v erlaubt die Arbeitspunkt-abhängige Korrektur des falsch gemessenen Stromes I um die Werte $I_{jv} = f(U)$ (Subtraktion der "zuviel" gemessenen I_{jv} -Werte)

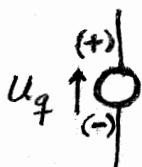
infolge R_A wird hier "zuviel" Spannung U gemessen (R_A niederohmig)



Die eingezeichnete Kennlinie für R_A erlaubt die Arbeitspunkt-abhängige Korrektur der falsch gemessenen Spannung U um die Werte $U_A = f(I)$ (Subtraktion der "zuviel" gemessenen U_A -Werte)

Strom- und Spannungsquellen

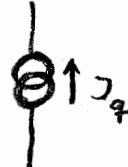
Quellen: Wandlung nichtelektro.- in elektro. Energie:



- liefert Quellspannung $U_q = \text{const.}$ unabhängig vom fließenden Strom!
- " R_i " = 0 (fiktiver Innenwiderst.)

Ideale Spannungsquelle

- Reihenschaltung zulässig $\hat{=}$ Maschensatz
- Kurzschluß unzulässig
- Parallelschaltung unzulässig bei verschiedenem U_q (Widerspruch z. Maschensatz)



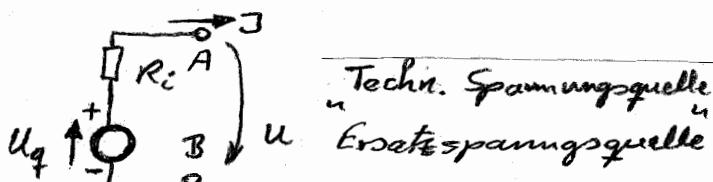
- liefert Quellstrom $I_q = \text{const.}$ unabhängig von anlieg. Klemmspannung!
- " R_i " $\rightarrow \infty$ (fikt. Innenw.)

Ideale Stromquelle

- Reihenschaltung unzulässig bei versch. I_q
- Stromunterbrechung unzulässig (Widerspr. z. Knotensatz)
- Parallelschaltung zulässig

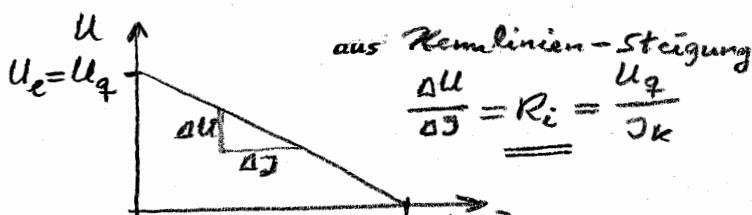
Dieses ideale Verhalten ist technisch nicht realisierbar, die real existierende $U-J$ -Abhängigkeit an den Quellenklemmen wird unter Hinzufügung eines Innenwiderstandes R_i dargestellt:

Spannungsquellen - Ersatzschaltung



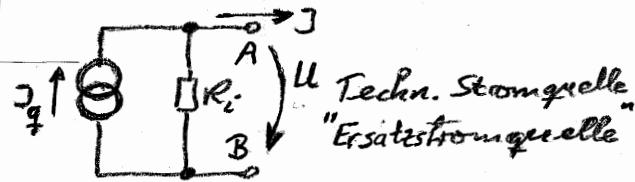
$$U = U_q - J \cdot R_i \quad \text{Strom-Spannungs-} \\ \text{beziehung}$$

$$\text{bzw. } J = (U_q - U) / R_i$$



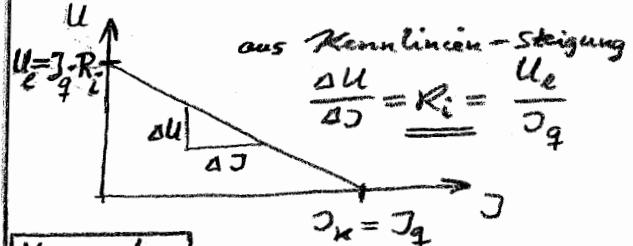
Max. Werte:
 Leerlaufspannung $U_e = U_q$ ($J=0$)
 Kurzschlussstrom $J_k = \frac{U_q}{R_i}$ ($U=0$)

Stromquellen - Ersatzschaltung



$$J = J_q - U / R_i \quad \text{Strom-Spannungs-} \\ \text{beziehung}$$

$$\text{bzw. } U = (J_q - J) \cdot R_i$$



Max. Werte:
 $U_e = J_q \cdot R_i$ (max. Spannung)
 $J_k = J_q$ (max. Strom)

! Technische Quellen (reale Quellen) werden dargestellt durch Ideale Quelle und Innenwiderstand R_i , mit dem die reale Strom-/Spannungsänderung unter Belastung beschreibbar wird.

79

Äquivalenz der beiden ESB: Quellenumwandlung

Die ESB sind Modelle für ein bestimmtes, gleiches U-I-Verhalten an den Klemmen A-B, damit sind sie ineinander überführbar!

Äquivalent, wenn gilt:

$$R_i \stackrel{!}{=} R_i$$

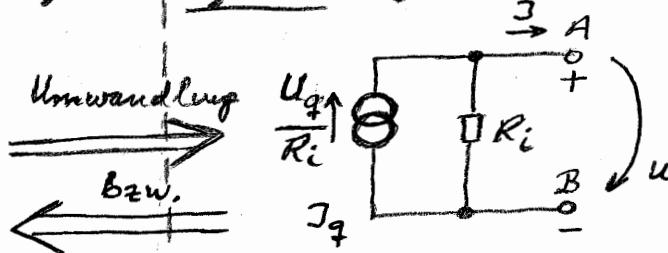
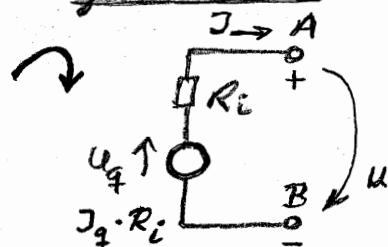
Stromqu.-ESB

• für Leerlauf an A-B: $U_e = U_q = J_q \cdot R_i$

• für Kurzschluß ... $J_k = \frac{U_q}{R_i} = J_q$

Äquivalente Ausdrücke
Quellen sind
umwandelbar!

Bei gleichen R_i müssen jeweils gleiche U_e und J_k an d. Kl. A-B entstehen,



Quellen-
Zählpfeil-
richtung
bleibt
erhalten! ☺

Entscheidung entsprechend Denkweise der E-Technik für Wahl des verw. ESB:

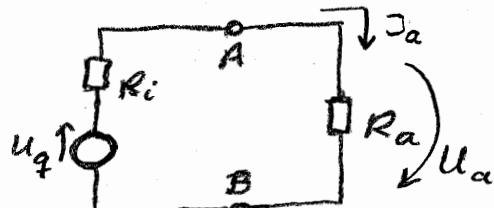
Spannungsquelle-ESB für kleine R_i
(d.h. $R_a \gg R_i$)

Stromquellen-ESB für große R_i
(d.h. $R_a \ll R_i$)

Grundstromkreis (GSK)

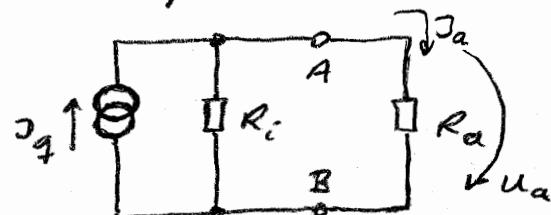
folgt aus Zusammenschaltung einer Technischen Quelle mit einem Lastwid. R_a

Spannungsquellen-ESB

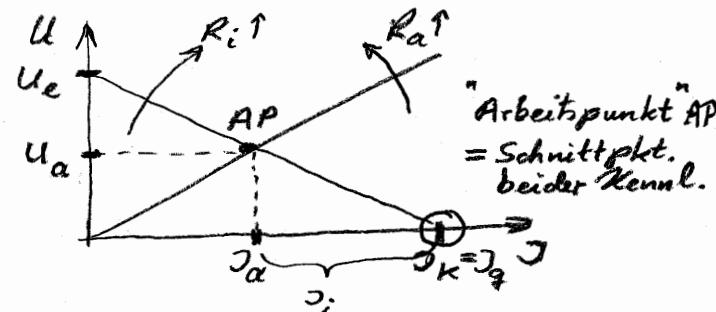
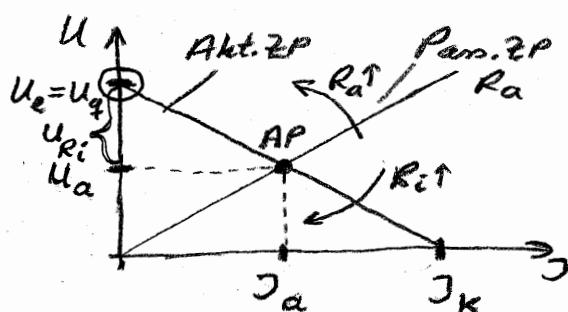


Aktiver Z.P.
(=Quelle)
Passiver Z.P. (Zweipol)
(=Lastwid. / "Verbraucher")

Stromquellen-ESB



Akt. Z.P.
Pass. Z.P.



Arbeitspunkt AP:

- gleiche Spannung U_{AB} für Quelle u. Lastw.
- gleicher Strom J_a bei verbundenem akt.-u. pass. Z.P.

d.h. $U_a = U_q - J_a \cdot R_i$ gilt wie $U_a = J_a \cdot R_a$ $\rightarrow U_a/J_a$ -Wertepar

Ersatzspannungsquelle	Ersatzstromquelle	Spannungsteiler	Doppelquelle
 $i_k = 0$ $P = 0$	 $i_k = 0,3\text{ A}$ $P = 0,9\text{ W}$	 $u_l = 3\text{ V}$ $P = 0,9\text{ W}$	 $u_l = 3\text{ V}$ $P = 0,1\text{ W}$
 $i_k = 0,3\text{ A}$ $P = 0,9\text{ W}$	 $i_k = 0,3\text{ A}$ $P = 0$	 $i_k = 0,3\text{ A}$ $P = 1,8\text{ W}$	 $i_k = 0,3\text{ A}$ $P = 1\text{ W}$

Elektrisch gleichwertige Schaltungen eines aktiven Zweipoles
 $(u_l = 3\text{ V}, i_k = 0,3\text{ A}, R_i = 10\Omega)$

Normiertes U-J-Verhalten als $f\left(\frac{R_a}{R_i}\right)$ am GST

a) $\underline{I_a} = \frac{U_q}{R_i + R_a}$

$\underline{I_k} = \frac{U_q}{R_i}$

Kurzschlussstrom als Bezuggröße!

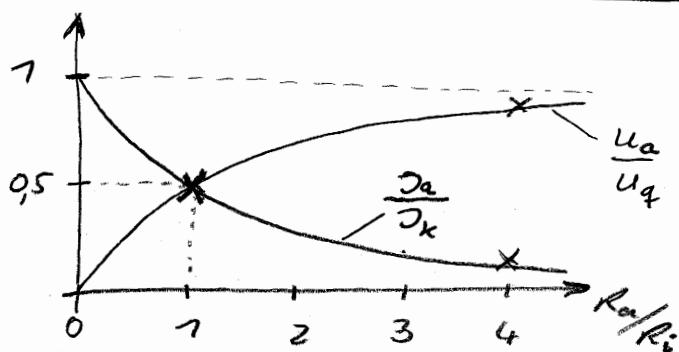
$\Rightarrow \frac{\underline{I_a}}{\underline{I_k}} = \frac{R_i}{R_i + R_a} = \frac{\gamma}{\gamma + \frac{R_a}{R_i}}$

$U_a = I_q \cdot (R_i // R_a)$

(auch Stromteiler-
Ansatz mögl.)

b.) $\underline{\underline{\frac{U_a}{U_q}}} = \underline{\underline{\frac{R_a}{R_i + R_a}}} = \underline{\underline{\frac{R_a/R_i}{\gamma + \frac{R_a}{R_i}}}}$

Quellspannung U_q als Bezuggröße!
(Spannungsteiler)



dies gilt (Äquivalenz!) für Spannungs- und Stromquellen-ESB!

Leistung im GST, Wirkungsgrad, Anpassung

El. Leistung

$$\begin{aligned} P &= U \cdot J \\ \Rightarrow P &= J^2 \cdot R = \frac{U^2}{R} \end{aligned}$$

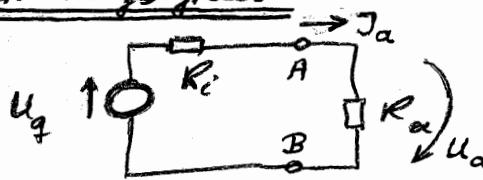
Ohm'sches Gesetz $U = R \cdot J$ einsetzen

- Techn. interessant sind:
- im Verbraucher umges. Leistung $P_a = \frac{U_a^2}{R_a}$
 - insgesamt umgesetzte Leistung $P_{ges} = P_a + P_i$
 - Verlustleistung im R_i der Quelle $P_i = J_a^2 R_i$

→ Betrachtung von || A) Wirkungsgrad η

|| B) im Verbraucher absolut auftretender Leistung

zu A) Wirkungsgrad

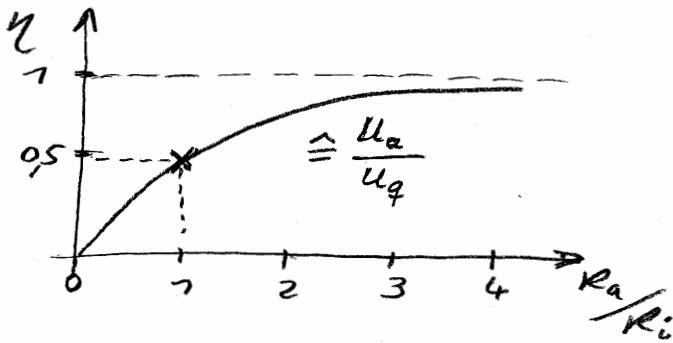


$$P_a = I_a^2 R_a$$

$$P_{ges} = I_a^2 (R_i + R_a)$$

→ Wirkungsgrad $\eta = \frac{P_a}{P_{ges}} = \frac{R_a}{R_i + R_a} = \frac{\frac{R_a}{R_i}}{\gamma + \frac{R_a}{R_i}}$ $\left(\underset{(s. oben)}{=} \frac{U_a}{U_q} \right)$

(27)



d.h. $\eta = 50\%$
für $R_a = R_i$

→ Für Leistungsübertragung mit max. Wirkungsgrad gilt: $R_a > R_i$!

Weiterhin sinnvoll: hohe Spannungen, um $I \downarrow$ wegen der ohmischen Leitungsverluste $P_{VL} = I^2 \cdot R_L$ → Nutzung v. Hochspannungsleitungen in der Energieversorgung!

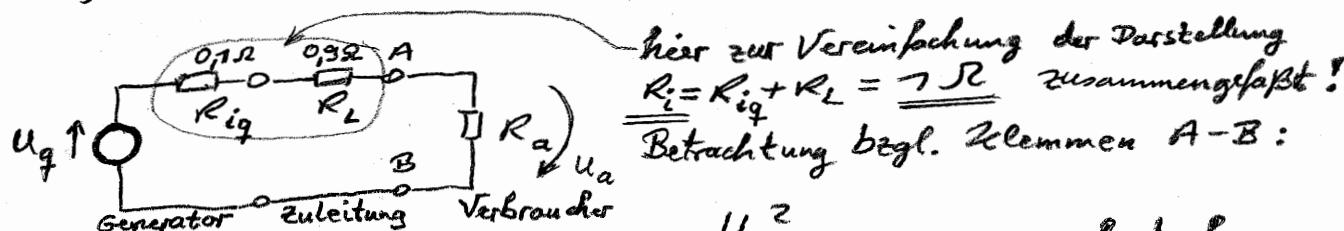
Beispiel:

An einen Verbraucher ist $P_a = 300 \text{ kW}$ (kleine Windkraftanlage) zu übertragen (Generator $R_{iq} = 0,152$; U_q einstellbar; Leitung $R_L = 0,3 \Omega$)

a.) mit $U_a = 6 \text{ kV}$

$$\text{ges: } \eta = \frac{R_a}{R_i + R_a}$$

b.) mit $U_a = 230 \text{ V}$



hier zur Vereinfachung der Darstellung
 $R_i = R_{iq} + R_L = 7 \Omega$ zusammengefaßt!
Betrachtung bzgl. Klemmen A-B:

$$P_a = \frac{U_a^2}{R_a} \quad \text{damit für a.) } R_a = \frac{U_a^2}{P_a} = \frac{120^2}{300} = 720 \Omega \text{ erforderl., um o.g. } 300 \text{ kW einzusetzen}$$

$$\eta = \frac{720}{7 + 720} = 99\% \quad (\text{günstig})$$

$$\text{für b.) } R_a = \frac{0,776}{300} = 0,776 \Omega \text{ erforderl., um o.g. } 300 \text{ kW einzusetzen}$$

$$\eta = \frac{0,776}{7 + 0,776} = 75\% \quad (\text{nicht vertretbar!})$$

Schlußfolgerung:

Der "Rest" d. Leistung wird jeweils über $R_{iq} + R_L$ in Verlustwärme umgewandelt!

→ eingespeiste Spannung U_q entspr. höher auszulegen! um Klemmenspannung U_a zu erreichen

(z.B.: im Fall b.) wäre erforderl. $U_q = 7540 \text{ V}$ (!) - technisch unsinnig!

(wegen des hohen Spurzweckverhältnisses: $\frac{U_q}{U_a} = \frac{R_i + R_a}{R_a}$), techn. sinnvoll ist $R_i \ll R_a$ s. obiges Diagramm für η

zu B.) Im Verbraucher absolut erzeugbare Leistung

$\hat{=}$ Zielvorstellung in Informations technik!
max. Leistung am Empfänger (R_a), z.B. Lautsprecher
zu erzeugen einer Verstärkeranlage

$$P_a = \frac{U_a^2}{R_a} = \left(U_g \frac{R_a}{R_i + R_a} \right)^2 \frac{1}{R_a} = \frac{U_g^2 \cdot R_a}{(R_i + R_a)^2}$$

$$= \frac{U_g^2}{R_i} \cdot \frac{R_a / R_i}{\left(1 + R_a / R_i \right)^2} \quad (*)$$

An dieser Stelle sinnvoll Einführung der Kreuzschleifeleistung P_k
der Quelle:

$$P_k = \frac{U_g^2}{R_i} \quad \text{als max. umsetzbare Leistung, ist eine reine Rechengröße!}$$

Nun Fragestellung:

\Rightarrow Bei welchem $\frac{R_a}{R_i} = x$ wird an R_a maximale Leistung erzeugt?

$$P_a = \frac{U_g^2}{R_i} \cdot \frac{x}{(1+x)^2} \quad \left[= \frac{u}{v} \text{ Different.-regel} \quad f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} \right]$$

$$\frac{dP_a}{dx} = \frac{U_g^2}{R_i} \cdot \frac{(1+x)^2 - x \cdot 2(1+x)}{(1+x)^4} \stackrel{!}{=} 0 \quad | : (1+x)$$

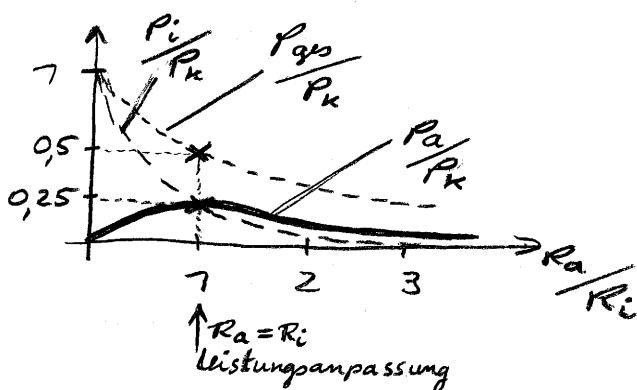
$$1+x - 2x = 0$$

Ergebnis: max. P_a entsteht für $x = 1$

Für max. am Verbraucher umgesetzte Leistung $P_{a\max}$ gilt: $R_a = R_i$!

= Fall der "Leistungsanpassung"

Hierfür wird, einsetzen in (*): $P_a = P_{a\max} = \frac{U_g^2}{4R_i} = \frac{P_k}{4}$!



Für den AP der Leistungsanpassung

gilt also:

$$R_i = R_a$$

$$P_a = 0,25 P_k$$

$$\eta = 50\%$$

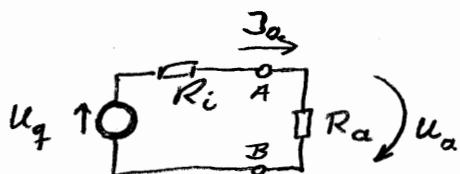
$$U_a = \frac{U_g}{2}$$

$$I_a = \frac{P_k}{2}$$

Vergleich zur Zielvorstellung:

- A.) In Energieversorgung ... $\eta \rightarrow 100\%$ beachte:
B.) In Informations technik ... $P_a \rightarrow \text{Max.}$ jew. Zielvorstellung
verschieden!

