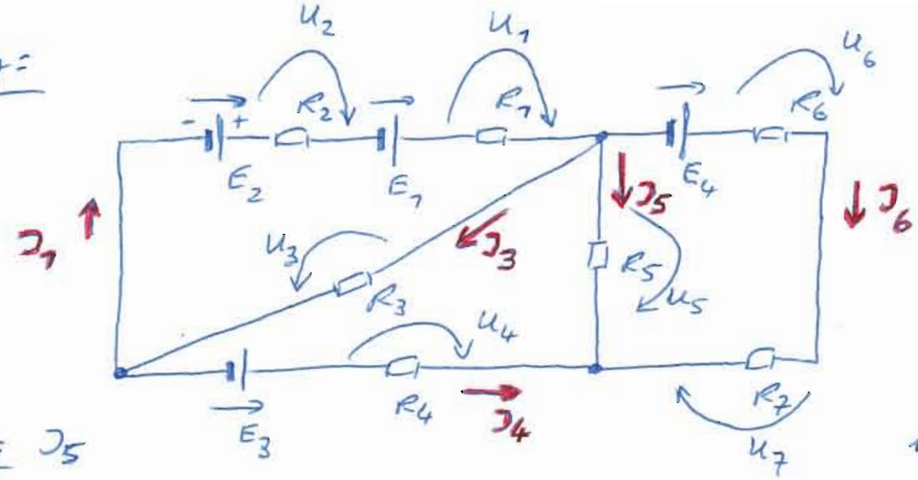
geg:

a.)



- zuerst Einzeichnen der: Zweigströme J_i ⇝ Spannungsabfälle über R_i
- dann Festlegung der m Maschenumläufe

ges: J_5

hier nur Gleichungssystem aufstellen, nicht Lsg

hier $m = 3$ unabhängige M. | ex. 5 unbekannte Zweigströme ⇝ 5 Gleichungen erforderl.
$k = 3 \rightsquigarrow 2$ unabhängige |

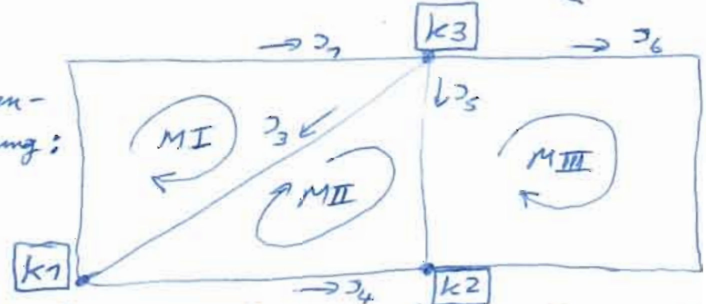
$\Longrightarrow$ 5 unabh. Gleichungen aus: $\boxed{m + \underbrace{(k-1)}_{\text{nur } k-1 \text{ Knotengleichungen sind linear unabh.}} = 5}$ (!)

davon 3 MS + 2 KS

b.) „Vollständiges Gleichungssystem“ nach Kirchhoff'schen Sätzen aufstellen:

(= Zweigstromanalyse (ZSA))

z.B. Maschenfestlegung:



Maschenumläufe auch anders festlegbar...

Index der Zweigströme →	1	3	4	5	6		
MI	$J_1(R_1+R_2)$	$+J_3R_3$				=	E_1+E_2
MII		$-J_3R_3$	$-J_4R_4$	$+J_5R_5$		=	$-E_3$
MIII				$-J_5R_5$	$+J_6(R_6+R_7)$	=	E_4
$\boxed{k2}$			J_4	$+J_5$	$+J_6$	=	0
$\boxed{k3}$	J_1	$-J_3$		$-J_5$	$-J_6$	=	0

⇝ in Matrix-Darstellung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} (R_1+R_2) & R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_3 & -R_4 & R_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_5 & (R_6+R_7) \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{Koeffizientenmatrix (hybrid)}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} J_1 \\ J_3 \\ J_4 \\ J_5 \\ J_6 \end{pmatrix}}_{\text{Vektor der unbekannten Zweigströme}} = \underbrace{\begin{pmatrix} E_1+E_2 \\ -E_3 \\ E_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Vektor der absoluten Glieder}}$$

weiter zu [6.1]

c.) Lösung für $I_{R5} = I_5$ als ges. Zweigstrom:

Cramer'sche Regel

$$I_5 = \frac{D_5}{\det D}$$

D_5: Koeffizientenspalte für I_5 in Systemdeterm. durch Lösungsspalte ersetzen

$\det D$: Systemdeterminante

(schr. Rechnung nur sinnvoll für $\leq 3 \times 3$-er Determinanten ...)