Zusammenstellung: Beziehungen am GSK



$$\frac{J_a}{J_k}, \frac{U_a}{U_q}, \eta, \frac{P_a}{P_k}, \frac{P_a}{P_{\max}}$$

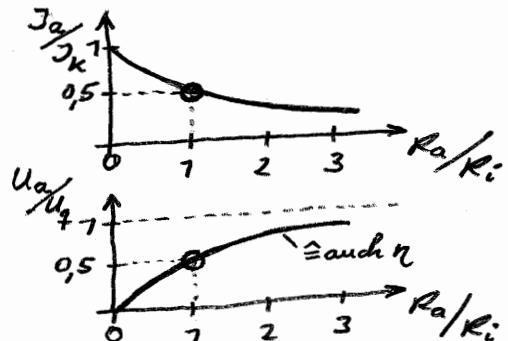
$$\frac{J_a}{J_k}$$

$$J_a = \frac{U_q}{R_i + R_a}$$

$$J_k = \frac{U_q}{R_i}$$

Kurzschlussstrom

$$\frac{J_a}{J_k} = \frac{R_i}{R_i + R_a} = \frac{1}{1 + R_a/R_i}$$



$$\frac{U_a}{U_q}$$

$$\frac{U_a}{U_q} = \frac{R_a}{R_i + R_a} = \frac{R_a/R_i}{1 + R_a/R_i}$$

$$\eta$$

$$\eta = \frac{P_a}{P_{\text{ges}}} \quad \text{mit } P_a = J_a^2 \cdot R_a \quad \text{und } P_{\text{ges}} = J_a^2 (R_a + R_i)$$

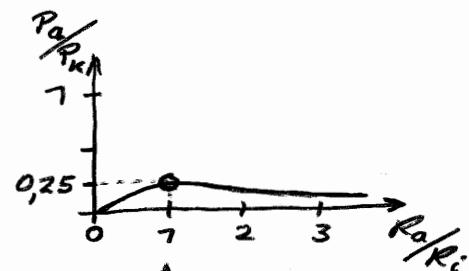
$$\eta = \frac{R_a}{R_i + R_a} = \frac{R_a/R_i}{1 + R_a/R_i} = \frac{U_a}{U_q} \quad \text{vgl. vorige L\"osung}$$

$$\frac{P_a}{P_k}$$

$$\text{mit } P_a = \frac{U_a^2}{R_a} = \left(U_q \frac{R_a}{R_a + R_i} \right)^2 \cdot \frac{1}{R_a} \quad \text{und } P_k = U_q \cdot J_k = \frac{U_q^2}{R_i}$$

$$\frac{P_a}{P_k} = \frac{R_a \cdot R_i}{(R_a + R_i)^2} = \frac{1}{\frac{R_i}{R_a} + 2 + \frac{R_a}{R_i}}$$

$$\text{bzw. } = \frac{\frac{R_a}{R_i}}{\left(\frac{R_a}{R_i} + 1\right)^2}$$



für Leistungsanpassung $R_a = R_i$

$$\text{gilt } \frac{P_a}{P_k} = \frac{1}{4} \quad !$$

$$\frac{P_a}{P_{\max}}$$

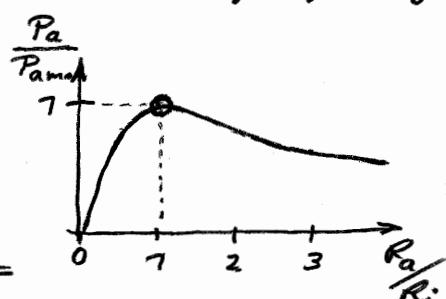
$$\text{mit } P_a = \frac{U_a^2}{R_a} = U_q^2 \left(\frac{R_a}{R_a + R_i} \right)^2 \cdot \frac{1}{R_a}$$

$$\text{und } P_{\max} = \frac{\left(\frac{U_q}{2} \right)^2}{R_i} = \frac{U_q^2}{4R_i}$$

(Leistungsanpassung)

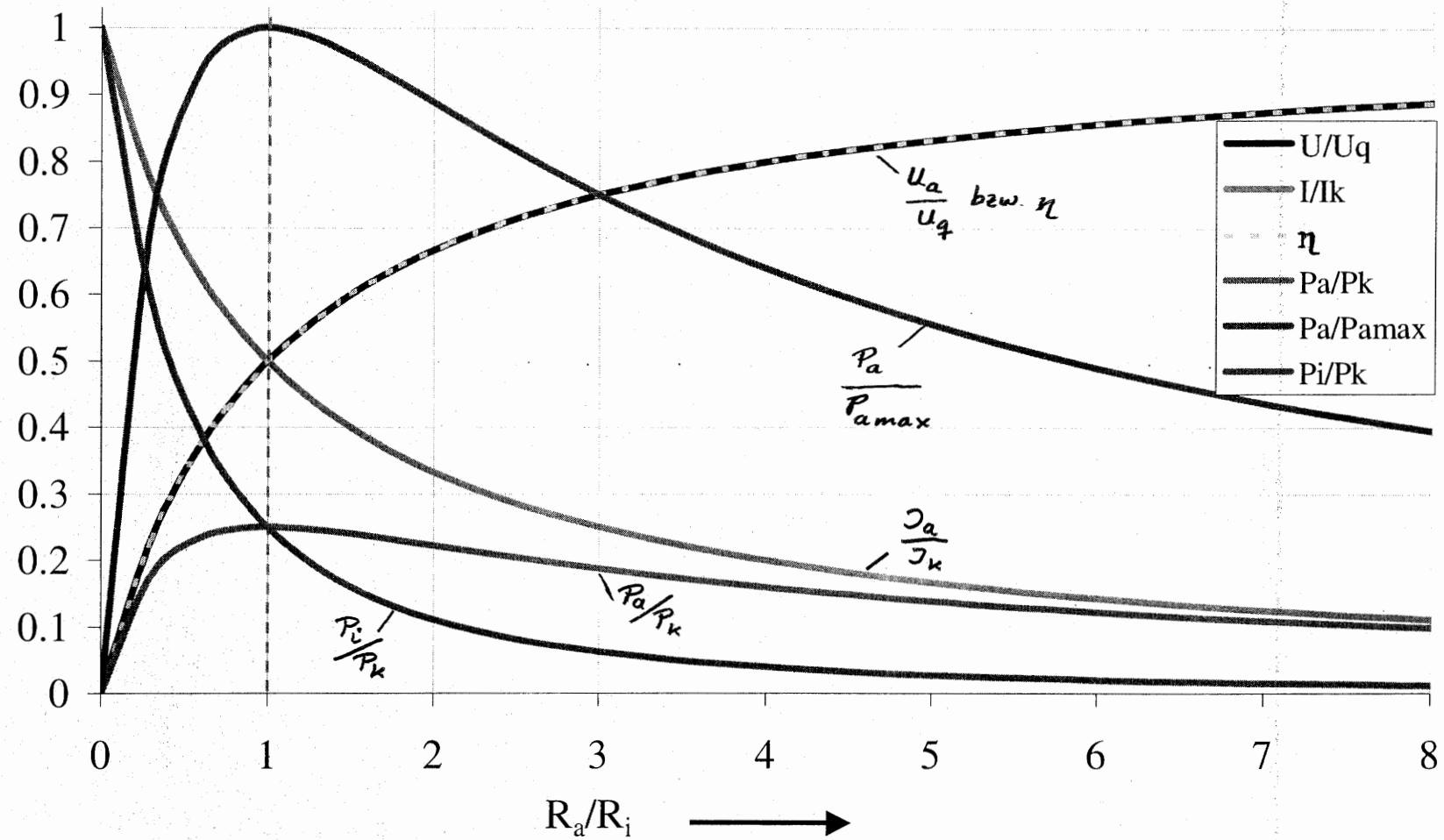
$$\frac{P_a}{P_{\max}} = \frac{R_a \cdot 4R_i}{(R_i + R_a)^2} = \frac{4 \cdot R_a \cdot R_i}{R_i^2 + 2R_i R_a + R_a^2}$$

$$= \frac{4}{\frac{R_i}{R_a} + 2 + \frac{R_a}{R_i}}$$

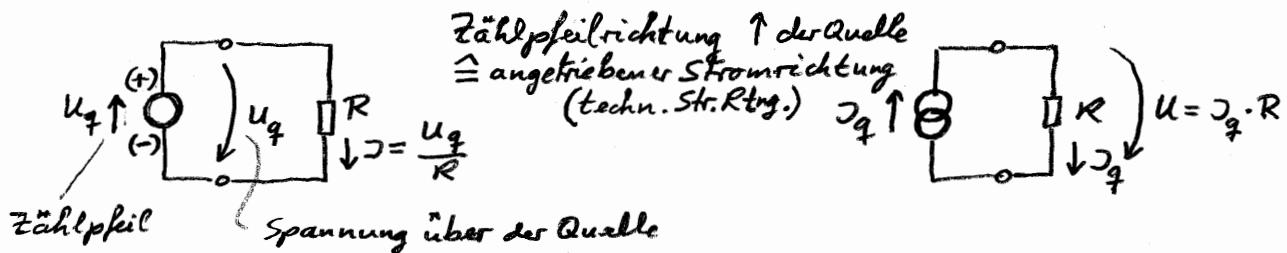


[s. hierzu "Arbeitsblatt"]

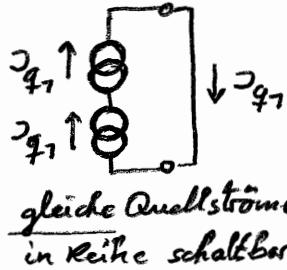
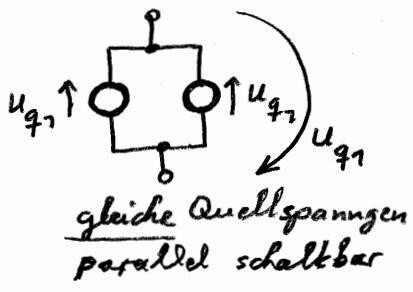
Lastabhängigkeit von Strom, Spannung und Leistung im Grundstromkreis



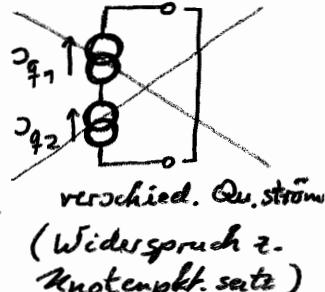
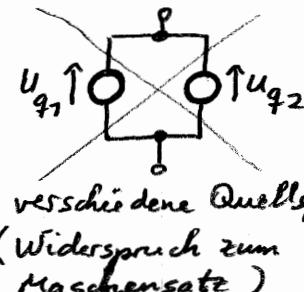
Wirkung von Quellen in Schaltungen - Zusammenfassung



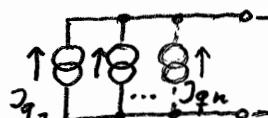
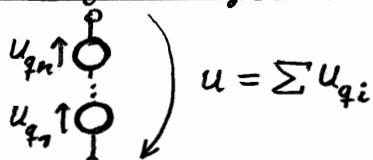
zulässig ist:



! nicht zulässig ist:

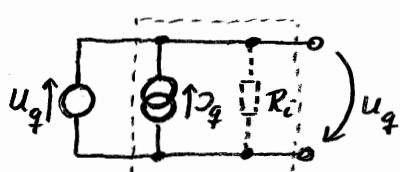


Allgemein gilt:

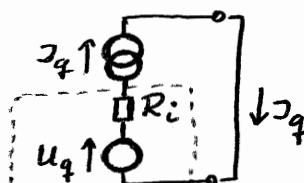


Achtung: verschied. Spungsqu.

$$I = \frac{U_{q1} - U_{q2}}{R_{i1} + R_{i2}}$$



ideale Spungsquelle erzeugt U_q
an den Klemmen.
(reale) Stromquelle wirkungslos!



ideale Stromquelle erzeugt Strom I_q
durch die Klemmen.
(reale) Spannungsquelle wirkungslos!

$$U_{qAB} = U_q \quad (I=0)$$

Leerlaufspannung

$$I_{KAB} = I_q \quad (U=0)$$

Kurzschlussstrom

Zur Schaltungsberechnung:

$$U_{AB} = U_q \frac{R_1}{R_i + R_1}$$

reale Quelle

Im Leerlauf an Kl. A-B:
ist R_2 unerheblich, da $I_{R2} = 0$
 $\rightarrow U_{R2} = 0$

$$I_q = \frac{U}{R_i + R_1}$$

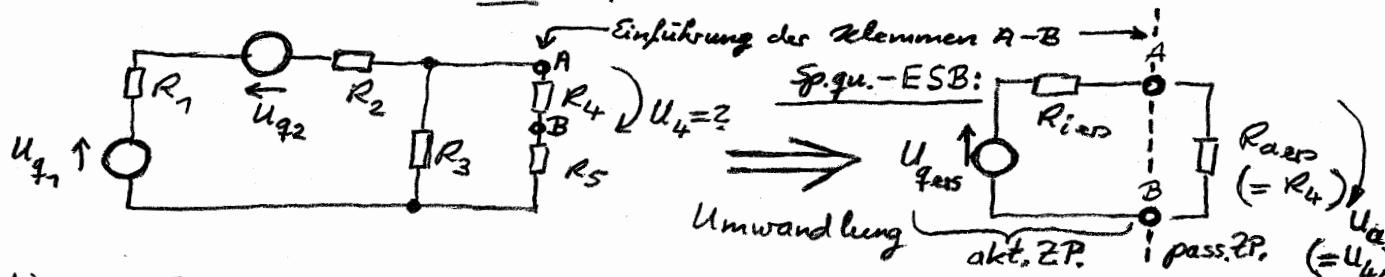
reale Quelle

Bei Kurzschluß an Kl. A-B:
ist R_i u. R_1 unerheblich, da
kurzgeschlossen, $U_{AB} = 0$

Zweipol-Theorie (Satz von Helmholtz)

Vorteilhafte Anwendung des Modells "Grundstromkreis" (als Ersatzschaltung) auf umfangreichere lineare Netzwerke, wenn U_1, \dots, U_n nur an einem Zweigelement gesucht sind.

(ZB): gg: U_{q1}, R_i ges: U_4



Hierzu Betrachtung des R_q als pass. ZP des GSK,
des "restlichen" Netzwerks als aktiven ZP
(Kennzeichnung durch Klemmen A-B)
 $\hat{=}$ Ersatz - GSK - Modell

Da allg. Knoten/Maschen als lineares Gleichungssystem beschreibbar \rightarrow lineare Abhängigkeit von U_1, \dots, U_n an Klemmen A-B im Variationsbereich

zwischen Leerlauf und Kurzschluss	$U_{AB} = U_{qAB} =$ $I_{AB} = I_{qAB} =$	U_{qers} I_{qers}	$(I_{AB} = 0)$ $(U_{AB} = 0)$
--------------------------------------	--	--------------------------	----------------------------------

Ersatzgrößen der Quelle!
bzl. der Klemmen A-B

Lösungsmethodik:

- 1.) Auftrennen des lin. Netzwerkes am Ort der ges. Größe in aktiven - u. pass. Ersatz zweipol (durch Klemmen A-B)
- 2.) Best. der Ersatzzweipolelemente (U_{qers}/I_{qers} ; R_{1ers} und R_{2ers}) durch Betrachtung an "Klemmen" A-B:

Aktiver ZP : $U_{qers} = U_{qAB} \hat{=} \text{Leerlaufbetrachtung für Spannungsquelle-ESB an den Klemmen A-B}$

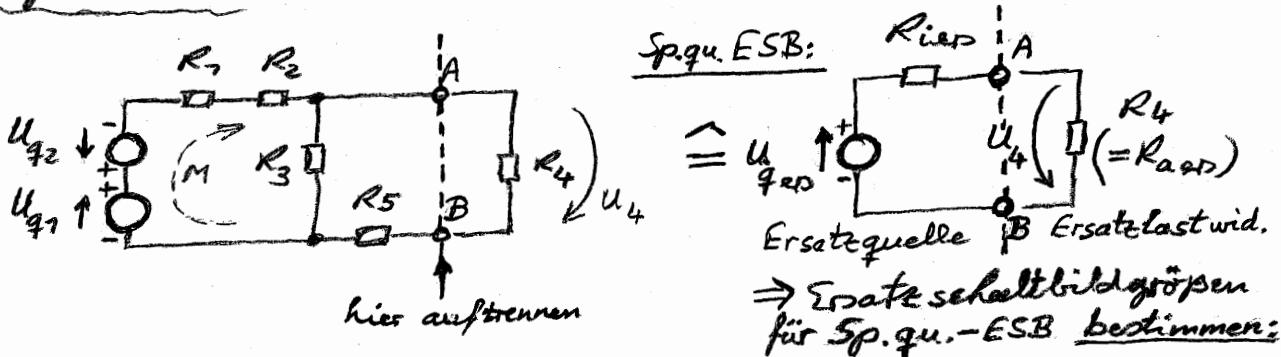
oder: $I_{qers} = I_{qAB} \hat{=} \text{Kurzschlussbetrachtung für Stromquelle-ESB an den Klemmen A-B}$
Äquivalenz von Spannungs-/ u. Stromquellen-ESB zur ev. erforderl. Quellenumwandlung nutzen!

R_{1ers} = Ersatzinnenswiderstand; bestimmt durch $U_q \uparrow \Theta$ durch Kurzschluss bzw.
 $I_q \uparrow \Theta$ durch Leerlauf ersetzt werden!
($\hat{=}$ "Innenwiderst." der idealen Quellen)

Passiver ZP : R_{2ers} = Betrachteter Wid. bzw. Ersatzwiderstand an dem I_a bzw. $U_a (= U_4)$ zu ermitteln ist.

- 3.) Bestimmung von I_A und $U_A = U_4$ aus GSk - Betrachtung der Ersatzquelle mit Ersatzlast an den Klemmen A-B.
 73: Anwendung der Strom-Spannungs-Beziehung oder Strom-/Spannungs-Teiler-Regel nutzen...

damit Beispiel weiter:



$$R_{iers} = (R_1 + R_2) \parallel R_3 + R_5 \quad (\text{ideale Spannungsquellen als Kurzschlusswid. in die Kl. A-B hineingeschoben})$$

$$U_{q_{ers}} = U_{A-B} = (U_{q1} - U_{q2}) \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_1 + R_2} \quad (\text{Leerlaufbetrachtung an Kl. A-B})$$

Vorzeichen entspr. Zählpfeilrichtung U_4 .
 vgl. eingezeichnet. Maschenumlauf (M)

$$\downarrow \quad U_4 = U_{q_{ers}} \cdot \frac{R_4}{R_{iers} + R_4} \quad \begin{array}{l} \text{entsprechend Ersatzschaltbild} \\ (\text{GSK - Betrachtung}) \end{array}$$

Allg. Anwendung der ZP-Theorie:

- Best. der Innenwiderstände zwischen bel. Knoten
- Anpassung (Leistungsanpassung) bel. ZP-Elemente
- Bel. Netzwerkberechnungen an einem NW-Element

Bem: hätte das Stromquellen-ESB als aktiver Zweipol genutzt werden sollen, so wären dessen Ersatz-Größen

$$I_{q_{ers}} = \frac{U_{q_{ers}}}{R_{iers}}$$

$$R_{iers} = R_{iers} \quad (\text{wie oben})$$

einfach aus den Ersatz-Größen des Spannungsquellen-ESB zu bestimmen.

(Aufwendiger wäre die Kurzschlussstrom-Berechnung I_{KA-B} aus Quellantreibstrom durch U_{q1}, U_{q2} und Stromteiler für $I_{R5} \dots$)

Messung von Spannung bzw. Strom (systemat. Meßfehler)

Hierfür ist das Verhältnis von Meßgeräteinnenwider. zum Innenwider. der Meßklemmen maßgebend

Spannungsmessung:

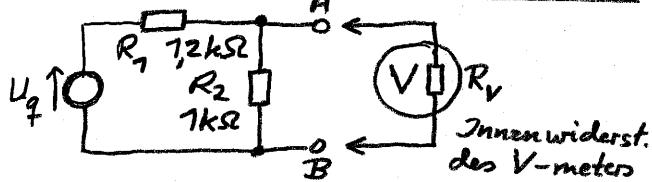
Parallelschaltung eines sehr hochohmigen V-meters über die auszumessenden (Knoten)punkte.

Strommessung:

Reihenschaltung eines sehr niederohmigen A-meters in den auszumessenden Zweig (Auf trennen des Zweiges)

z.B.:

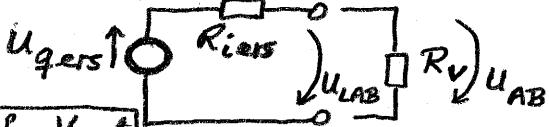
Spannungsmessung über R_2



Idealfall: $R_V \rightarrow \infty$, damit keine Belastung von $R_2 \rightarrow$ unverfälschte Messung von U_{R_2} möglich!

Für endliche R_V folgt der Meßfehler entweder aus der Betrachtung des Spannungsteilers für U_{AB} im Fall ohne R_V und im Fall R_V parallelgeschaltet zu R_2 oder aus der Betrachtung der Ersatzquelle bzgl. der Klemmen A-B (vgl. Zweipoltheorie) wobei R_V als Ersatzlast angesehen wird:

Ersatzquelle A Ersatzlast



a) ohne V-meter

Leerlaufbetrachtung an Kl. A-B:

$$U_{LAB} = U_{qers} = U_{R2} = U_q \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

mit $R_{iers} = R_1 \parallel R_2 = 545 \Omega$

hierbei ist das V-meter (R_V) nicht angeschaltet, d.h. U_{R2} unverfälschter Wert

b) mit V-meter

Belastung mit R_V an Kl. A-B:

$$U_{AB} = U_{qers} \frac{R_V}{R_{iers} + R_V} < U_{LAB}$$

für einen Meßfehler z.B. von 0,5% muss gelten

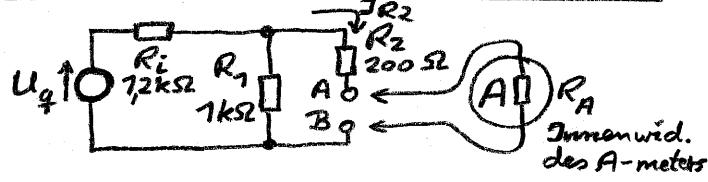
$$\frac{U_{AB}}{U_{LAB}} = 0,995 = \frac{U_{qers} \cdot R_V}{(R_{iers} + R_V) \cdot U_{qers}}$$

(-0,5%)

$$\therefore R_V = \frac{R_{iers}}{\frac{1}{0,995} - 1} = \frac{108,5 \text{ k}\Omega}{(\text{Mindestwert})}$$

z.B.:

Strommessung in Reihe zu R_2



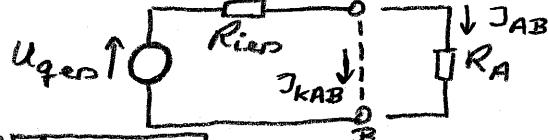
Idealfall: $R_A = 0$, damit keine Vergrößerung des Wid. im Meßzweig \rightarrow unverfälschte Messung von I_{R_2} möglich!

Für endliche R_A folgt der Meßfehler entweder aus der Betrachtung des Stromteilers für I_{R_2} im Fall ohne R_A und im Fall R_A in Reihegeschaltet zu R_2 oder

...
...
...

wobei R_A als Ersatzlast angesehen wird:

Ersatzquelle A Ersatzlast



a) ohne A-meter

$$\text{mit } U_{qers} = U_q \frac{R_1}{R_i + R_1} \quad (= \text{Leerlaufspannung am Kl. A-B})$$

$$R_{iers} = R_2 + R_i \parallel R_1 = 745 \Omega$$

damit wird ohne eingeschaltetes A-meter ($R_A = 0$) der Kurzschlussstrom $I_{KAB} = \frac{U_{qers}}{R_{iers}}$

b) mit A-meter

Belastung mit R_A an Kl. A-B:

$$I_{AB} = \frac{U_{qers}}{R_{iers} + R_A}$$

für einen Meßfehler z.B. von 0,5% muss gelten

$$\frac{I_{AB}}{I_{KAB}} = 0,995 = \frac{U_{qers} \cdot R_A}{(R_{iers} + R_A) \cdot U_{qers}}$$

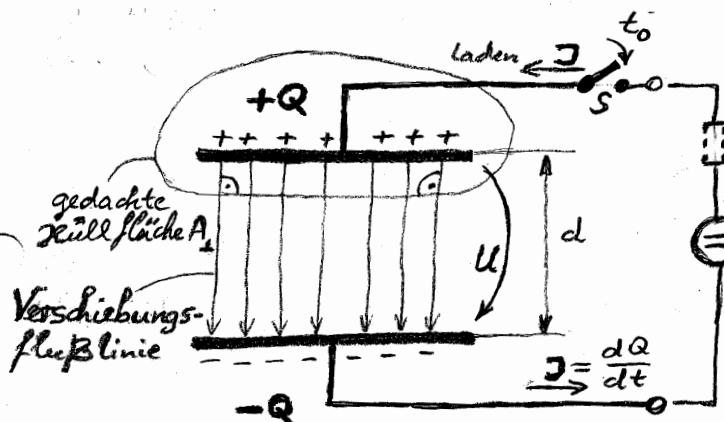
$$\therefore R_A = R_{iers} \left(\frac{1}{0,995} - 1 \right) = \frac{3,74 \Omega}{(\text{Max.-Wert})}$$

Elektrisches Feld

Hier nichtleitendes Medium zwischen 2 Elektroden (Dielektrikum)
 (Spez.: "Elekrostatisches Feld": ruhende Ladungen: $Q = \text{const.}$, $\sigma = 0$, $E_{\text{el}} = \text{const.}$,
 d.h. $\neq f(t)$)

Hier ist die Ladung Q Ursache des Feldes!

entstehendes \vec{E} -Feld } wie im el. Strömungsfeld, unabhängig von
 S -Feld } Art des Dielektrikums



Vorstellung: Erf. Lade-/Entladestrom J setzt sich im Nichtleiter als Verschiebungstromfort!
 d.h. Ladungen im Dielektrikum werden beim Auf-/Entladen bewegt!

Darst. durch Verschiebungstromfort Ψ = Linien von jeder pos. zur neg. Lad.

\cong Quellenfeld: Anfang \rightarrow Ende
 (im Gegensatz zum Strömungsfeld, wo die Strömungslinien in sich geschlossen sind.)

wobei gesamt:

$$\Psi_{\text{ges}} = Q$$

Die Ladung Q erzeugt damit ein Ladungsfeld, den Verschiebungstromfort, der aus der verteilten Ladung quillt und zwar genau durch eine umhüllende Fläche A_{\perp} . Dann ist der Verschiebungstromfort Ψ gleich der Ladung Q .

Def. der von den Eigenschaften des Dielektrikums unabhängigen

Verschiebungstromfort-
dichte

$$\vec{D} = \frac{\Psi}{A_{\perp}} = \frac{Q}{A_{\perp}}$$

bzw. als
Feldgröße:
 am Ort x_0

$$\vec{D} = \frac{dQ}{dA_{\perp}}$$

$$[D] = \frac{As}{m^2}$$

es gilt umgekehrt $\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$, wenn innerhalb der Fläche A_{\perp} die Ladung Q liegt.

! Auf jeder von Verschiebungstromfortlinien begrenzten (denkbaren) Teilfläche werden gleich große Teilladungen verschoben.

d.h.: - in eine Zelle (Teilfläche) gehen ebenso viele \vec{D} -Linien hinein, wie heraus (Kontinuität)

- längs einer Verschiebungstromfortlinie \vec{D} wirken Kräfte auf alle durchlaufenden Ladungen im Dielektrikum

\vec{D} ist an die felderezeugende Ladung Q gebunden!

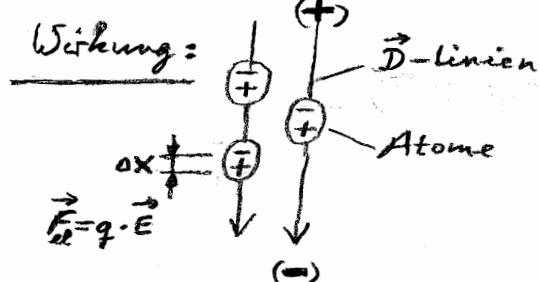
E beschreibt die Kraftwirkung auf eine (Probe)ladung im Feld: $F = q \cdot E$

Wird Spannungsquelle U abgeschaltet, bleibt $Q = \text{const.}$
aber E ist jetzt die Folge von \vec{D} !

Der Zusammenhang zwischen der Ursache \vec{D} -Feld und der materialabhängigen Wirkung E -Feld liefert die

Dielektrizitätskonstante ϵ

Das el. Feld "greift" durch bel. Dielektrika "durch" (ohne frei bewegl. Lad.-träger!)



Die Kraftwirkung des el. Feldes erzeugt elastische Verschiebung der e^- -Zügel gegenüber Atomkernen(+)

Es entstehen el. Dipole, da Ladungsschwerpunkte getrennt werden

dies ist die sogenannte
"Dielektrische Polarisation"

(\equiv gespeicherter Energie im Feld aus Verschiebung um ox mit Feldkraft F_e)

→ sie schwächt das Feld im Dielektrikum - das Polarisationsfeld wirkt dem äußeren Feld entgegen, damit gilt $\vec{E} = \vec{D}/\epsilon$ bzw. besser:

$$\rightarrow \boxed{\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \cdot \vec{E}} \quad \text{wobei } \boxed{\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r}$$

Dielektrizitätskonstante ϵ_r - Elektrische Feldkonstante, Naturkonst. (Dielektr. konstante d. Vakuums) $\epsilon_r = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$ dimensionslos! materialabh.

Im Vakuum (d.h. keine Polarisation) ist $\epsilon_r = 1$ (ex. kein Medium mit $\epsilon_r = 0$!)

ϵ_r -Werte sind in:

Luft $\epsilon_r = 1,0006$

Si 12

Porzellan 6

H_2O 80

Keram. Sinterw. > 700 (Keramische Kondensatoren)

Bariumtitanol ... 4000 (Piezoelektrische Wandler)

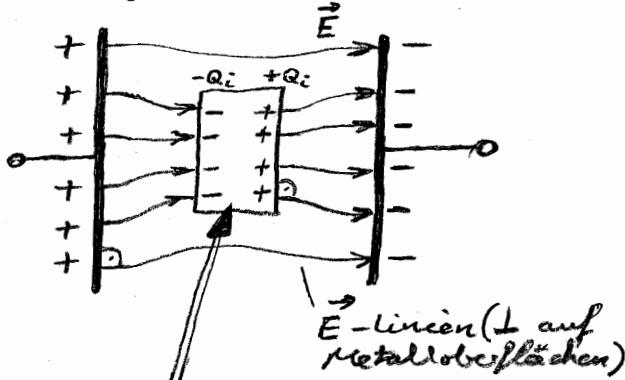
allg. gilt: $\epsilon_r \cdot E = \text{const.}$ für $Q = \text{const.}$ $\rightarrow \epsilon_r = \frac{E(\text{Vakuum})}{E(\text{Material})} \Big|_{Q=\text{const.}}$

d.h.: $E \downarrow$ mit $\epsilon_r \uparrow$: z.B. wenn Material ϵ_r in Plattenkondensator bei offenen Klemmen "eingeschoben" wird.

⇒ Materialeigenschaft ϵ verknüpft das \vec{D} - und \vec{E} -Feld

Influenz und Polarisation

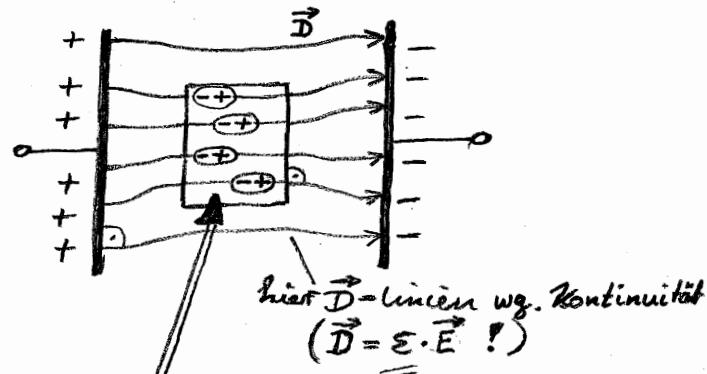
längs einer \vec{D} -linie wirken Kräfte auf alle Ladungen:



Elektrischer Leiter im el. Feld

⇒ **Influenz**

hier Ladungstrennung (bewegl. Ladträger)!
 $\pm Q_i$ kompensieren das äußere el. Feld
 im Leiterinneren, dieser Bereich wird
 ↗ feldfrei! (\cong Faraday's Käfig, d.h.
keine E -linien) im el. Leiter.



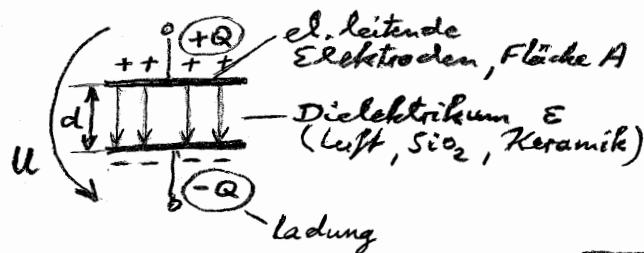
Nichtleiter im el. Feld

⇒ **Polarisation**

hier keine frei beweglichen Ladeträger.
 Verschieben von Lad.-schwerpunkten
 bzw. Ausrichten el. Dipole (Fluss.)

↗ Technisch nutzbar:
 bei den Piezoelektr. Wandern
 Formveränderung des Materials

Kapazität



Der Wert der Kapazität wird aus rein elektrischen

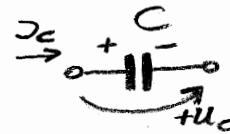
(Grund)Größen definiert:

d.h.: C kennzeichnet das Ladungsspeichervermögen des elekt. Bauelements
 bei anliegender Spannung U

$$C = \frac{Q}{U}$$

im Dielektrikum erfolgt die Speicherung el. Feldenergie!

(Eine Speicherung von Ladungen Q erfolgt aus "äußerer" elektro. Sicht)



$$[C] = 7 \frac{AS}{V} = 7 F \text{ (Farad)}$$

Kapazitäts-Bemessungsgleichung für homogenes Feld
 aus Feldgrößen ableitbar:

$$C = \frac{D \cdot A}{E \cdot d} = \frac{\epsilon \frac{A}{d}}{E} = \frac{A}{d} \cdot \epsilon$$

$$Q = D \cdot A$$

$$U = E \cdot d$$

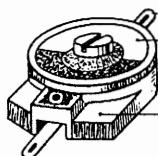
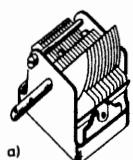
$$(D = \epsilon E)$$

$$E = E_0 \cdot E_r$$

ZB: Doppeldrahtleitung $\approx 700 \mu F/m$; Speicher-C eines DRAM's $\approx 30 \text{ pF}$
 Fotoblitzkond. $\approx 7000 \mu F$; Superkap/Goldkap/Ultracap bis $3kF/3V$

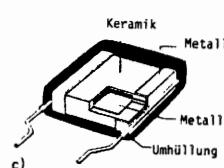
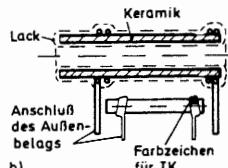
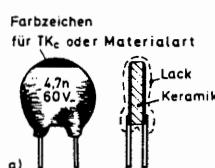
10^{-15}

Bauformen von Kondensatoren



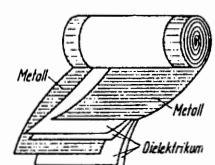
Plattendrehkondensator
und Trimmerausführung

Keramik- und Kunststoff-Trimmer

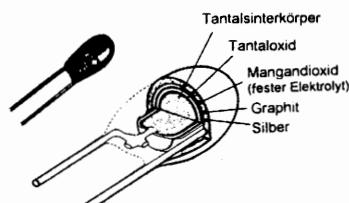
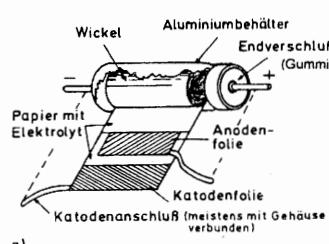


Keramikfestkondensatoren

a) Scheibenform, b) Rohrform, c) Vielschichtform (*Multilayer*)

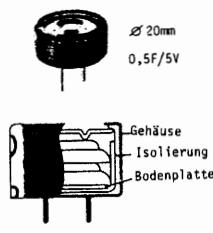
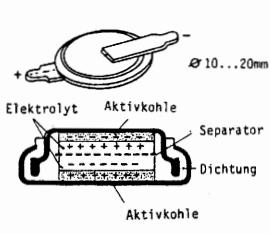


Aufbau und Kennzeichnung von Wickel- und Schichtkondensatoren
a) Wickelkondensator, b) Schichtkondensator



Elektrolytkondensatoren (Elkos)

a) Aluminiumelko, b) Tantalelko mit Sinteranode



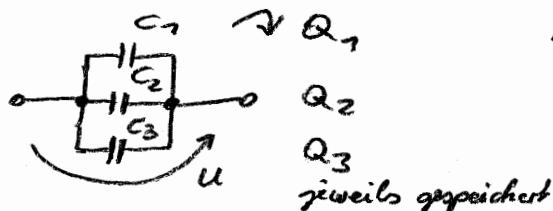
Doppelschicht-Kondensatoren

a) Knopfkondensator, b) Blockkondensator, c) Wickelbauform,

Bauarten v. Kondensatoren:

$\leq 500 \mu F$	Drehkondensator: Metall-Scheiben im lefft ($\epsilon_r \approx 1$)
$\leq 1 \mu F$	Metallfolien kond: Metall-Folie, mehrere Lagen Papier ($\epsilon_r \approx 5$)
μF	MF(Metallpapier): auf Papierfolie (6 µm) aufgedampfte Metall-Schicht ($0,7 \mu m$)
μF	Lackfolien ~: Lackschicht (3 µm) - - -
$100 nF$	Keramik ~: Sinterkeramik, Metall-Dedampfung
$10 mF$	Elektrolyt ~:
	! gepolt
	<p style="text-align: center;">$\epsilon_r \rightarrow 1000$</p>
	auch Tantal ~: Ta_2O_5 mit $\epsilon_r \approx 25$ und festem Elektrolyten (Reststrom $\rightarrow 0$)
Bem:	E_{max} in Papier 200 kV/cm in Al_2O_3 10 MV/cm \rightsquigarrow (Spannungs-) Durchschlagsfestigkeit ...

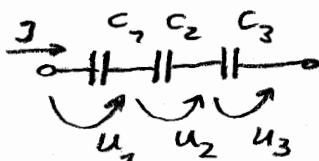
Reihen- / Parallelschaltung von Kondensatoren



gleiche Spannung an allen C's

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q_1}{U} + \frac{Q_2}{U} + \dots + \frac{Q_n}{U} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

$$C_{\text{ges}} = \sum C_i$$



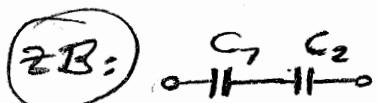
Ladestrom I transportiert
gleiche Ladung Q in alle C's
(weil Reihenschaltung)

! gleicher Verschiebungsgleich Ψ (inf. Lad. transp)
erzeugt jew. gleiche Influenzladung im
jedem Kond. ! (Anfangsbedingung $Q_i = 0$)

$$\text{d.h. } Q_1 = Q_2 = Q_3 = \underline{\underline{Q}}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{U}{Q} = \frac{U_1}{Q} + \frac{U_2}{Q} + \dots + \frac{U_n}{Q}$$

$$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \sum \frac{1}{C_i}$$

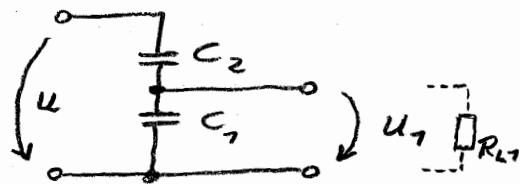


$$\underline{\underline{C_{\text{ges}}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}} = \underline{\underline{\frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}}}$$

29

Kapazitiver Spannungsteiler

nur Wechselspannungs- u. Impulstechnik (bei Gleichspannung U Ladungsausgleich über R_{L1})



- mit $C = \frac{Q}{U}$ und
- wegen Verschiebung gleicher Ladungsmengen bei Reihenschaltung gilt $Q_1 = Q_2 = Q$

$$\Rightarrow \frac{C_1}{C_{\text{ges}}} = \frac{\frac{Q}{U_1}}{\frac{Q}{U}} = \frac{U}{U_1}$$

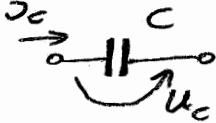
ZB: $\frac{U_1}{U} = \frac{C_{\text{ges}}}{C_1}$

$$= \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \cdot \frac{1}{C_1} = \underline{\underline{\frac{C_2}{C_1 + C_2}}}$$

mit $C_{\text{ges}} = \text{Reihenschaltung von } C_1, C_2$

Kondensator als Schaltelement

C speichert Ladung Q , hierzu Stromfluss (Ladungstransport) zu betrachten \rightarrow aus Def. gln. für I folgt:



$$I_c = \frac{dQ}{dt} = \frac{d(C \cdot U_c)}{dt} \quad \text{mit } C = \frac{Q}{U_c}$$

Zählpfeilrichtung

$$= U_c \cdot \cancel{\frac{dC}{dt}} + C \cdot \cancel{\frac{dU_c}{dt}}$$

i.a. $C = \text{Const.}$

(sonst z.B. Schwingkondensatorwandler $C(t)$ angew. zur Ladungsmessung)

mit $I_c = i_c$

wobei

$$i_c = f(t)$$

und $U_c = f(t)$ wird

$$i_c = C \cdot \frac{dU_c}{dt}$$

differenz. Form

! Jetzt Übergang zu zeitlich veränderlichen Größen, dargestellt durch kleine Buchstaben!

bzw. mit Umformung.

$$dU_c = \frac{1}{C} i_c dt$$

$$U_c = \frac{1}{C} \int \underline{\underline{i_c dt}}$$

integrale Form

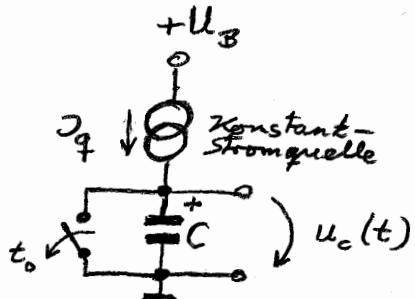
Strom-Spannungs-Beziehung an Kapazität

Änderung der Kondensatorladung erfolgt durch Zu- und Abfluss von Ladungen über die Zuleitungen (= Konvektionsstrom) i_c !

Bei $U_c = \text{const.}$ fließt kein Strom!

d.h. C wirkt bei Gleichspannung als "Leitungsunterbrechung" (widerstandsmäig!) 30

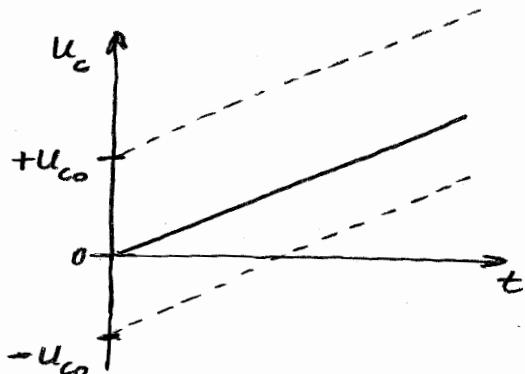
Beispiel: Öffnen des Schalters zum Zeitpunkt $t_0 \rightarrow$ Ladebeginn mit Lade-Stromquelle $\mathcal{I}_q = \text{const}$ (konstanter Gleichstrom)



es gilt: $u_c = \frac{1}{C} \int i_c dt$ Strg.-Bez. an Kapaz.

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t \mathcal{I}_q dt + u_{co}$$

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \cdot \mathcal{I}_q \cdot (t - t_0) + u_{co}$$

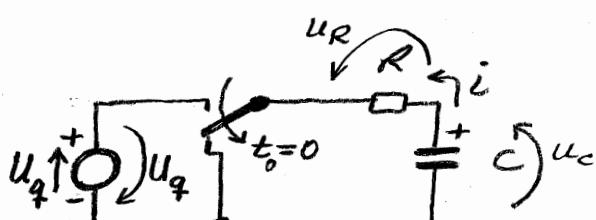


für $\mathcal{I}_q = \text{const.} \rightarrow u_c(t)$ linearer Verlauf

Achtung!: Integrationskonstante beachten für bestimmtes Integral

$$= u_{co} \Big|_{t_0} \quad \begin{array}{l} \text{Spannung, die} \\ \text{bereits bei } t_0 \\ \text{über } C \text{ vorhanden} \\ \text{war!} \end{array}$$

Ausschalten einer R-C-Schaltung



ges.: $u_c(t)$ und $i(t)$

für $t \geq 0$ gilt Maschengleichg.: $u_c + u_R = 0$ wobei $u_c(t_0=0) = u_{co} = -U_q$

mit $u_R = i \cdot R$

und $i = C \cdot \frac{du_c}{dt}$

Kondensator C "zu Beginn" auf U_q aufgeladen. Schalter wird zum Zeitpkt. $t_0 = 0$ "nach unten" auf "Masse" geschaltet (\perp). Damit beginnt der Entladevorgang! Entladestromrichtung i wie eingezeichnet. Zählpfeilrichtung u_c in Richtung i festgelegt (entsprechend Strom-Songs-Regel)

$$u_c + CR \frac{du_c}{dt} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{Differenzial-} \\ \text{gleichung (DGL)} \\ 1. \text{ Ordnung} \end{array}$$

diese DGL ist nicht durch algebraische Umformung lösbar.

⇒ Lösung der DGL durch Trennung der Variablen:

$$\frac{du_c}{u_c} = - \frac{1}{CR} dt$$

nun Integration:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x$$

$$\int \frac{du_c}{u_c} = -\frac{1}{CR} \cdot \int dt$$

Anfangswert
bei $t_0=0$

$$\ln \frac{u_c}{U_{co}} = -\frac{t}{CR}$$

$$\frac{u_c}{U_{co}} = e^{-\frac{t}{CR}}$$

$$\rightarrow u_c(t) = U_{co} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

mit der Kenngröße Zeitkonstante τ :

$$\tau = C \cdot R$$

$$\tau \text{ hat Dimension der Zeit } [\tau] = \frac{As}{V} \cdot \frac{V}{A} = \underline{\underline{7s}}$$

Jetzt Bestimmung von U_{co} aus Anfangsbedingung zum Ausschaltzeitpunkt.

Bei $t_0=0$ gilt: $u_c|_{t_0} = U_{co} = -U_q$ (d.h. Kond. vollständig auf $-U_q$ aufgeladen)

deshalb muß für die Lösung der im Ansatz eingeführte Tähleppfeil für u_c "umgedreht" werden, um der tatsächlichen Richtung des Spannungsabfalls über C zu entsprechen. Aus $u_c(t) = -U_q \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ wird damit (Vorzeichenumkehr):

$$u_R(R \square \overset{\leftarrow}{i} \frac{1}{C}) u_c$$

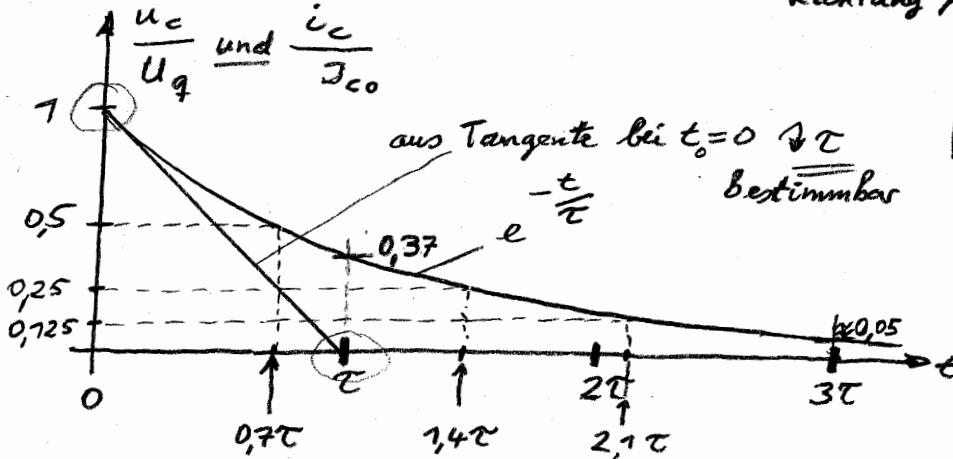
$$u_c(t) = U_q \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Für den Entladestrom \rightarrow Richtung wie eingezeichnet, folgt mit der Strom-Spannungsbeziehung an C :

$$i = i_c = C \cdot \frac{du_c}{dt} = C \cdot \frac{U_q}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = i_c(t) = \left(\frac{U_q}{R} \right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Bem: Der vorausgehend erforderliche Ladestrom würde in umgekehrter Richtung fließen!

Anfangs-
wert U_{co}
bei $t_0=0$
 $= (\max.)$
Abschalt-
strom



Entladekurve
($u_c(t)$ und $i_c(t)$
normiert auf Max.-wert)

Tangentenanstieg:

$$\frac{du_c}{dt}|_0 = -\frac{U_q}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\text{Anstieg}|_0 = -\frac{U_q}{\tau} \quad (\hat{=} \frac{\Delta y}{\Delta x})$$

(32)

Bem: Halbwertzeit t_H : $e^{-\frac{t_H}{T}} = \frac{1}{2}$
 (in Kernphysik üblich) $\frac{t_H}{T} = \ln 2 \approx 0,7$

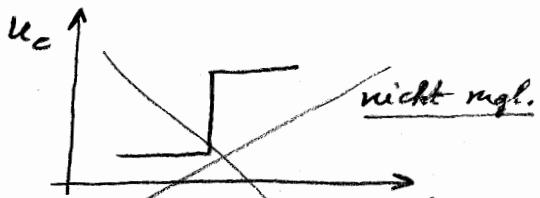
$$\rightarrow t_H \approx 0,7T \quad ! \text{ Gilt für jeden Zeitbereich der e-Fktn.}$$

- Allg. gilt: • mit $R \downarrow \rightarrow I_{C_0} \uparrow$ und Entladungszeit \downarrow
- Für techn. Anwendung: • nach $\begin{cases} t = 3T & \text{ca. 5% vom Anfangswert } U_0 \text{ bzw. } I_{C_0} \\ t = 5T & \text{ca. 1%} \end{cases}$ sind erreicht.
- T aus Tangente grafisch bestimmbar!

! Kondensatorverhalten:

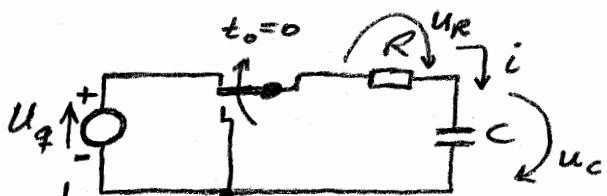
U_C kann am C nicht springen (sonst wäre Leistung $\rightarrow \infty$)

C "hält" die Spannung zum Umschaltzeitpunkt konstant



\Rightarrow In differenziell kurzen Zeiten bleibt Spannung am C konstant!
 Kondensat. dienen zum "Glätten" von Spannungen (\rightarrow Netzteile)

Einschalten (Aufladen) einer R-C-Schaltung



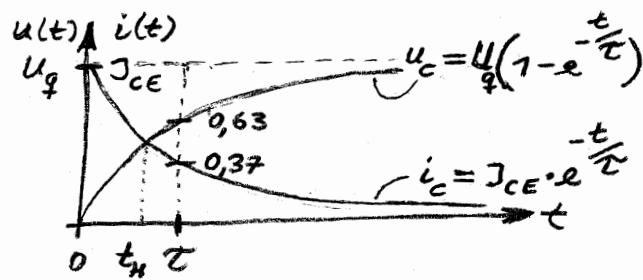
Kondensator C "zu Beginn" vollst. entladen!
 ... Aufst. der DGL \rightarrow Lösung mit Randbedingungen ... (s.o.)

Ergebnis:

$$U_C(t) = U_q \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$$i_C(t) = \frac{U_q}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

$= I_{CE}$
 (max.) Einschaltstrom bei $t=0$



! Die Ein-/Ausschaltfunktionen an R-C-Gliedern sind e-Funktionen!

Je nach Größe von $T = R \cdot C$ "folgt" U_C der aufgeschalteten Spannung am R-C-Glied exponentiell! ($T \equiv$ "Trägheit des Systems")

\rightarrow später: Grenzfrequenzbetrachtung (übertragbares Frequenz-
 bzw. Schaltgeschwindigkeit)

Kapazitives Verhalten bei harmon. Wechselgrößen (sin-Fkt'n)

allg. gilt $i_c = C \frac{du_c}{dt}$

d.h.: für $u_c(t)$ nur stetige Änderung,
mgl., sonst würde $i_c \rightarrow \infty$.

Ausatz für sin-förmige Spannung (z.B.) $u_c = \hat{U}_c \cdot \sin \omega t$ $\omega = 2\pi f$
(Weisfrequenz)

$$\rightarrow i_c = \omega \cdot \hat{U}_c \cdot C \cdot \cos \omega t$$

$$= \underbrace{\omega \hat{U}_c C}_{j_c} \cdot \underbrace{\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})}_{\text{Vergleich}}$$

Vergleich

Phasenwinkel $\frac{\pi}{2}$: i_c steht u_c um $\underline{\underline{\varphi = 90^\circ}}$ voraus!

Der ideale Kondensator (kein ohmscher Verlustwiderstand enthalten)

- Setzt damit keine Wirkleistung um! ($P_W = U \cdot I \cdot \cos \varphi$) w.g. $\cos 90^\circ = 0$
- wirkt als Speicher, nimmt periodisch Energie auf und gibt sie wieder ab - dies ist die Blindleistung.

Ohne Berücksichtigung der Phasenverhältnisse! (\rightarrow komplexe Rechng.)

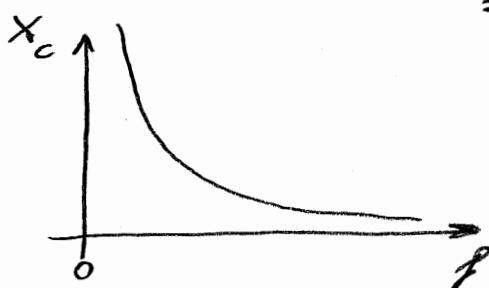
wird der

Scheinwiderstand

$$X_C = \frac{\hat{U}_c}{j_c} = \frac{1}{\omega C}$$

wenn keine ohmischen
Verluste auch:
 $=$ Blindleistung

= Verhältnis der Beträge (d.h. hier keine
Berücksichtigung der Phasenverhältnisse)



$$\omega = 2\pi f$$

frequenzabhängig, $\frac{1}{f}$ -Verlauf

für $f \rightarrow 0 \rightsquigarrow X_C \rightarrow \infty$ d.h. für Gleichspannung: "Leerlauf"

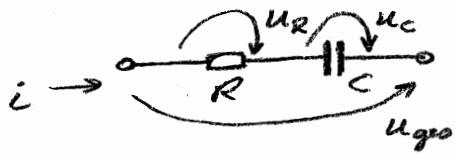
für $f \rightarrow \infty \rightsquigarrow X_C = 0$ d.h. für hohe Frequenzen: "Kurzschluß"

Bem: Technisches Ersatzschaltbild für Kondensator (reales Bauelement)



Verlustwied. R_v : Leckwiderstand (Leckstrom)
und dielektr. Polarisierungsverluste
(steigen \approx mit f^2)

Zur Rechnung mit phasenverschiebenden Bauelementen



$$i = i(t) = \hat{J} \cdot \sin \omega t$$

als Ansatz für den Strom

Zeigerdarstellung:

math.
positive
Zählrichtung
für \mathbb{Z}^3

$$\hat{U}_R = R \cdot \hat{J} \quad (u_R \text{ und } i \text{ "in Phase"})$$

$$\hat{U}_c = \frac{1}{\omega C} \cdot \hat{I} \quad (\text{gilt für Beträge von } U_c \text{ und } i)$$

aber:

aber: u_c eilt i um 90° nach

$$\hat{U}_{\text{ges}} = |U_{\text{ges}}| = \sqrt{\hat{U}_R^2 + \hat{U}_C^2}$$

$\hat{=}$ "Pythagoras" bei 90° Phasenverschiebung von u_R und u_c

$$\text{zb: } \left. \begin{array}{l} \hat{U}_R = 4V \\ \hat{U}_C = 3V \end{array} \right\} \underline{\hat{U}_{geo} = 5V}$$

bzw.:

$$\left| \frac{\hat{U}_{\text{ges}}}{\hat{J}} \right| = \sqrt{\left(\frac{\hat{U}_R}{\hat{J}} \right)^2 + \left(\frac{\hat{U}_C}{\hat{J}} \right)^2}$$

dann Betrag des "komplexen Widerstands" = Scheinwiderstand:

$$|Z_{\text{ges}}| = \sqrt{R^2 + X_c^2}$$

$$\underline{S = -\arctan \frac{X_C}{R} \text{ result. Phasen } \varphi}$$

(Qualitativ gleiches Zeigerbild wie für Spannungen)

Korrekte Betrachtung

erfolgt mit "Komplexer Rechnung" der ET.
nach Funktional-Transformation der
Zeitabh. Ausdrücke ins Komplexe und

weiterhin Rechnung mit komplexen Widerstandsoperatoren:

$$\text{mit } \underline{x} = \frac{\underline{u}}{i} \quad :$$

Imaginäre Ausdr.
für Bauelemente
mit 90° Phasenversch.
zwischen u und i

$$\begin{aligned} Z_R &= R \quad \text{--- } R \\ Z_L &= j\omega L \quad \text{--- } L \\ Z_C &= -j \frac{1}{\omega C} \quad \text{--- } \frac{C}{j} \end{aligned}$$

u, eilt i_2 um 90° voraus

U_2 eilt U_1 um 90° nach

(neg. Vz. !)

Führt auf Lösung algebraischer Gleichungen mit komplexen Koeff.,
d.h. keine Lösung von DGL erforderlich!

⇒ siehe Teil 4 der LV ..., sog. "Symbolische Methode der E-Technik"

Betrachtung zur Feldenergie am Kondensator:

[$W = P \cdot t$]

$$\underline{W_{\text{Feld}}} = \int_0^{\infty} u_c \cdot i_c dt = \int_0^{\infty} u_c \cdot \frac{dQ}{dt} dt \quad \text{nach Einsetzen der Def.-Glg. für } i_c(t)$$

und Integration über Q

$$= \int_0^Q u_c \cdot dQ = \frac{1}{C} \int_0^Q Q \cdot dQ = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C}$$

mit $Q = C \cdot U$

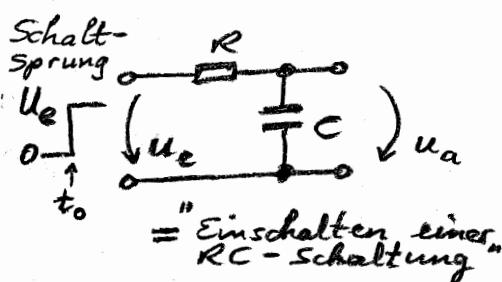
$$\rightarrow \boxed{W_{\text{Feld}} = \frac{C \cdot U^2}{2}}$$

U -Momentanwert der Spannung, auf die C aufgeladen ist.

Die Energie ist im Feld gespeichert, d.h. im Dielektrikum!
Die Metallelektroden sind nicht Träger der Energie, sondern begrenzen nur den Raum!

Aufstiegszeit und Grenzfrequenz

Das "Tiefpassglied" 1. Ordnung gilt als Modell für das Schaltverhalten von elektronischen Schaltern!

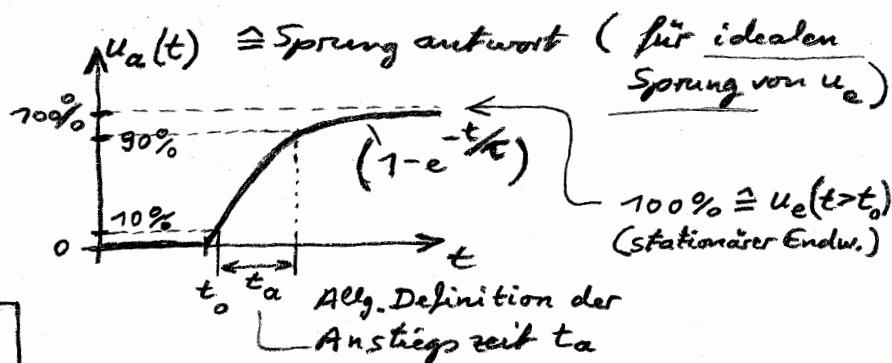


Def:

Anstiegszeit t_a :

$$t_a = t_{90\%} - t_{10\%}$$

$$= \tau (\ln 0,9 - \ln 0,1)$$



$t_a = \tau \cdot \ln 9 \approx 2,2\tau$ Mit diesem Ergebnis folgt nun der

Vergleich zur "Grenzfrequenz" f_g bei der Übertragung einer sin-förmigen Spannung $u_e(t)$ auf den Ausgang u_a :

Def:

Grenzfrequenz:

$$\text{f_g bei } \left| \frac{u_a}{u_e} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$$

Definiert für $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -fachen Abfall bei frequenz abhängigem Übertragungsverhalten der Schaltung, bezogen auf den Max.wert

Mit Scheinwiderstand von C : $X_C = \frac{1}{\omega C}$

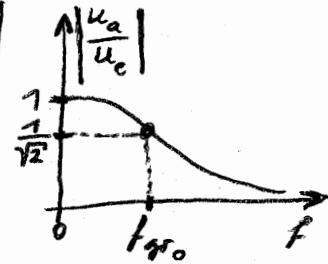
folgt mit Spannungsteiler: Beträge, da Phasenverhältnisse hier unberücksichtigt

$$\left| \frac{U_a}{U_e} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \left| \frac{X_C}{R + X_C} \right| = \left| \frac{\frac{1}{\omega C}}{R + \frac{1}{\omega C}} \right| = \left| \frac{1}{1 + \omega CR} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}$$

$$\text{ist erfüllt für } \omega = \omega_{gr} = \frac{1}{CR} = \frac{1}{T}$$

↗ Obere
Grenzfrequenz
(Tiefpass 7. Ordnung)

$$f_{gr} = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi T}$$



$$\text{mit } t_a \approx 2,2T; f_{gr} \approx \frac{1}{2\pi \frac{t_a}{2,2}} \approx \frac{0,35}{t_a}$$

↗ Eingeschnittene Größen gleichung hierzu:

! hier gilt:

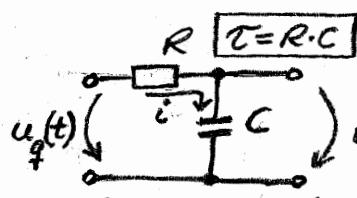
$B = f_{gr}$, wenn auch
Gleichspannung übertragen
wird!

$$\cancel{\text{Bandbreite } B} = \frac{350}{MHz \cdot t_a / ns}$$

(z.B. für $t_a = 6 \text{ ns} \rightsquigarrow \approx 60 \text{ MHz}$ Bandbreite)

⇒ je größer f_{gr} , desto kleiner ist die Anstiegszeit, desto schneller verlaufen die Schaltvorgänge.

Integrierglied (Tiefpassschaltung)



Diese RC-Schaltung soll nun eine allgemeine Zeitfkt. $U_q(t)$ am Eingang erhalten: Arbeitet als Integrierglied, wenn $\tau \gg T_q$ (Signalperiodendauer von $U_q(t)$)

damit: $U_c \ll U_R$ als Bedingung! ⇒ i wird nur von $U_q(t)$ und R bestimmt, nicht von U_c !

↗ $U_q(t) \approx U_R = i \cdot R = R \cdot C \cdot \frac{du_c}{dt} \rightsquigarrow du_c = \frac{1}{RC} \cdot U_q(t) \cdot dt$ womit nach Integration:

$$U_c = \frac{1}{\tau} \int_0^t U_q(t) \cdot dt + U_c(t=0)$$

(prakt. meist 0)

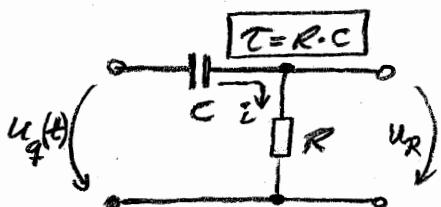
dh.: Schaltung wirkt als Integrator für $U_q(t)$ wenn $\tau = R \cdot C \gg T_q$

Vergleiche: RC-Spannungsteiler für $R \gg \frac{1}{\omega C}$ - gilt für hohe Frequenzen bzw. Tiefpassfktn. (bei Sample & Hold - Abtastglied)

Differenzierglied (Hochpassschaltung)

Hierzu wird R, C vertauscht

⇒ Diese Schaltung arbeitet als Differenzierglied, wenn $t_q \ll f_{gr}$, d.h.



für $T \ll T_q$, damit $u_R \ll u_c$ (Bedingung!)

$$\text{Von } u_q(t) \approx u_c = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{1}{C} \int \frac{u_R}{R} dt = \frac{1}{RC} \int u_R dt$$

nach Umformung für u_R und Differentiation entsteht:

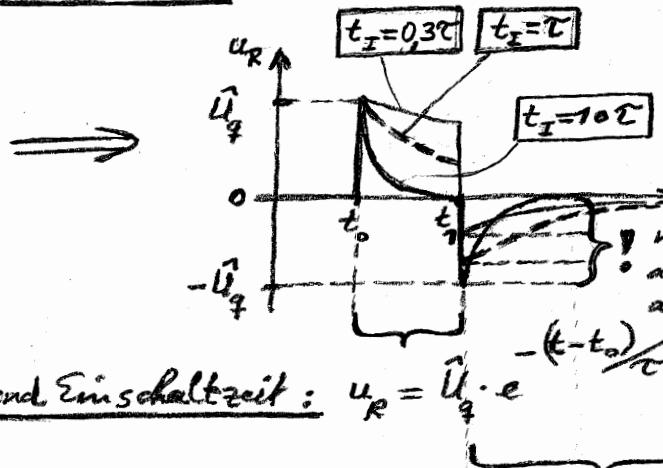
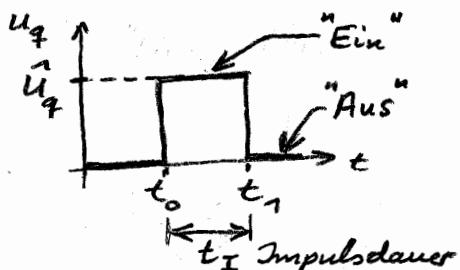
$$u_R \approx R \cdot C \frac{du_q}{dt}$$

d.h. Differentiation von $u_q(t)$

! Häufigste schaltungstechn. Anwendung jedoch als Koppelglied zur gleichspannungsstetigen Impulsübertragung. Vgl. Ausschaltvorgang (S.31), es gilt:

$$u_R(t) = i \cdot R = \bar{u}_q \cdot e^{-t/\tau}$$

$$\text{mit } i|_{t_0} = \frac{\bar{u}_q}{R}, \quad \tau = R \cdot C$$



$$\text{Verlauf } u_R(t) \quad \text{während Einschaltzeit: } u_R = \bar{u}_q \cdot e^{-t/\tau}$$

$$\text{während Ausschaltzeit: } u_R = \bar{u}_q \cdot e^{-t/\tau}$$

hier "Restspannung" aus Einschaltvorgang z. Zt. Pkt. t_I zu berücksichtigen (d.h. Überlagerung beider Effekte!)

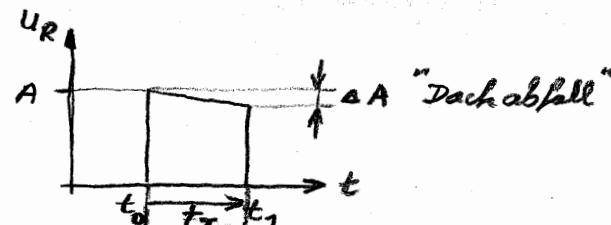
Einschalten z.zt. t_0

Ausschalten mit Sprung $-\bar{u}_q$ z.zt. t_1

Def. der Impuls kenngröße

Dachabfall ΔA

$$= (\text{Spannungs})\text{-Verhältnis} \quad \frac{\Delta A}{A} \cdot 100\%$$



für $t_I \gg \tau$ wird P größer! aber

d.h. bessere Differenzierfunktion

für $t_I \gg \tau$ wird u_R näherungsweise das Differential des Eingangsspannung:

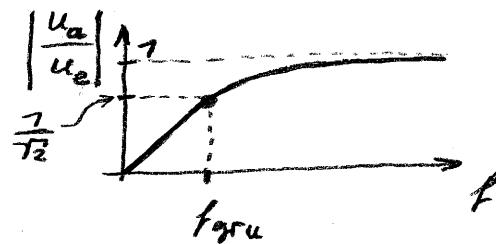
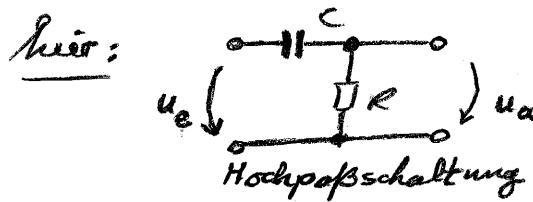
$$u_R \approx \tau \cdot \frac{du_q}{dt} \quad (\text{vgl. oben})$$

für $t_I \ll \tau$ Originalgetreue Übertragung des Rechteckimpulses:

wichtig für nicht signalformverändernde kapazitive Kopplung von Verstärker- bzw. Schaltstufen.

(dann wird C praktisch nicht umgeladen, bei Eliminierung des Gleichanteils)

Vergleich zur unteren Grenzfrequenz f_{gru} bei der Übertragung sinus-förmiger Spannung $u_e(t)$ auf den Ausgang $u_a(t)$
 \Rightarrow gleiche Betrachtung wie bei oberer Grenzfrequenz (vgl. S. 36)



↓ Untere
Grenzfrequenz
(Hochpass 1. Ordnung)

$$f_{gru} = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi \tau}$$

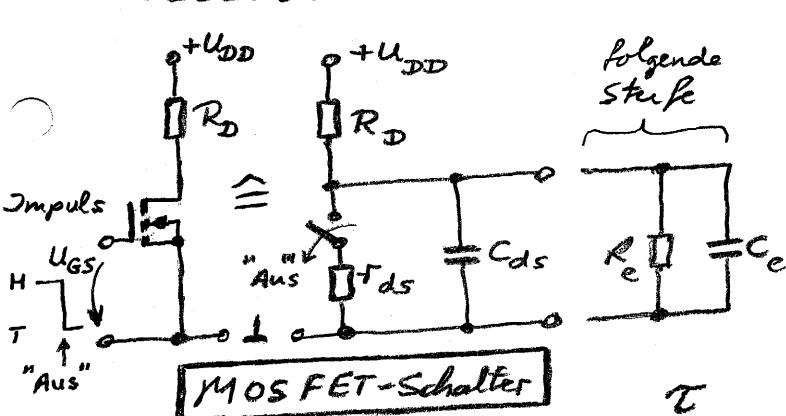
Solange Dachabfall klein ist (< Prozentbereich) gilt näherungsweise:

$$\frac{\Delta A}{A} \cdot 100\% = \frac{t_2}{\tau} \cdot 100\%$$

wegen $f_{gru} \sim \frac{1}{\tau}$ gilt also: Dachabfall $\sim f_{gru}$

dh: je kleiner f_{gru} (je größer τ), desto geringer wird der Dachabfall!

Beispiele zur schaltungstechnischen Anwendung:



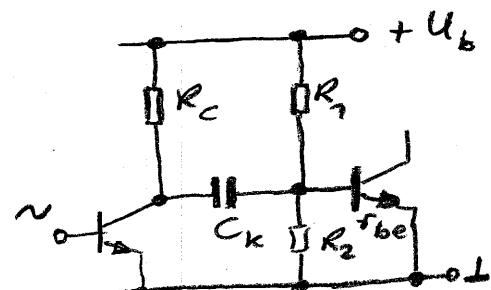
Anstiegszeiten $t_{a\text{ein}} \approx 2,2 \cdot (f_{ds} \parallel R_D) \cdot C_{ds}$

$t_{a\text{aus}} \approx 2,2 \cdot R_D \cdot C_{ds}$

Bem:! mit folg. Stufe: gew. $\parallel (R_e \parallel C_e)$

↓ $t_a \uparrow$ wegen zusätzl. kapaz.
Belastung, i.a. gilt:

$R_e \gg f_{ds}, R_D$



$$f_{gru} = \frac{1}{2\pi(R_C + R_I \parallel R_2 \parallel r_{be}) \cdot C_K}$$

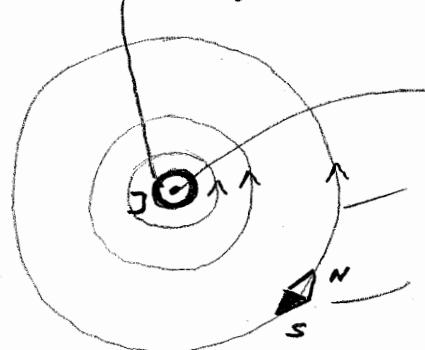
f_{gru} abh. von Transistorkapazitäten / Grenzfrequenzen

hier ist die Angabe der erreichbaren Grenzfrequenzen von Interesse

Das Magnetische Feld

Kraftfeld, das durch bewegte el. Ladungen erzeugt wird, bzw. umgekehrt auf bewegte el. Ladungen wirkt.

d.h. Stromdurchflossener Leiter ist immer von Magnetfeld umgeben (Oersted 1819):



J "nach oben" (Pfeilspitze)

Φ -Linien: "Magnet. Fluss", steht für Gesamtwirkung des magnet. Feldes
Ausrichtung einer Magnetnadel (Kraftwirkung)

Zählpfeil -
Festlegung Φ
" $\hat{=}$ Rechte Hand-
Regel "

Φ -linien umwickeln J (Φ in sich geschlossen, Wirbelfeld!)

Feldbild: Tangente an Feldlinien $\hat{=}$ Richtung der Kraftwirkung
liniendichte $-n-$ $\hat{=}$ Stärke $-n-$

Beschreibung durch:

Vektor-Feldgröße für die Wirkung: Magnet. Flussdichte \vec{B}
für die Erregerursache: $-n-$ Feldstärke \vec{H}

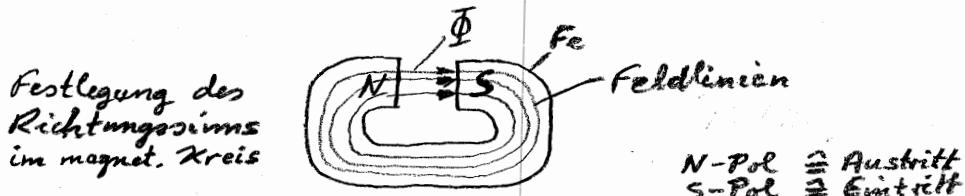
Materialeigenschaften z.B.: Ferromagnetika (Fe, Co, Ni)

"konzentrieren" das Magnetfeld, d.h. sind gute magnet. Leiter!

(Begriff v. Stadt Magnesia/Kleinasiens, dort Erze mit magnet. Eigensch.)

Magnet. Fluss Φ = Gesamtheit der Feldliniendarstellung, die eine (belieb.) senkrechte Fläche durchsetzen (Skalar!) = "Gesamtheit der magnet. Feldwirkung"

$$[\Phi] = \text{Vs} = \text{Wb} \text{ (Weber)}$$



Vergleich: Φ verhält sich wie der Strom im el. Stromungsfeld (Quellenfrei, Flussverzweigungen negl., d.h. magnet. Knotensatz gilt)

→ Begriff: "Magnetischer Kreis"

Def.: Magnet. Flussdichte
(= Induktion)

$$\vec{B} = \frac{d\Phi}{dA_{\perp}}$$

als Feldgröße
Vektor!

senkrecht durchflossenes Flächenele-
ment

$$[B] = 7 \frac{Vs}{m^2} = 7 T \text{ (Tesla)}$$

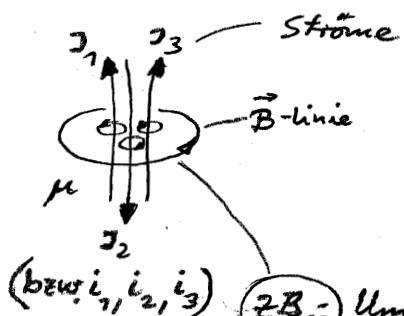
z.B.: Erdmagnetfeld $\approx 7 \cdot 10^{-5} T$
Luftspalt el. Masch. $\approx 1 T$
Comp.-Tomograf $\approx 6 T$

(früher: Einheit Gauß)
 $1 T = 10^4 G$

$$\rightarrow \Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}_{\perp} = \int_A B \cdot dA \cdot \cos \alpha = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Skalarprodukt

Durchflutungsgesetz u.. magnet. Permeabilität



Experiment zeigt, dass \vec{B} von der:

- (vorzeichenrichtigen) Stromsumme I_i (bzw. i_i) und
- den Materialeigenschaften des umg. Raumes
(magnet. Materialkonstante μ) abhängt.

(bzw. i_1, i_2, i_3) z.B.: Umlauf der eingeschlossenen! Strom entlang einer Feldlinie liefert folg. Meßergebnis:

$$\oint B \cdot ds = \mu \cdot \sum_i i_i$$

Material-
konstante

! Weg s umfaßt die
Stromsumme i_i

Bem: $\oint ds = 2\pi r$ umfang
bei kreisförmigem Umlauf

! Umfaßt der Weg $\oint ds$ keinen Strom $\rightarrow \oint B \cdot ds = 0$! damit gilt:
 \Rightarrow Der umfaßte Strom ist die Quelle des Magnetfeldes!

\rightarrow Darstellung mit
Quellen-eigenschaft:

$$\sum_i i_i = \Theta$$

"Theta"

= Durchflutung Θ
("Magnetomotorische Kraft")
MMK

\rightarrow Umformung nach μ : $\mu = \mu_0 \cdot \mu_{\text{rel}}$ (absolute magn. Permeabilität)

damit wird

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am} = 7,256 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am}$$

(41)

$$\text{wobei } \mu = \mu_0 \cdot \mu_r$$

μ_0 - Induktionskonstante (Naturkonst.)
 μ_r - relative \sim (dimensionslose Materialkonstante)

μ_r	= 1	Vakuum
≈ 1	diamagnetisch	(Cu, Pb)
≈ 1	para \sim	(Al, Pt)
$\gg 1$	ferro \sim	(Fe, Ni, Co, Ferrite), $\approx 10 \dots 10^4$

! kleinster Wert $\mu_r \approx 1$: \rightarrow Magnetfeld um Strom immer vorhanden!
 da kein Stoff mit $\mu_r \rightarrow 0$ \rightarrow magnet. Abschirmung nur mgl. durch Ummantelung mit einem Stoff $\mu_r \gg \mu_{\text{Luft}}$.

Einführung der magnet. Feldstärke H:

Def.

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

$$[H] = \text{A/m}$$

(ohne besonderen Namen!)

H ist eine Feldgröße, unabhängig von Materialeigenschaften! des Raumes, nur von Strom I und Geometrie des Feldes bestimmt!

\rightarrow Gl. (*) umschreiben mit $H = \frac{B}{\mu_0}$, daraus folgt das

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum_i i_i = \Theta$$

Skalarprodukt \approx Skalar

Durchflutungsgesetz

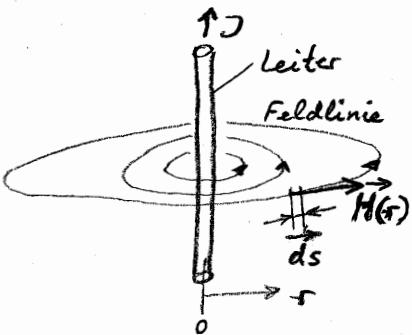
Θ - Durchflutung

Kenntz. Zusammenhang zwischen Strom(summe) und dem damit erzeugten Magnetfeld um ∞ -lange elektr. Leiter

Da μ_0 eliminiert wurde, ist das Durchfltg. gesetz unabhängig vom Material der magnet. Anordnung !, damit allg. Berechnungsansatz mgl.

ZB:

ges: Feldstärke $H = f(r)$ außerhalb eines unendlich langen geraden Leiters (sonst Gesetz v. Biot-Savart)



$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum_i i_i$$

als Umlaufweg wird kreisförmig
Feldlinie im Abstand r gewählt

$$H \cdot 2\pi r = \Theta \quad \leftarrow$$

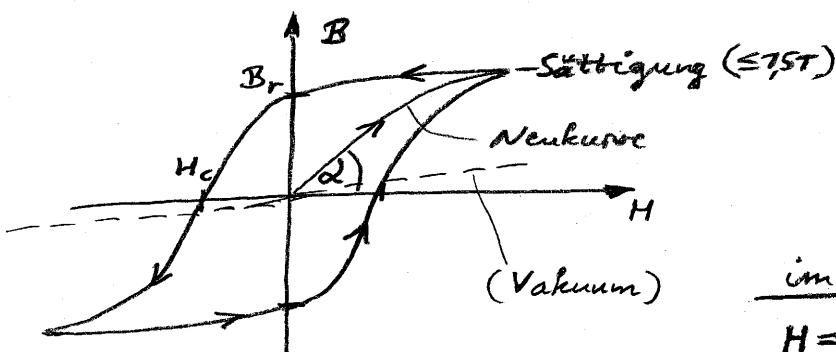
$$\approx H = \frac{\Theta}{2\pi r}$$

d.h. hierbei ist $|H| = \text{const.}$
und $\vec{H} \parallel d\vec{s}$
dann wird $\oint d\vec{s} = 2\pi r$
(Kreisumfang)

ZB:

$$\text{für } \Theta = 7 \text{ A u. Umfang } 2\pi r = 7 \text{ m } \rightarrow H = 7 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Magnetisierungskennlinie für ferromagnet. Material (Hystereseschwelle)



B_r - Remanenz (\approx Permanentmagnet)

H_c - Koerzitivfeldstärke

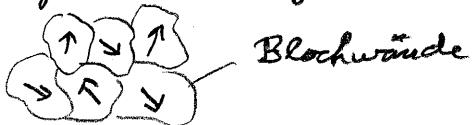
$\mu \approx \mu_0$ - Permeabilität
 $\mu = \frac{dB}{dH} \approx$ Anstieg

im Eisenkreis gilt: für dessen Länge l :

$$H = \frac{J}{l} = \frac{J \cdot w}{l} \approx \text{Dreher} \\ (\text{Kernz. Feldursache})$$

$$B = \mu \cdot H = \mu_0 \mu_r \cdot H \approx \mu_r \\ (\text{Kernz. Wirkung im Feld})$$

physikal. Erklärung:



Weiß'sche Bezirke

(Atomare Magnete, durch \downarrow -Spin ausgerichtet)

✓ Schrittweise Drehung mit $\vec{H} \uparrow$

$\hat{=}$ Barkhausen-Sprünge

bis zur Sättigung $\hat{=}$ gleiche Ausrichtung aller Bez.

! Fläche der Hystereseschwelle
 $\hat{=}$ Arbeit, die zur (Um)magnetisierung des magnet. Materials erforderlich ist

typ. Material:

- “Weichmagnetisch” (*)
- leicht entmagnetisierbar
- ✓ Wechselstrommaschinen (geringe Energieverluste)
- Schreib-/Leseköpfe HDD...

“Hartmagnetisch” (*)

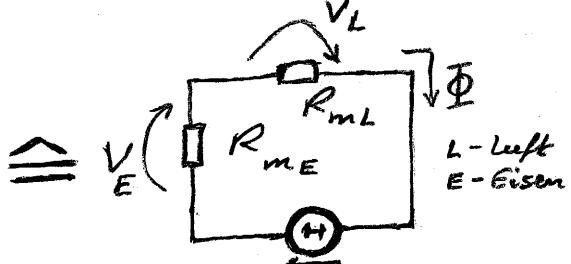
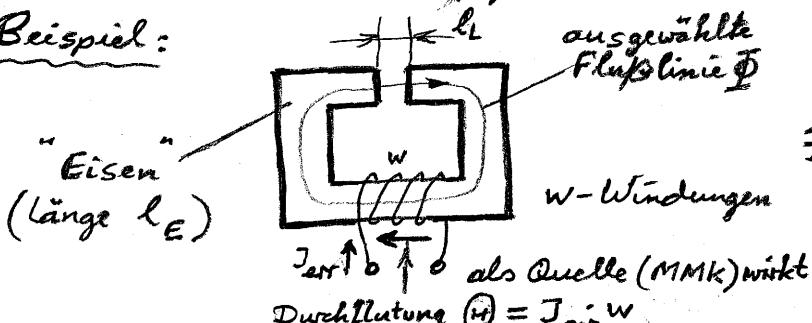
✓ Dauermagnete
Speicher...
Magnetbänder

(Begriffe $\hat{=}$ mechan. Festigkeit des Materials eingeführt.)

Magnetischer Kreis als elektro. Ersatzschaltbild (ESB)

$\hat{=}$ Analogie zum elektro. Stromkreis: Quelle (J), magn. Widerst. R_m , magn. Spannungsfall V

Beispiel:



Quelle:
Durchflutung (J) = $J_{err} \cdot w$

Elektro. ESB

43

Def. Magnetische Spannung
(mgn. Spannungsabfall)
aus Linienintegral über H

$$V_{AB} = \int_A^B H \cdot ds$$

$$\text{mit } \sum V_i = \Phi = J_{\text{err}} \cdot W$$

als "Magnetischer Maschensatz"

[V] = 1 A

Weiterhin gilt:

Def.: Magnet. Widerstand
(von Pkt. A nach Pkt. B)

$$R_{mAB} = \frac{V_{AB}}{\Phi}$$



$$[R_m] = 1 \frac{A}{Vs} = 1 \frac{A}{Wb}$$

⇒ entspr. obigem Bild gilt

für d. magnet. Kreis mit Luftspalt: $\Phi \cdot R_{mE} + \Phi \cdot R_{mL} = \Phi = J_{\text{err}} \cdot W$

$$\text{Fluß } \Phi_E = \Phi_L = \Phi$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{J_{\text{err}} \cdot W}{R_{mE} + R_{mL}}$$

$$\text{bzw. } V_L = \Phi \frac{R_{mL}}{R_{mL} + R_{mE}} \quad \text{über Luftspalt}$$

(Magnet. Spannungsteiler)

Zusammenfassung:

Es gilt: Reihen-, Parallelschaltung von R_m wie ohmsche Widerst.
Knotenpkt. Satz für Φ (verzweigte magnet. Kreise)
Maschen Satz für V und Φ (Reihenschaltung von R_m)
Damit Berechnung mgn. Kreise vergleichbar der in elektro. Kreisen mgl!

Widerstands berechnungs - Gleichung für R_m

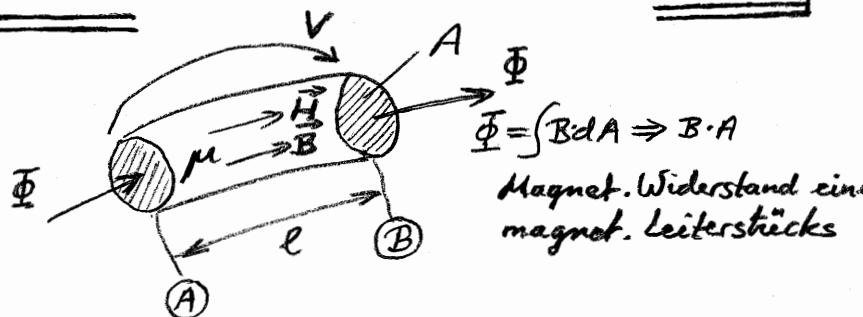
aus den Feldgrößen

bei homogenem Feld

d.h. $B, H = \text{const.}$

mit Def.-Gleichung:

$$R_m = \frac{V}{\Phi} = \frac{H \cdot l}{B \cdot A} = \frac{H \cdot l}{\mu H \cdot A} = \frac{l}{\mu \cdot A}$$



$$\Phi = \int B dA \Rightarrow B \cdot A$$

Magnet. Widerstand eines
magnet. Leiterstückes

Bemerkung zur Feldberechnung magnetischer Kreise:

J gegeben
(bzw. vorausgesetzt):

$$J \rightarrow H \rightarrow \Phi \rightarrow B \rightarrow H \\ = J \cdot w = \frac{\Phi}{R_{\text{Ring}}} = \frac{\Phi}{A_z} = \frac{B}{\mu}$$

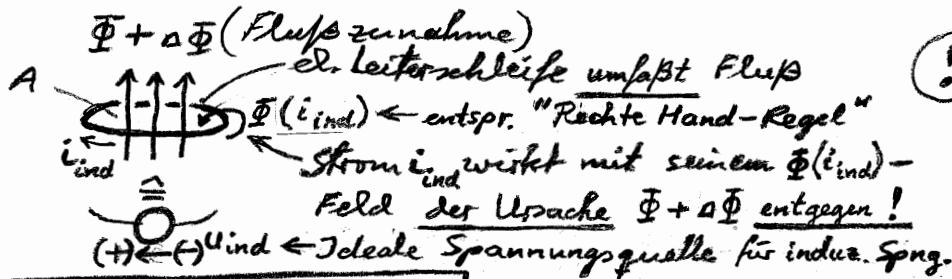
oder:

$$J \rightarrow H \rightarrow B \rightarrow \Phi \\ \oint H ds = \sum_i J_{\text{umf}} = \mu H = \int B dA$$

Das Induktionsgesetz

Faraday fragte nach Umkehrbarkeit des Durchflutungsgesetzes
d.h. Entstehung von Strömen aus Magnetfeldern (1831):

Hierzu Versuch mit geschalteter Erregerspule u. deren Feld Φ umfassender Induktionsspule mit folg. Ergebnis:



A) Ruhewinduktion

für $\frac{d\Phi}{dt} > 0$ (Flusszunahme) entsteht die induzierte Spannung nach dem

$$\text{Induktionsgesetz: } U_{\text{ind}} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

mit neg. Vz. als Hinweis auf die

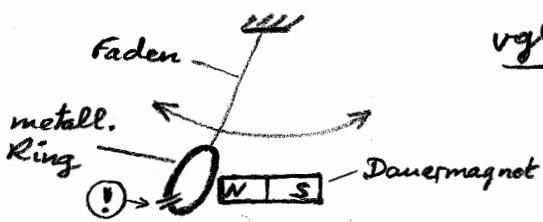
(so wurde $[\Phi] = 1 \text{ Vs}$ aus Induktionsgesetz definiert!)

- A) nur bei zeitlicher Änderung des umfassten Flusses Φ wird Strom i_{ind} (bzw. Spannung U_{ind}) induziert
- B) oder bei Bewegung eines Leiters im Magnetfeld

"Lenz'sche Regel": U_{ind} "sucht" der Ursache $+ \Delta\Phi$ entgegen zu wirken, sonst "Metahysteresis" (nicht mgl.: $\Phi(t) \rightarrow \infty$ als Folge)

vgl.: - Wirbelstrombremse

- Ring-Pendelversuch über Stabmagnet:
Ring geschlitzt \sim pendelt
Ring nicht \sim \sim Bremseung (infolge i_{ind})

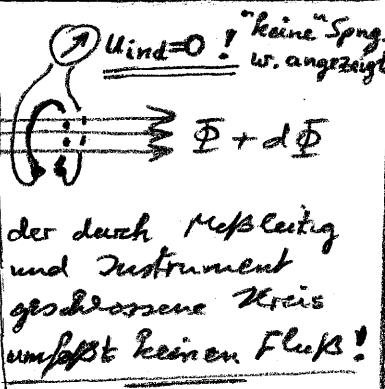
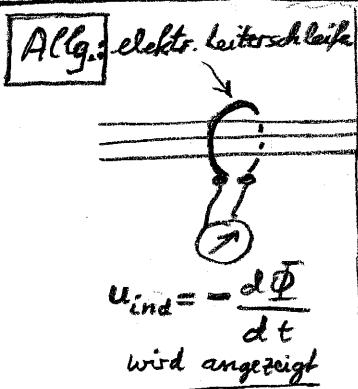


wenn \vec{B} ortsabhängig gilt: $U_{\text{ind}} = - \int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$
 (nach Betrag u. Richtung)

wenn mehrere Windungen w eines Leiters den Fluss umfassen

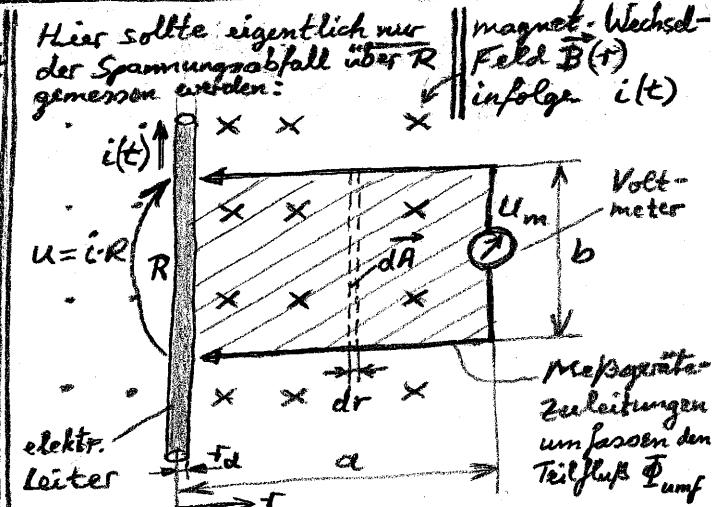
$$U_{\text{ind}} = -w \frac{d\Phi}{dt}$$

Elektr. Leiterschleife als Bestandteil einer Messanordnung im Magnetfeld $\Phi(t)$



Leiterschleifen im Feld

! nur wenn ein Magnettfluss von einem Leiter umfaßt wird, wird eine Spannung U_{ind} induziert



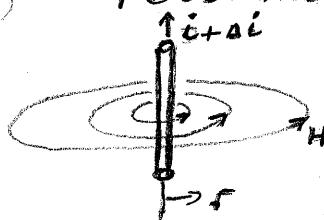
Meßfehler bei Wechselspannungsmessung durch induzierten Anteil:

$$U_m = i \cdot R + U_{\text{ind}}$$

↓ ohne \downarrow in den Meßleitungen (umfaßt $\Phi_{\text{umf}}(t)$) induzierte Spannungsabfall über kontaktiertem Leiterstück mit Wid.R

Berechnung U_{ind} :

Feldstärke $H = f(r)$ außerhalb eines geraden Leiters:



Durchflechtungsgesetz: (als Näherung)

$$\oint H \cdot d\vec{s} = \sum I_{\text{umf}}$$

Umlaufweg \cong Feldlinie im Abstand r

$$H \cdot 2\pi r = i$$

$$\rightarrow H = \frac{i}{2\pi r}$$

(hier $H = \text{const.}$ und $\vec{H} \parallel d\vec{s}$)

mit

$$B = \mu_0 \cdot H = \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi r} \quad \text{ortsabhängig, d.h. } B = B(r)$$

Integration über Fläche, die vom Meßkreis umfaßt wird:

$$\Phi_{\text{umf}} = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_{r_d}^a \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi r} b \cdot dr$$

dA (differentiell schmale Streifen der Dicke dr und der Länge b)

$$= \frac{\mu_0 \cdot i \cdot b}{2\pi} \int_{r_d}^a \frac{1}{r} \cdot dr$$

r_d - Leiterradius

→ s. Bild oben!

$$\Phi_{\text{umf}} = \frac{\mu_0 \cdot i \cdot b}{2\pi} \ln \frac{a}{r_d}$$

$$\rightarrow u_{\text{ind}} = - \frac{d\Phi_{\text{umf}}}{dt} = \left(\frac{\mu_0 \cdot b}{2\pi} \ln \frac{a}{r_d} \right) \frac{di}{dt}$$

Zahlenbeispiel:

für $i = \tilde{i} \cdot \sin \omega t$ mit $\tilde{i} = 100 \text{ mA}$ bei $\omega = 2\pi f = 628 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$ ($f = 100 \text{ MHz}$)

$$\frac{di}{dt} = \tilde{i} \cdot \omega \cdot \cos \omega t \quad (\text{Diff.quotient})$$

umfasste Feldfläche: $b = 5 \text{ cm}$

$$r_d = 1 \text{ mm}$$

$$a = 5 \text{ cm}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

wird:

$$u_{\text{ind}} = \underbrace{\left(\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 0,05 \text{ m}}{2\pi} \ln \frac{5}{0,1} \right)}_{\hat{u}_{\text{ind}} = \text{Amplitude}} \cdot \underbrace{0,1 \text{ A} \cdot 628 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1} \cdot \cos \omega t}_{\text{Zeitfaktor}}$$

\hat{u}_{ind} = Amplitude

$$u_{\text{ind}} = 2,45 \text{ V} \cdot \cos \omega t$$

Ergebnis: durch Induktions schleife (Mefzähler) wird eine zusätzliche Fehler-Spannung von $2,45 \text{ V}$ infolge des umfassten magnet. Wechselfeldes erzeugt!

Physikal. Effekte im weiteren:

a.) Wirbelströme: Induzierung von Strömen im auch elektrisch leitenden Magnetkreis (Trägerkern) (Verlustleistung \rightarrow Zonenabschmelzverfahren HL, Wirbelstrombremse)

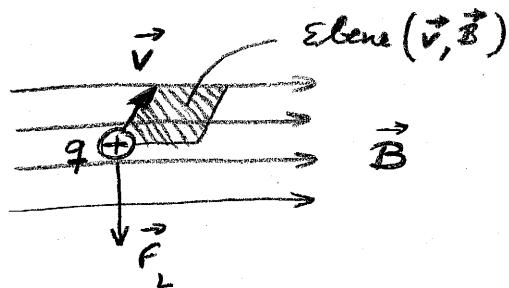
b.) Skin-Effekt: Feldwirbel aus $S(t)$ und induziertem Wirbelstrom bei "hohen" Frequenzen überläng. \rightarrow Stromverdrängung zur Leiteroberfläche hin. mit Eindringtiefe $\approx 2 \mu\text{m}$ bei 7 GHz !

27 μm	10 MHz
0,6 mm	10 kHz
9,4 mm	50 Hz

(bezogen auf $\frac{1}{e}$ -fachen Abfall der Stromdichte)

B.) Bewegungsindektion / Kraft auf bewegte Lad.-träger

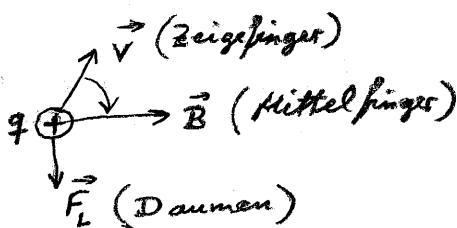
zB: Elektro. Leiter bewegt sich im (konstanten) Magnetfeld \vec{B} .
ia. Relativbewegung, zB. rotierende Spule or Wechselspannungsgenerator...



für Kraft auf bewegte Lad.-träger q
Lorenzkraft \vec{F}_L :

$$\vec{F}_L = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

$$= q \cdot v \cdot B \cdot \sin(\vec{v}, \vec{B})$$



Bewegung einer pos. Ladung \oplus
(\cong technischer Stromrichtung!) mit der Geschwindigkeit \vec{v} im Magnetfeld der Flussdichte \vec{B} erzeugt die Lorenzkraft \vec{F}_L

"Rechte-Hand-Regel" (Kreuzprod.)

Aus der Kraft auf bewegte Ladungsträger ($\vec{F}_E = q \cdot \vec{E}$ und $\vec{F}_L = -\vec{F}_E$)

folgt die induzierte Spannung über der Leiterlänge l

$$U_{\text{ind}} = \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}$$

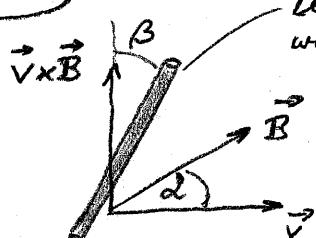
Bem: für $d\vec{s} \parallel$ Fläche $\vec{v} \times \vec{B}$
entsteht Max. der induz. Spannung!

! Für elektr. Strom I gilt wegen $dq = I \cdot dt$ und für Leiter der Länge l
mit $v = \frac{dl}{dt}$: $d\vec{F}_L = I(d\vec{l} \times \vec{B})$

damit \vec{F}_L für Leiter der Länge l :

$$\vec{F}_L = I \cdot \int_0^l d\vec{l} \times \vec{B}$$

zB:



Leiterstück der Länge l
wird in \vec{v} -Richtung bewegt

$$U_{\text{ind}} = \int_0^l (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}$$

$$U_{\text{ind}} = v \cdot B \cdot \sin \alpha \cdot l \cdot \cos \beta$$

Vektorprodukt

Skalarprodukt!

Induktivität einer Spule

Das Verhältnis aus dem gesamten die Stromschleife durchsetzenden magnetischen Fluss zu dem verursachenden Strom liefert den Induktivitätswert einer Spule.

Def.:
Induktivität

$$L = \frac{w \cdot \Phi}{J}$$

vom elektr. Kreis insgesamt umflossener Fluss $\Phi \rightarrow$ bei w Wdg. gilt "Verketteter Fluss" $\Psi = w \cdot \Phi$!

$$[L] = 1 \frac{Vs}{A} = 1 H \text{ (Henry)}$$

L ist ein Maß für das Speichervermögen mgn. Feldenergie



Drahtschleife
 $\approx 50 \text{ nH}$
Vorschaltdrossel f. Leuchtb.lampe 0,5H

Wenn R_m angebar: ist Berechnung einfach mgl.

$$R_m = \frac{J}{\Phi} = \frac{J \cdot w}{\Phi} = \frac{(w) \cdot w}{L}$$

$$\Rightarrow L = \frac{w^2}{R_m} = w^2 \cdot A_L$$

aus Def.-Gleichg. L

(zB): • Zylinderspule in Luft

$$A_L \approx 40 \frac{\text{nH}}{\text{Wdg.}^2}$$

• Schalenkern ohne Luftschnitt

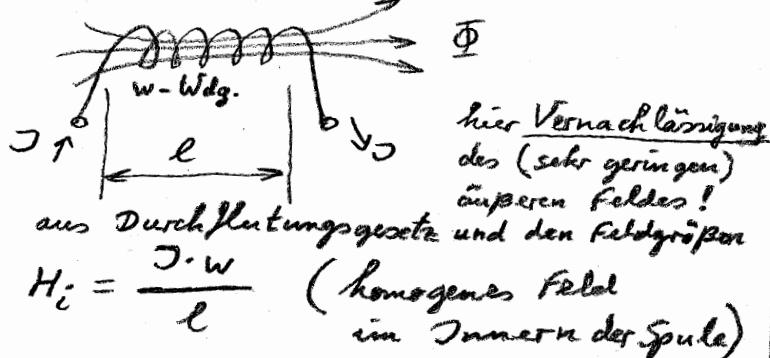
$$A_L \approx 1000 \frac{\text{nH}}{\text{Wdg.}^2}$$

" A_L -Wert":

Induktivitätsfaktor, ist Tabellenwert für magnet. Material. gibt die auf $w=1$ Windung bezogene Induktivität in nH an.

Beispiele zur Induktivitätsberechnung:

Zylinderspule in Luft ($\mu_r = 1$)



$$\Phi = B \cdot A = \mu_0 \frac{J \cdot w}{l} \cdot A$$

da w -Windungen den gleichen Fluss umfassen

$$\Rightarrow L = \frac{w \Phi}{J} = \mu_0 \frac{w^2 \cdot A}{l}$$

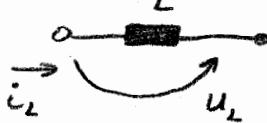
Eisenkerンspule mit Luftschnitt

$L = \frac{w^2}{R_m} = \frac{w^2}{\frac{l_E}{\mu_r' F_c} + \frac{l_L}{\mu_0 A}}$

mit Benennungsgleichung für magnet. Widerstände R_m leicht bestimmbar.

Induktivität als Schaltungselement

L erzeugt mit Strom i ein Magnetfeld, d.h. den Fluss Φ .
 Für Wechselgrößen u_L, i_L gilt mit $\Phi(t)$:



Zählpfeilrichtung

$$\begin{aligned} u_{\text{ind}} &= - \frac{d(N\Phi)}{dt} && \text{entsprechend Induktionsgesetz (Selbstinduktion)} \\ &= - \frac{d(L \cdot i_L)}{dt} && \text{mit Def.-Gleichg. L} \\ \text{Induzierte Spannung: } u_{\text{ind}} &= - \left(i_L \frac{dL}{dt} + L \frac{di_L}{dt} \right) \end{aligned}$$

- neg. Vorzeichen von u_{ind} , weil u_{ind} als Quellspannung gilt!

i.a. $L = \text{const.}$, damit wird

- entspr. Zählpfeilrichtung wird u_L als Spannungsabfall gezählt (s.o.)

$$-u_{\text{ind}} = u_L(t) = L \cdot \frac{di_L}{dt}$$

differentielle Form

Dies ist die Strom-Spannungs-Beziehung an der Induktivität.

Spannung u_L ist der zeitlichen Stromänderung proportional; bei $i_L = \text{const.}$ ist $u_L = 0$! $\hat{=}$ "Kurzschluss"

Für den Strom i_L folgt mit Umformung

$$di_L = \frac{1}{L} u_L dt$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int u_L dt + i(t_0)$$

integrale Form Integrationskonstante

Zusammenschaltung von L:

Reihenschaltung

$$L_{\text{ges}} = \sum L_i$$

(gleiche Ströme)

Parallelschaltung

$$\frac{1}{L_{\text{ges}}} = \sum \frac{1}{L_i}$$

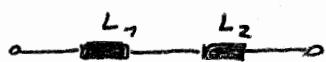
(gleiche Spannung)

} sofern nicht magnetisch verkoppelt!

Auch für Spannungs- und Stromteilerregel Verhalten wie bei Widerst. (gilt nur für Wechselgrößen u_L, i_L)

Beispiel:

- a) 2 Induktivitäten, magnetisch nicht verkoppelt:



$$L_{\text{ges}} = L_1 + L_2$$

- b) 2 Wicklungen auf derselben Kern (magnet. Kreis):

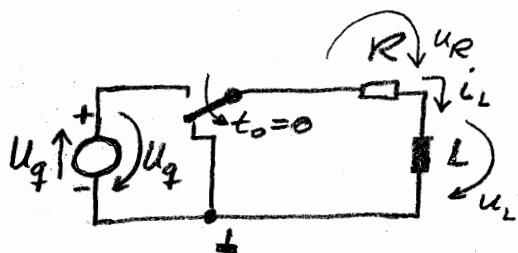


z.B. Ferritring-Kern (R_m)

$$L_{\text{ges}} = \frac{(W_1 + W_2)^2}{R_m}$$

d.h.: 2 gleiche Windungen (W-Wdg.) erzeugen $L_{\text{ges}} = 4 \cdot L_{\text{einz}}$

Ausschalten einer R-L-Schaltung



Schalter wird zum Zeitpunkt t_0 auf "Masse" geschaltet

Vorher "eingeprägter" Strom \mathcal{I}_0
für $t \leq t_0$ ist $\mathcal{I}_0 = \frac{U_q}{R}$

ges: $i_L(t)$ und $U_L(t)$

Lösung wie für R-C-Schaltung (S.30)...
Aufstellung der DGL, Lösung mit Randbeding.

für $t \geq 0$: $u_R + u_L = 0$ wobei $i|_{t_0} = \frac{U_q}{R} = \mathcal{I}_0$

DGL $i_L R + L \frac{di_L}{dt} = 0$

Trennung der Variablen $\frac{di_L}{i_L} = -\frac{R}{L} dt$

Integration $\int \frac{di_L}{i_L} = -\frac{R}{L} \int dt$

Anfangswert bei $t_0 = 0$ $\ln \frac{i_L}{\mathcal{I}_0} = -\frac{t}{\frac{L}{R}}$

$\rightarrow i_L(t) = \mathcal{I}_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

mit $\tau = \frac{L}{R}$
Zeitkonstante

$[\tau] = \frac{V \cdot A}{A \cdot V} = 1 \text{ s}$

pos. Vz.!

! Der zunächst eingeprägte Strom \mathcal{I}_0 verringert sich nach t_0 exponentiell, fließt aber in gleicher Richtung weiter! (\rightarrow Stromglättungsfkt.)

für Spannung $U_L(t)$ wird mit der Strom-Spannungsbeziehung für L

$$U_L = L \cdot \frac{di_L}{dt} = -L \cdot \frac{1}{\tau} \cdot \mathcal{I}_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = U_L(t) = -U_q \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

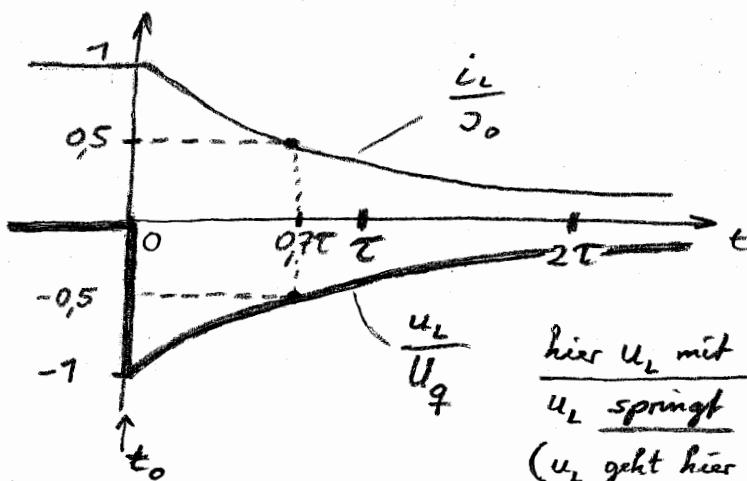
↑
uz. Stromverringerung
 $\hat{=} \Phi$ -Verringerung

wobei $U_q = R \cdot \mathcal{I}_0$ entspr. Anfangsw.

! U_L kehrt Vorzeichen beim Abschalten um!

Dies infolge Induktionsgesetz (Selbstinduktion) $\therefore -U_L = U_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}$ (w)
da der Fluss $\Phi(t)$ nur bei fehlender Erregung zusammenbricht!

Achtung: Der Strom durch L darf nicht einfach unterbrochen werden,
sonst wird $w \frac{d\Phi}{dt} = -U_{ind} \rightarrow \infty$ (\rightarrow Zerstörungen der L und...)



Abschaltkurve

(normiert auf Max.-werte I_0 und U_0)

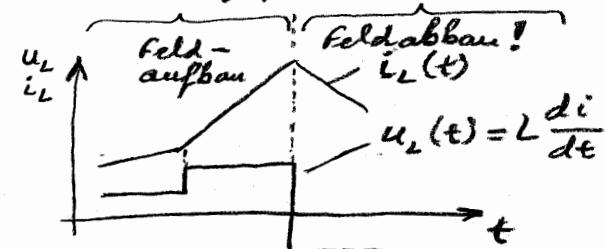
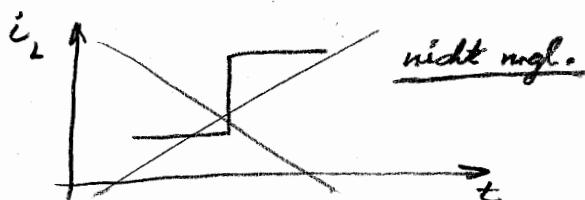
hier u_L mit Polaritysumkehr!

u_L springt zum Abschaltzeitpunkt t_0 auf $-U_0$!

(u_L geht hier nicht $\rightarrow \infty$, weil der Strom i_L über den Widerstand R weiterfließen kann)

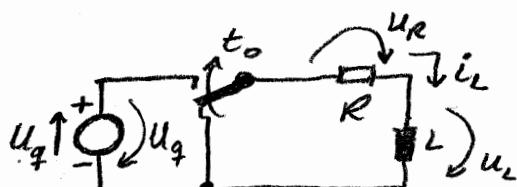
Induktives Verhalten:

! Es gibt keine sprunghaften Änderungen des Stromes i_L durch eine Induktivität, $i_L(t)$ ist stetig,
es gilt: $i_L(t_0) = i_L(-t_0)$



⇒ In differziell kurzen Zeiten bleibt der Strom durch L konstant!
(Stromglättungsfkt.)

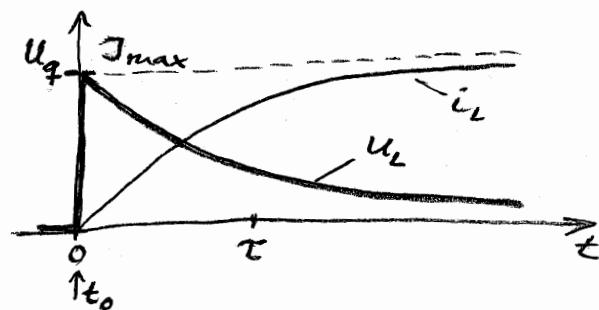
Einschalten einer R-L-Schaltung



Leg: wie vorher ..., Einschalten zu Zeit t_0
→ Ergebnis:

$$i_L(t) = \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \right)$$

$$u_L(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$$



$$\frac{U_0}{R} = I_{\max}, \quad \tau = \frac{L}{R} \text{ Zeitkonstante}$$

Beim Einschalten haben u_L und i_L pos. Vorzeichen
(= Zählpfeilsrichtung!)

Die Spannung u_L springt zunächst bei t_0 auf U_0 , fällt dann exp. ab.
Der Strom i_L steigt exponentiell an.

Indukt. Verhalten bei harmonischen Wechselgrößen (sin-Fktn.en)

allg. gilt $U_L = L \frac{di_L}{dt}$ dh: für $i_L(t)$ nur stetige Änderung mgl., sonst würde $U_L \rightarrow \infty$.

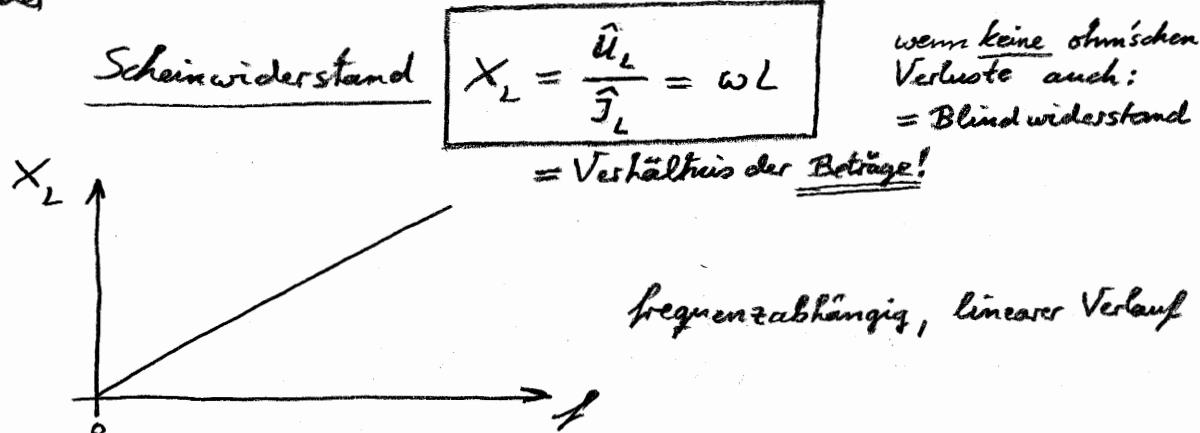
Ansatz für sin-förmigen Strom (ZB) $i_L = \hat{i}_L \cdot \sin \omega t$ $\omega = 2\pi f$
 \downarrow $U_L = \omega \hat{i}_L \cdot L \cdot \cos \omega t$ (Kreisfrequenz)
 $= \underbrace{\omega \hat{i}_L L}_{U_L} \cdot \underbrace{\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})}_{\text{Vergleich}}$

Phasenwinkel $\frac{\pi}{2}$: U_L eilt i_L um $\varphi = 90^\circ$ voraus!

Bei ideale Induktivität (kein ohmscher Verlustwiderstand enth.)

- setzt damit keine Wirkleistung um! ($P_W = U \cdot i \cdot \cos \varphi$) wg. $\varphi = 90^\circ$
- wirkt als Wandler el.- in magnet. (Feld)-Energie und periodischer ("zwischen") speicher für Blindleistung!

Ohne Berücksichtigung der Phasenverhältnisse! (\rightarrow komplexe Rechng.) wird der

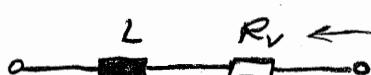


für $f \rightarrow 0 \rightsquigarrow X_L = 0$ dh. für Gleichspannung "Kurzschluß"

für $f \rightarrow \infty \rightsquigarrow X_L \rightarrow \infty$ dh. f. hohe Frequenzen "Leerlauf"

Bem:

Technisches Ersatzschaltbild für Induktivität als reales Bauelement:



- Verlustwiderstand aus
- Ohmschen Wicklungswiderstand
 - Ummagnetisierungs u. Strahlungsverlusten (steigen mit $\approx f^2$)

Energie im magnetischen Feld

$$W_{\text{Feld}} = \int u_L(t) \cdot i_L(t) \cdot dt$$

unter Nutzung der Strom-Spannungs-Bezg. an der Induktivität; z.B. $u_L(t) = L \frac{di_L}{dt}$

$$= L \cdot \int_t^T i_L \frac{di_L}{dt} dt = L \cdot \int_0^J i_L \cdot di_L \quad \text{für } L = \text{const. wird}$$

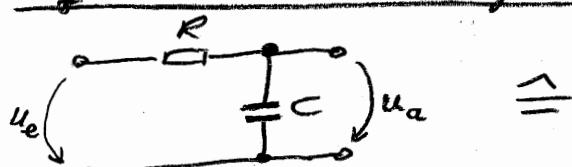
$$W_{\text{Feld}} = \frac{L \cdot J^2}{2}$$

J = zum Betrachtungszeitpunkt eingeprägter Strom.

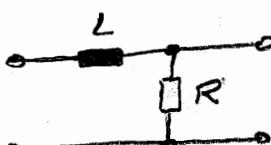
In der Induktivität gespeicherte Energie (= Feldenergie)

Äquivalenz von R-L- und R-C-Schaltungen

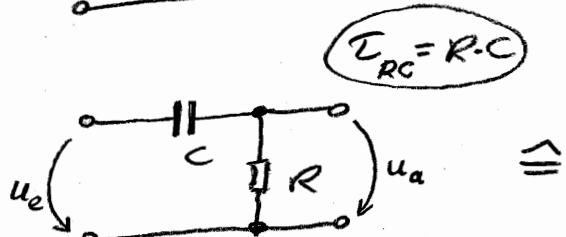
Für R-L-Schaltungen können Betrachtungen zu Anstiegszeit, Grenzfrequenz, integrierende - / differenzierende Eigenschaften im gleichen Weise ausgeführt werden, wie für R-C-Schaltungen (s.S.35...) Es ergeben sich dabei die gleichen Ergebnisse, wenn man folg. äquivalente Schaltungen vergleicht:



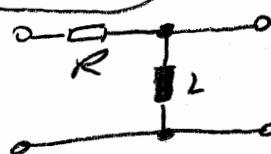
$\hat{=}$



Tiefpass
(Integrator)



$$\tau_{RC} = R \cdot C$$

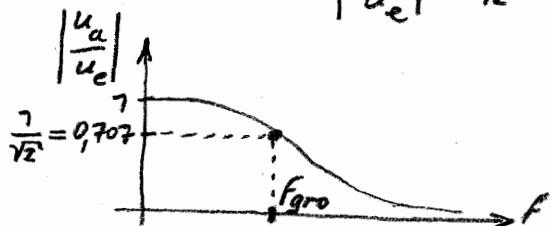


Hochpass
(Differenzierer)

Vergleichbares Verhalten für $\tau_{RC} = \tau_{LR}$!

ohne Berücksichtigung der eingangsseitigen Quellwiderstände und der ausgangsseitigen Lastwiderstände !

ZB: L-R-Tiefpass: $\left| \frac{U_a}{U_e} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \frac{L}{R})^2}} = \left| \frac{R}{R + jX_L} \right| = \left| \frac{R}{R + j\omega L} \right| = \left| \frac{1}{1 + j\omega \frac{L}{R}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \frac{L}{R})^2}}$



ist erfüllt für:

$$\omega = \omega_{gро} = \frac{R}{L} = \frac{1}{\tau_{LR}}$$

Obere Grenzfrequenz $f_{gро} = \frac{1}{2\pi \tau_{LR}}$

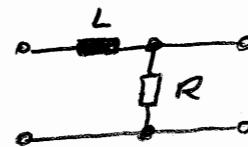
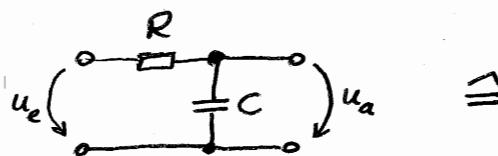
Äquivalenz von Grundschaltungen - Übersicht

es ex. äquivalente RC- und RL-Schaltungen bzgl.

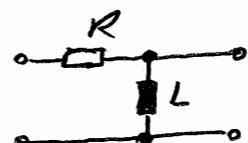
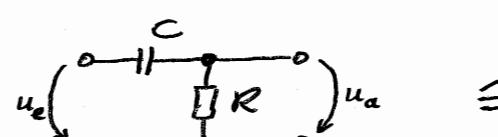
- Grenzfrequenz, Spannungsübertragungsfkt.
- Anstiegszeit (Abfallzeit) u. Dachabfall

jeweils für Integrier- und Differenzierglieder:

Integrator
= Tiefpaß



Differenzierer
= Hochpaß



jeweils mit: $\tau_{RC} = R \cdot C$

$$\tau_{LR} = \frac{L}{R}$$

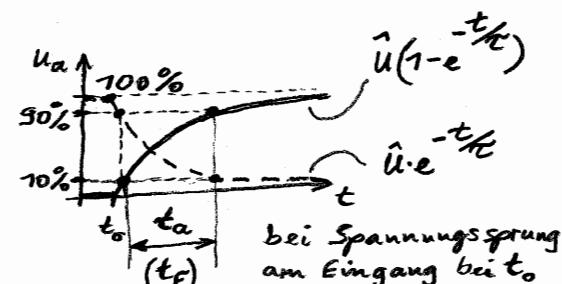
Zusammenfassung:

Anstiegszeit

$$t_a = \tau \cdot \ln 3 \approx 2,2\tau$$

Abfallzeit

$t_f = \text{dgl.}$



Ober Grenzfrequenz
(für Tiefpaß)

$$f_{gr0} = \frac{1}{2\pi \cdot \tau} = \frac{0,35}{t_a}$$

Untere Grenzfrequenz
(für Hochpaß)

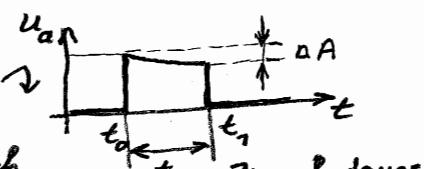
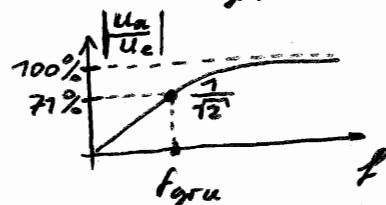
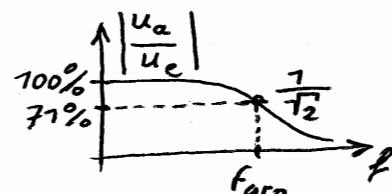
$$f_{gru} = \frac{1}{2\pi \cdot \tau} = \frac{0,35}{t_f}$$

Dachabfall
(für Differenzierglied)

bei rechteckförm. u_e

für ΔA im Prozentbereich

$$\text{gilt } \frac{\Delta A}{A} \approx \frac{t_I}{\tau}$$



wegen $f_{gru} \approx \frac{1}{\tau}$ gilt: Dachabfall $\sim f_{gru}$



Bei Netzwerken mit einem L oder C (bzw. wenn sich mehrere L oder C in eine Ersatzgröße zusammen fassen lassen) lässt sich anhand der Zweipoltheorie unter Nutzung der bekannten e-Fktuen, der Anfangs- bzw. Endwerte und der Zeitkonstante das Netzwerkverhalten angeben!

Schaltvorgänge an einfachen RC- und RL-Schaltungen

Für einen Spannungssprung am Eingang einer Schaltung mit nur einem Speicherlement C oder L (bzw. einfach zusammenfassbaren C oder L) lässt sich der zeitl. Verlauf der Ausgangsspannung ohne Lösung von DGL in einfacher Weise angeben.

Kriterien sind erforderlich:

- Entscheidung, ob sich die Schaltung differenzierend oder integrierend verhält \rightarrow passender e-Fkt.-Ansatz
- Bestimmung des Ausgangswertes der Ausgangsspannung zum Schaltzeitpunkt t_0 \rightarrow Vorfaktor für diff. Verh.
- des stationären Endwertes der Ausg.-Spannung für Zeiten $t \rightarrow \infty$ \rightarrow Vorfaktor für integr. Verh.
- der Zeitkonstante T aus Größe des Speicherelements und umgebendem Ersatzwiderstand.

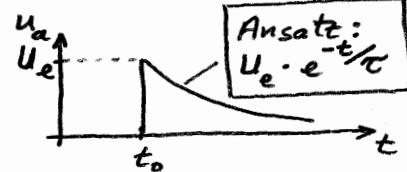
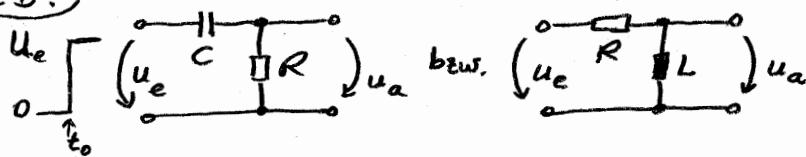
Verhalten von C und L in der Schaltung !:

Zum Schaltzeitpunkt t_0 : $C \hat{=} \text{dynam. Kurzschluss}$ ($u_C = \text{const.}$,
(größte zeitliche Änderungen) $i_C \text{ springt}$)
 $L \hat{=} \text{dynam. Leerlauf}$ ($u_L \text{ springt}$,
 $i_L = \text{const.}$)

Für $t \rightarrow \infty$: $C \hat{=} \text{Leerlauf}$, Klemmen offen
(keine zeitl. Änderungen mehr) $L \hat{=} \text{Kurzschluss}$, leitende Verbindung

→ Lösung für "Differenzierendes Verhalten"

(z.B.:



Ein Eingangsspannungssprung führt zum Springen der Ausgangsspannung bei t_0 !

Mit der Zeit t läuft u_a exponentiell auf den stationären Endwert (meist $u_a = 0$) zu.

hier gilt: Ausgangswert $u_a(t_0) = u_e$

Stat. Endwert $u_a(t \rightarrow \infty) = 0$

Zeitkonstante $T = R \cdot C$ bzw. $T = \frac{L}{R}$

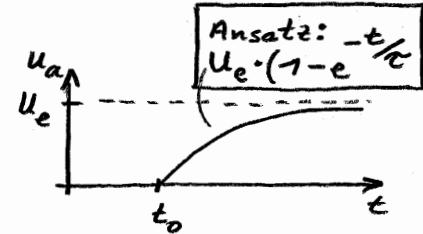
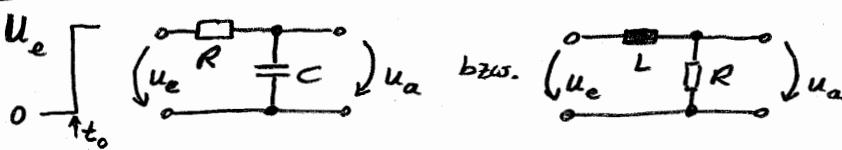
dann wird

$$u_a(t) = [\text{Ausgangswert } u_a(t_0)] \cdot e^{-\frac{t-t_0}{T}}$$

(allg. ev. noch stat. Endwert $\neq 0$ berücksichtigen)

Lösung für "Integrierendes Verhalten"

zB:



Ein Eingangsspannungssprung führt zum Zeitpkt. t_0 zu keiner Änderung der Ausgangsspannung!

Mit der Zeit t läuft u_a auf den stationären Endwert zu (meist $u_a(t \rightarrow \infty) \neq 0$)

hier gilt: Anfangswert $u_a(t_0) = 0$

Stat. Endwert $u_a(t \rightarrow \infty) = U_e$

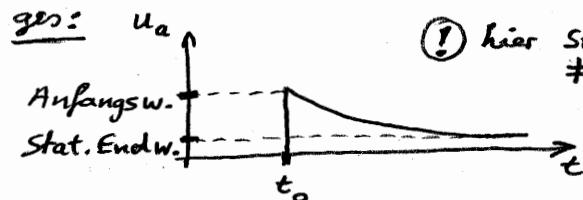
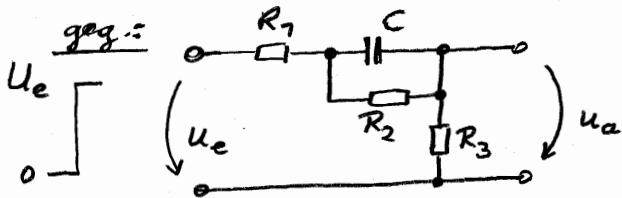
$$\text{Zeitkonstante } \tau = R \cdot C \text{ bzw. } \tau = \frac{L}{R}$$

damit wird

$$u_a(t) = [\text{Stationärer Endwert } u_a(t \rightarrow \infty)] \cdot (1 - e^{-t/\tau})$$

(allg. ev. noch Anfangswert $\neq 0$ berücksichtigen)

Beispiel:



Sprung u_a bei $t_0 \rightarrow$ Differenzierendes Verhalten

$$\text{Anfangswert } u_a(t_0) = U_e \frac{R_3}{R_1 + R_3}$$

$$\text{Stat. Endwert } u_a(t \rightarrow \infty) = U_e \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$\text{Zeitkonstante } \tau = C \cdot R_{\text{ers}}$$

$$= C \cdot (R_2 \parallel (R_1 + R_3))$$

Bem: Der Innenwiderstand der Quelle U_e wird = 0 gesetzt

Spannungsteiler, wobei für $C \hat{=} \text{Kurzschluß}$

Spannungsteiler, wobei für $C \hat{=} \text{Leerlauf}$

aus der Sicht von C wird der Ersatzwiderstand R_{ers} bestimmt.
(vgl. Zweipoltheorie)

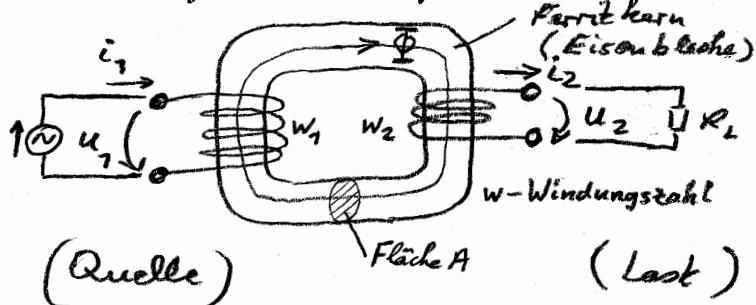
! In der Lösung muß hier der von Null verschiedene stat. Endwert für den exponentiell abfallenden Verlauf berücksichtigt werden:

$$u_a(t) = [\text{Anfangswert} - \text{Stat. Endwert}] \cdot e^{-t/\tau} + \text{Stat. Endwert}$$

(für vollständige Lösung $u_a(t)$ obige Werte einsetzen ...)

Transformator

2 gekoppelte Spulen, die vom gleichen Fluss Φ durchflossen werden auf gemeinsamem magn. Kreis:



meist sin-förmige Spannung $u_1 = U \cdot \sin \omega t$
für Netztrafo:

Beschr. über Induktionsgesetz

$$u = \frac{d\Phi}{dt} \quad W = \frac{d}{dt} (B \cdot A \cdot \sin \omega t) \cdot W$$

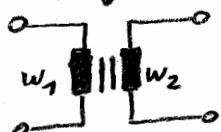
$$\Rightarrow U_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot W \cdot B \cdot A \cdot \omega$$

$\approx 1 - 1,4 T$

Windungszahl: wenige Windg./Volt wären zuwickeln ...

Vereinfachungen der Betrachtung :

damit folgt für:



Transformator (Spannungsverstärker / Stromverstärker)

Übertrager (Wid. transformation / galvanische Trennung)

- Spannungsübersetzung:
bei gegebenem Fluss $\Phi(t)$

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{W_2 \cdot \frac{d\Phi}{dt}}{W_1 \cdot \frac{d\Phi}{dt}} = \frac{W_2}{W_1}$$

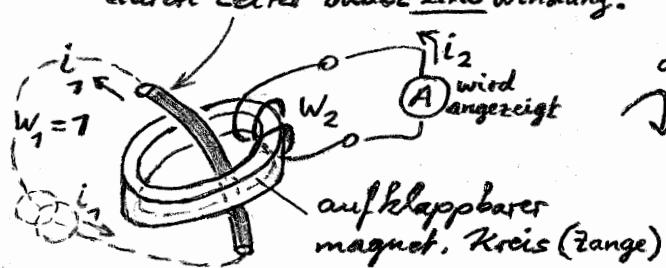
- Stromübersetzung:

wenn $R_m \rightarrow 0$ gesetzt wird (dh. hohe Permeabilität des Kerns vorausgesetzt), wird

ZB: "Meßstromwandler"

i_1 -zu messender (großer) Strom durch Leiter bildet eine Windung!

$$\Theta = \Phi \cdot R_m \approx 0 \quad (\text{"Durchflutung"} \Theta)$$



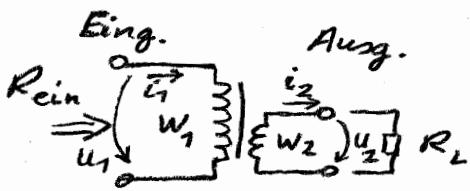
$$\text{dh. } \Theta = i_1 \cdot N_1 - i_2 \cdot N_2 \approx 0$$

$$\frac{i_2}{i_1} \approx \frac{N_1}{N_2}$$

Stromzangenprinzip:
Hiermit möglich ist
Messung von Strömen
im 100A...kA-Bereich!

Bem: auch aus Leistungsübersetzung $\rho = u_1 \cdot i_1 = \rho_2 = u_2 \cdot i_2$ ableitbar... (Wirkleistungs-Verluste vernachl.)

für Nutzung als Übertrager ist die Widerstandstransformation interessant (z.B. für Anpassungszwecke):



58

Nutzung des Transfomers
zur Widerstands-Transformation
 $R_{\text{ein}} \leftrightarrow R_L$

Wirkssamer Eingangswiderstand (Primärleitungen)

$$R_{\text{ein}} = \frac{U_1}{i_1} \approx \frac{U_2 \cdot \frac{N_1}{N_2}}{i_2 \cdot \frac{N_2}{N_1}} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \cdot \frac{U_2}{i_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \cdot R_L$$

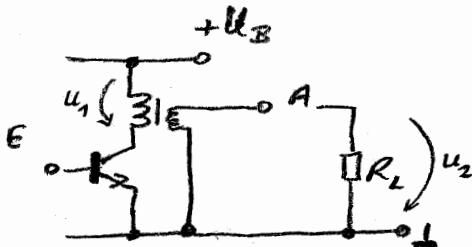
d.h.

$$R_{\text{ein}} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \cdot R_L$$

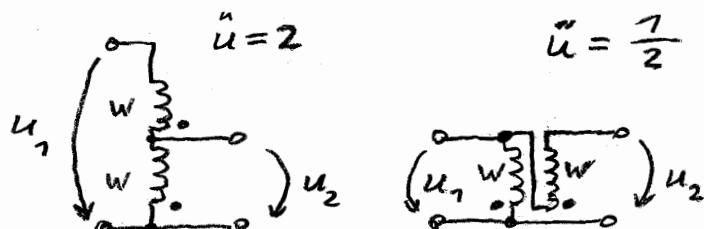
mit $\tilde{u} = \frac{N_1}{N_2}$
"Übersetzungsverhältnis"

Widerstände transformieren sich mit dem Quadrat des Übersetzungsverhältnisses $\tilde{u} = \frac{N_1}{N_2}$ von der Ausgangsseite auf die Eingangsseite! (umkehrbar)

Anwendungen: z.B. zur Widerstandsanpassung von el. Quellen an Lastwiderst.



Potentialtrennung u.
Widerstandsanpassung
mit galvanisch getrennten
Wicklungen



"Spartransformator"
(keine galvanische Trennung!
Primärwicklung ist Teil der
Sekundärwicklung)

- (!) Die Punkte o kennzeichnen die Anfänge der Wicklungen
- ↗ phasenrichtige Zusammenschaltung auszuführen!

Netzwerkberechnungen

Lösung lineares Gleichungssysteme:

z.B. aus Kirchhoff'schen Gleichungen

→ System lineares Gleichungen für I_i und U_j eines Netzwerks

! Für Systeme mit ≥ 3 Gleichungen (Unbekannte) aufwendige manuelle Lösungsverfahren (Substitutions- bzw. Einsetzverf.)

Deshalb empfiehlt sich die Nutzung folg. Verfahren:

(A) Gauß'scher Algorithmus

Multiplikation einer Gleichung mit einem "geeigneten" Faktor und Addition mit jeder anderen Gleichung

→ Eliminierung einer Unbekannten je Gleichung d.h. es entsteht ein Gl.-System mit $(n-1)$ Gleichungen.

Beim nächsten Schritt in gleicher Weise Elimin. der nächsten Unbekannten, usw. → Lösung entsteht schrifweise.

(B) Determinanten-Rechnung (Cramer'sche Regel)

Für ein inhomogenes lineares Gleichungssystem $(\underline{a}) \cdot (\underline{x}) = (\underline{c})$ erfolgt aus der Koeffizientenmatrix (\underline{a}) und der Lösungsspalte (\underline{c}) mit

$$\det \underline{a} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{Systemdeterminante}$$

die Lösung für unbekannte x_1, \dots, x_n mit der Determinantenrechnung unter Anwendung der Cramer'schen Regel:

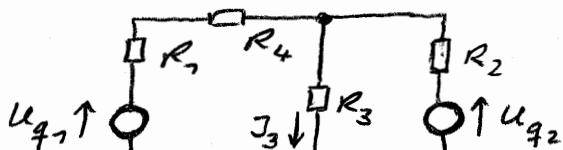
$x_k = \frac{D_k}{\det \underline{a}} = \frac{\text{in } \det \underline{a}: \text{Koeffizienten von } x_k \text{ durch "Lösungsspalte" (rechte Seite) ersetzt}}{\text{Systemdeterminante } \underline{a}}$

! Für $n \geq 4$ Zerlegung in Unterdeterminanten 2. oder 3. Ordnung erforderlich!

"Sarrus'sche Regel" → Summe von $n!$ -Gliedern!

Netzwerkberechnungsmethoden dargestellt jeweils am gleichen folg. Beispiel:

geg:



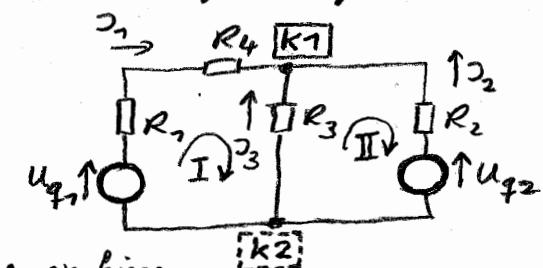
ges: jeweils I_3

nach verschiedenen Methoden

(A) Kirchhoff'sche Sätze

$\hat{=}$ "Zweigstromanalyse", wenn die Strom-Spannungs-Beziehungen der BE in die Maschengl. eingesetzt werden!

$\hat{=}$ Strom-Spannungs-Analyse aus vollständigem Gleichungssystem (unabhängige Gleichungen) mit Maschen- und Knotenpunktgleichungen.



Vorbereitung:

- Kennzeichnen der z-Zweigströme
- - " - der Maschenumläufe
- - " - der k-Knoten

prinzipiell beliebige Zähldrichtung

es ex. hier:
Zweige $z = 3$ \Rightarrow 3 Gleichungen erforderlich!
(entsprechend Anzahl unbekannter)
Knoten $k = 2$

! Es lassen sich nutzen:

$(k-1)$ - unabhängige Knotengleichungen und
 $z-(k-1)$ - unabhängige Maschengleichungen

\downarrow $z=3$ Gleichungen aufstellbar für Gl.-System

2 Maschengleichungen:
(mit SSB! die bereits eingesetzt sind)

$$\text{I} \rightarrow I_1(R_1 + R_4) - I_3 R_3 = U_{q_1}$$

$$\text{II} \rightarrow -I_2 R_2 + I_3 R_3 = -U_{q_2}$$

$$1 \text{ Knotenpkt.-glg.: } \boxed{k1} \quad I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

in Matrix darstellung

$$\begin{pmatrix} (R_1 + R_4) & 0 & -R_3 \\ 0 & -R_2 & R_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{q_1} \\ -U_{q_2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

hybride H-Koeffiz.-Matrix

Einsetzen der Lösungsspalte

Determinantenrechnung

$$\text{mit Cramerscher Regel: } I_3 = \frac{D_3}{\det H} = \frac{\begin{vmatrix} (R_1 + R_4) & 0 & U_{q_1} \\ 0 & -R_2 & -U_{q_2} \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (R_1 + R_4) & 0 & -R_3 \\ 0 & -R_2 & R_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

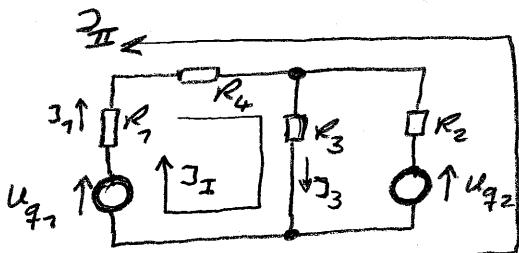
67

$$\Rightarrow \underline{\underline{I_3}} = \frac{U_{q_1} \cdot R_2 + U_{q_2} \cdot (R_1 + R_4)}{-R_2(R_1 + R_4) - R_2 R_3 - R_3(R_1 + R_4)} = \frac{U_{q_1} \cdot R_2 + U_{q_2} \cdot (R_1 + R_4)}{(R_2 + R_3)(R_1 + R_4) + R_2 \cdot R_3}$$

Stromrichtung I_3 anders als festgelegt! (neg. Vorzeichen)

(B) Maschenstromanalyse

Kein Verzicht auf Knotengleichungen! Darstellung von Spannungsbilanzen!
In jeder unabhängigen Masche wird ein Maschenstrom (eine Rechengröße) eingeführt - damit werden Knotengleichungen automatisch erfüllt.



Die messbaren Zweigströme müssen aus der Vorzeichenrichtigen Summe der erst. Maschenströme in den zw. Zweigen bestimmt werden... (z.B.: $I_1 = I_2 - I_{II}$)

Vorbereitung:

- Umformung reeller Stromquellen in Spurquellen
- Einführen von $z - (k-1)$ unabhängigen Maschenströmen, die jeweils über mindestens einen Zweig mit einem weiteren verknüpft sind

es ex. hier:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Zweige } z=3 \\ \text{Knoten } k=2 \end{array} \right\} \rightsquigarrow z-(k-1) = 2 \text{ Gleichungen erforderlich!} \quad (\text{entsprechend Anzahl unbekannter})$$

d.h. es ex. 2 unabhängige Maschenströme I_1 und I_{II} , wobei

! im vollen Sinne \Rightarrow Maschenstrom \equiv gesuchten Strom! gewählt wird \rightarrow Hier $I_1 = I_3$, d.h. es sollte kein zweiter Maschenstrom durch den Zweig mit dem gesuchten Strom I_3 gelegt werden (Vereinfachung)

2 Maschengleichungen: (I): $I_1 (R_1 + R_3 + R_4) - I_{II} (R_1 + R_4) = U_{q_1}$

\checkmark (II): $-I_1 (R_1 + R_4) + I_{II} (R_2 + R_1 + R_4) = U_{q_2} - U_{q_1}$

(neg. Vorzeichen entsteht bei gegenläufigem Richtungssinn anderer Maschenströme i.d.R. Zweigen) in Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} (R_1 + R_3 + R_4) & -(R_1 + R_4) \\ - (R_1 + R_4) & (R_2 + R_1 + R_4) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{q_1} \\ U_{q_2} - U_{q_1} \end{pmatrix}$$

Koeff.-Matrix R
der Widerstände

Determinantenrechnung

mit Cramerscher Regel: $I_3 = I_1 = \frac{D_1}{\det R} = \frac{U_{q_1}}{\begin{vmatrix} (R_1 + R_3 + R_4) & -(R_1 + R_4) \\ (U_{q_2} - U_{q_1}) & (R_2 + R_1 + R_4) \end{vmatrix}}$

$$\begin{vmatrix} U_{q_1} & -(R_1 + R_4) \\ (U_{q_2} - U_{q_1}) & (R_2 + R_1 + R_4) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (R_1 + R_3 + R_4) & -(R_1 + R_4) \\ (R_1 + R_3 + R_4) & -(R_1 + R_4) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -(R_1 + R_4) & (R_2 + R_1 + R_4) \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{I_3}} = \frac{U_{q_1} (R_2 + R_1 + R_4) + (U_{q_2} - U_{q_1})(R_1 + R_4)}{(R_1 + R_3 + R_4)(R_2 + R_1 + R_4) - (R_1 + R_4)^2} = \frac{U_{q_1} \cdot R_2 + U_{q_2} \cdot (R_1 + R_4)}{(R_2 + R_3)(R_1 + R_4) + R_2 \cdot R_3}$$

Formalisierung MSA:

in Koeffizientenmatrix steht in

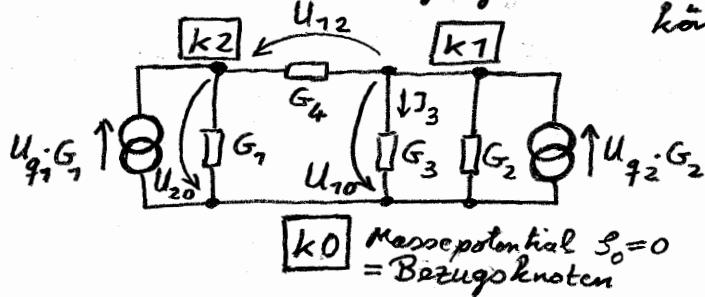
- Hauptdiagonale: Ringwiderstand der i -ten Masche (Reihenschaltung R_i)
 - Nebendiagonallementen: Koppelwiderstände des i -ten und j -ten Maschenumlaufs; neg. Vz. wenn Maschenströme gegentägig.
- (Koeffiz.-Matrix ist symmetrisch zur Hauptdiagonale! → Spiegelung mögl.)
- Rechte Seite enthält Σ der Quellenspannungen in der jeweiligen Masche)

(C) Knotenspannungsanalyse

auch: "Knotenpotentialanalyse"

Hier Verzicht auf Maschengleichungen! Darstellung von Strombilanzen! zwischen den $k-1$ unabhängigen Netzwerknoten und einem frei wählbaren Bezugsknoten (= Massenknoten mit Potential $s_0 = 0$) werden (unbekannte) Knotenspannungen eingeführt.

Dh. mit der Festlegung von Knotenspannungen U_{i0} an unabhängigen Knoten k_i können die Strombilanzen d. Knoten best. werden



es ex. hier $k=3$ Knoten

~ $k-1 = 2$ unabhängige Knoten liefern 2 unabh. erforderl. Knotengleichungen zur Bestimmung der Knotenspannungen

Die (messbaren) Spannungen über den Zweigen werden durch Knotenspannungs differenzen ausgedrückt. Die Zweiströme ergeben sich jeweils aus den Spannungs differenzen vom betrachteten Knoten zum benachbarten Knoten hin gesehen (Vorzeichenregelung) u. den Koppelleitwerten:

z.B. ist für k_1 der Stromanteil durch G_4 mit

$$(U_{10} - U_{20}) G_4 \text{ darzustellen, wobei } +U_{12} = U_{10} - U_{20}$$

Der Wert des Klammerausdrucks ergibt das Vorzeichen des Stromanteils (zu- oder abfließend) "automatisch" in den Gleichungen:

→ Strombilanz für Knoten:

$$\begin{aligned} k_1 & (U_{10} - U_{20}) G_4 + U_{10} (G_2 + G_3) = U_{q_2} \cdot G_2 \\ k_2 & (U_{20} - U_{10}) G_4 + U_{20} \cdot G_1 = U_{q_1} \cdot G_1 \end{aligned}$$

Ordnen:

k_1	$U_{10} (G_2 + G_3 + G_4) - U_{20} \cdot G_4$	$= U_{q_2} \cdot G_2$
k_2	$-U_{10} \cdot G_4 + U_{20} (G_1 + G_4)$	$= U_{q_1} \cdot G_1$

Quellströme pos. für $\xrightarrow{j_i}$
d. Stromquellen neg. für $\xleftarrow{j_i}$
einsetzen!

in Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} (G_2 + G_3 + G_4) & -G_4 \\ -G_4 & (G_1 + G_4) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{q_2} \cdot G_2 \\ U_{q_1} \cdot G_1 \end{pmatrix}$$

Knoten Leitwert-Matrix

Spalte der Einstromungen

Determinantenrechnung

mit Cramerscher Regel:

(formal wie in A, B:
analytische Lösung nur zum Vergleich des Ergebnisses)

$$\underline{\underline{U}_{10}} = \frac{D_{10}}{\det G} = \frac{U_{q_2} \cdot G_2 \cdot (G_1 + G_4) + G_4 \cdot U_{q_1} \cdot G_1}{(G_1 + G_4)(G_2 + G_3 + G_4) - G_4^2}$$

$$= \frac{G_1 G_2 G_4 \left(U_{q_2} \frac{1}{G_4} + U_{q_1} \frac{1}{G_1} + U_{q_1} \frac{1}{G_2} \right)}{\text{Nenner}}$$



$$\underline{\underline{J}_3} = \frac{U_{10}}{R_3} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 (U_{q_2} (R_1 + R_4) + U_{q_1} R_2)}{(G_1 + G_4)(G_2 + G_3 + G_4) - G_4^2}$$

$$\underline{\underline{J}_3} = \frac{U_{q_2} (R_1 + R_4) + U_{q_1} R_2}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3) + R_2 \cdot R_3}$$



Bezugsknoten k_0

so wählen, dass er ein Knotenpunkt, am interessierenden Zweig ist, somit müsste nach zwei unbekannten Knotenspannungen (mit Differenzbildung) aufgelöst werden

Formalisierung ΣSA :

Hauptdiagonalelement:

Summe aller angeschlossenen Leitwerte, am jew. betr. i -ten Knoten (stets positiv!)

Nebendiagonalelemente:

$(-1) \cdot$ Koppel Leitwert G_{ij} zwischen betrachtetem Knoten (Zeilen-Nr.) und dem jeweiligen Nachbarknoten (Spalten-Nr.).
Nicht ex. Knotenverbindungen $\hat{=} \text{Einstieg}$ (stets negativ!)

Matrix der Kn.-Leitwerte ist symmetrisch zur Hauptdiagonalen

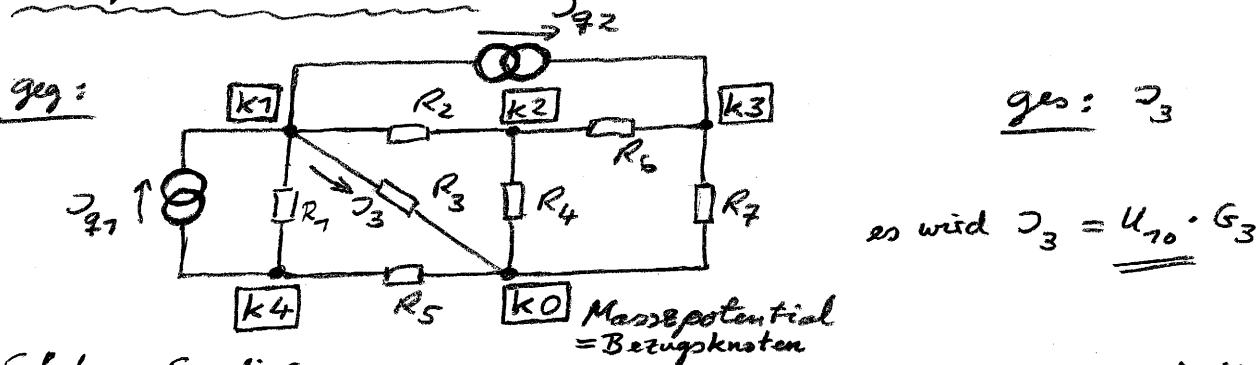
(↗ Spiegelung! möglich)

lösungsspalte :

Quellenströme zum betr. Knoten (Zeile)
Vorzeichen: || Zufluss pos.
Abfluss neg. gezählt!

Bem: \sum der Elemente einer Zeile (bzw. Spalte) ist stets der Leitwert zwischen dem betr. Knoten und dem Bezugsknoten (Massepot.).
 $\sum = 0$, wenn Knoten keine direkte Verbindung zum Bez.kn. hat!

Beispiel zur KSA:



Sofort aus Formalisierung: alle Knotenspannungen U_{10} auf Massenpot. bez! Quellströme-Vorz.:
Knoten-Nr. zu- / ab-fließend

$$\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc} (G_1 + G_2 + G_3) & -G_2 & 0 & -G_1 \\ -G_2 & (G_2 + G_4 + G_6) & -G_6 & 0 \\ 0 & -G_6 & (G_6 + G_7) & 0 \\ -G_1 & 0 & 0 & (G_1 + G_5) \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} U_{10} \\ U_{20} \\ U_{30} \\ U_{40} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{q1} - I_{q2} \\ 0 \\ I_{q2} \\ -I_{q1} \end{pmatrix}$$

nach U_{10} auflösen ... , damit $I_3 = U_{10} \cdot G_3$

Vergleich MSA - KSA

Anzahl der erf. Gleichungen: $\leq -(k-1)$ für MSA
 $k-1$ für KSA

→ KSA günstiger bei Netzwerken mit: $k < 7 + \frac{z}{2}$
(dh. allg. bei $k \geq 5$, wenn jeder Knoten nicht jedem anderen über einen Zweig verbunden ist!)

Weiterhin KSA günstiger - da Wegfall der Suche nach unabhäng. Maschen ("Vollst. Baum")
- da Bezugsknoten k0 sinnvollerweise Massenpotential der Schaltung (vielen Bauteilen angeschl.)

d.h.: die KSA ist leichter formalisierbar als die MSA, die wesentlich mehr (unübersichtliche) Ansätze zuläßt.

⇒ KSA ist allg. Grundlage von Netzwerkberechnungs-Software!

(z.B. PSPICE zum Entwurf und Analyse analoger und digitaler Schaltungen)

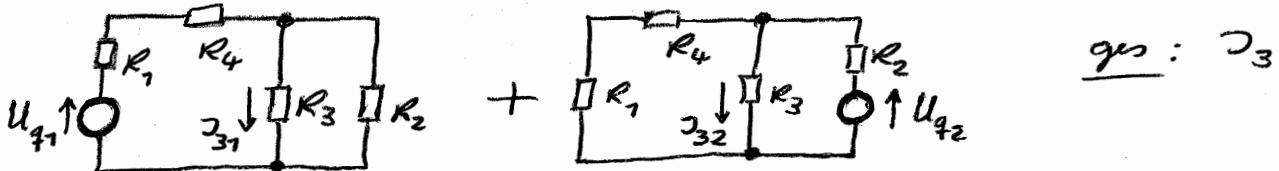
(D)

Überlagerungssatz

\cong "n-satz von Helmholtz"
 \cong Superpositionsprinzip

Betrachtung der Wirkung jeder einzelnen Quelle auf einen gesuchten Zweigstrom. Danach Addition aller Teilwirkungen (vorzeichenrichtig!)

Bem: Nur wenn Ursache und Wirkung linear voneinander abhängen, ist Addition (Überlagerung) mgl., dh. nur für lineare Netzwerke!



Wirkung v. Quelle U_{q1}
auf I_{31}

Wirkung v. Quelle U_{q2}
auf I_{32}

ges: I_3

(hier ex. 2 Quellen,
→ 2 Teilwirkungen als
Ströme I_{31} u. I_{32})

Jeweils Betrachtung der Wirkung nur einer Quelle auf gesuchten Zweigstrom: für die jeweils nicht einzuzeichnenden Quellen erfolgt hierzu Außen-Betriebssetzung von Spannungsquellen durch Kurzschluss der idealen Sp. quelle. von Stromquellen durch Leerlauf der idealen Stromquelle.

wobei alle R_j in der Betrachtung (\cong Innenwiderstand R_i) verbleiben!

Teilströme aus Anwendung der Strom- bzw. Spannungsteiler-Regel.

↗ Dann Gesamtstrom aus vorzeichenrichtiger Addition der Teilwirkungen bestimmen:

$$I_3 = I_{31} + I_{32}$$

$$I_{31} = \frac{U_{q1}}{R_1 + R_4 + \underbrace{\frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}_{\text{Gesamtstrom durch die Quelle}}} \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} = \frac{U_{q1} \cdot R_2}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3) + R_2 R_3}$$

$$I_{32} = \frac{U_{q2}}{R_2 + \frac{R_3(R_1 + R_4)}{R_1 + R_3 + R_4}} \cdot \frac{R_1 + R_4}{R_1 + R_3 + R_4} = \frac{U_{q2} (R_1 + R_4)}{R_2 (R_1 + R_3 + R_4) + R_3 (R_1 + R_4)}$$

$$I_3 = I_{31} + I_{32} = \frac{U_{q2} (R_1 + R_4) + U_{q1} R_2}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3) + R_2 R_3}$$

Ausmultiplizieren und
Ordnen liefert Hauptnenner
Betrachtung entsprechend
auch für Teilspannungen
mit Spannungsteiler-Regel...
ausführbar!

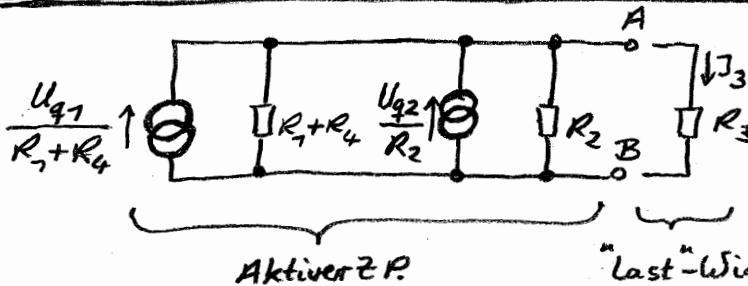
E Zweipoltheorie

⇒ Satz von der Ersatzquelle
⇒ Helmholtz - Thévenin - Theorem

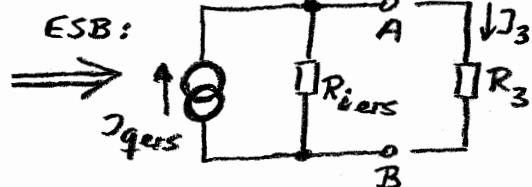
bek. aus GSk - Betrachtung, hier Rückführung kompliz. linearer Netzwerke auf GSk (Vorgehensweise vgl. S. (23) und (24))

Sinnvoll, wenn sich die Quellen zusammenfassen lassen!
Reduzierung auf U-I-Betrachtung nur an den Klemmen A-B:

a zB: Stromquellen - ESB wird genutzt:



Bezüglich der Klemmen A-B entsteht nach Umwandlung der Quellen (hier Stromquellen-ESB besond. einfach) das



Ersatzschaltbild - Elemente:

$$\text{für } J_{q_{ers}} = J_{kAB} = \frac{U_{q_1}}{R_1 + R_4} + \frac{U_{q_2}}{R_2} = \frac{U_{q_1} R_2 + U_{q_2} (R_1 + R_4)}{R_2 (R_1 + R_4)}$$

und

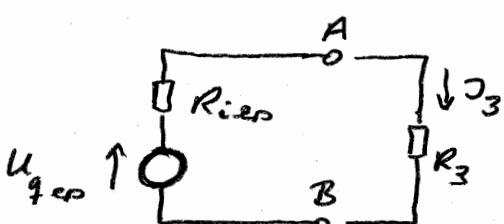
$$R_{iers} = R_2 \parallel (R_1 + R_4) = \frac{R_2 (R_1 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_4} \quad (\text{hierzu ideale Stromquellen ab Leerlauf betrachtet})$$

(\sum Quellströme = Kurzschlussstrom durch die Kl. A-B)

"Kurzschlussstrom - Betrachtung"

$$\text{damit } J_3 = J_{q_{ers}} \frac{R_{iers}}{R_{iers} + R_3}$$

b oder: Spannungsquellen - ESB wird genutzt:



→ einfache Quellenumwandlung des Str. qu.-ESB liefert:
 R_{iers} = s. oben (Ersatz-Innenwid. unverändert)

$$U_{q_{ers}} = J_{q_{ers}} \cdot R_{iers} \quad (\text{oder Best. } U_{eAB}) \\ = \frac{U_{q_1} R_2 + U_{q_2} (R_1 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_4}$$

$$\text{damit } J_3 = \frac{U_{q_{ers}}}{R_{iers} + R_3} = \frac{U_{q_1} R_2 + U_{q_2} (R_1 + R_4)}{R_2 (R_1 + R_4) + R_3 (R_1 + R_2 + R_4)} \\ = \frac{U_{q_1} R_2 + U_{q_2} (R_1 + R_4)}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3) + R_2 R_3}$$

Vorteil: nach Bestimmung der Ersatzschaltbildelemente R_{iers} und $J_{q_{ers}}$ (bzw. $U_{q_{ers}}$) ist die Ermittlung der gesuchten Größe mit den einfachen Beziehungen des Grundstromkreises (GSK) möglich.