↓ Determinanten-Schreibweise

$$\underline{\underline{I_5}} = \frac{\begin{vmatrix} (R_1+R_2) & R_3 & 0 & E_1+E_2 & 0 \\ 0 & -R_3 & -R_4 & -E_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_4 & (R_6+R_7) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (R_1+R_2) & R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_3 & -R_4 & R_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_5 & (R_6+R_7) \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}} = \dots$$

hiermit Betrachtung nach ZSA zuende!

jetzt Weiter mit MSA:

Einführung unabhängiger Maschenströme als reine Rechengröße, Festlegung wie Maschenumläufe mit vorgeg. Richtungssinn...

↓ nur noch soviele Gleichungen wie unabhäng. Maschen aufstellbar/erforderl.

(!) physische Zweigströme müssen aus vorzeichenrichtiger Summe der Maschenströme im betreffenden Zweig nachfolgend ausgerechnet werden

Empfehlung, am Besten: nur einen Maschenstrom durch den "gesuchten" Zweig legen ↓ nur 1 Maschenstrom zu bestimmen!

zB:

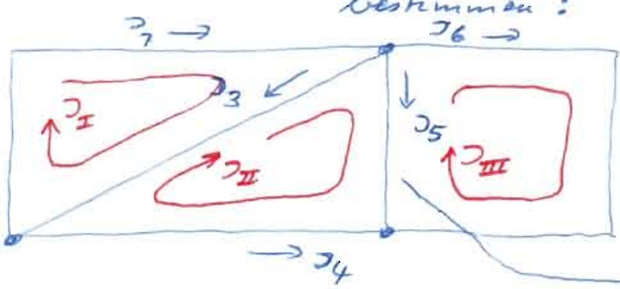
$I_1 = I_I$

$I_3 = I_I - I_{II}$

$I_4 = -I_{II}$

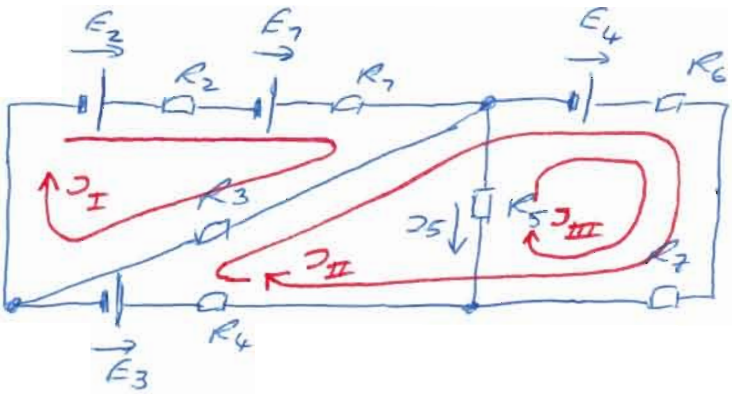
$I_5 = I_{II} - I_{III}$ ungünstig!

$I_6 = I_{III}$



hier sind 2 Maschenströme durch den Zweig mit I_5 gelegt: ungünstig!

zu 6.1 d.) **Maschenstromanalyse**



• Festlegung der unabh. Maschenströme (unabhäng. Mstr.-Glchgn.)
hier zur Best. von I_5 günstig gewählt

In jeder Masche ein Maschenstrom (als Rechengröße), $m = 3$
$\Rightarrow$ $\underline{\underline{3}}$ unabhäng. Ms.-Gleichgn erforderlich

$\underline{\text{ges}}$: I_5 $\Rightarrow$ nur $\underline{\underline{1}}$ Maschenstrom durch R_5 legen!

hier $\underline{\underline{I_5 = -I_{III}}}$ (gegenläufig)

Maschen(strom)-Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
&\text{I}: && I_I(R_1+R_2+R_4) - I_{II}R_3 && = E_1+E_2\\
&\text{II}: && -I_I R_3 + I_{II}(R_3+R_4+R_6+R_7) + I_{III}(R_6+R_7) && = E_4-E_3\\
&\text{III}: && I_{II}(R_6+R_7) + I_{III}(R_6+R_7+R_5) && = E_4
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Matrix-Schreibweise:

$$
\begin{pmatrix} (R_1+R_2+R_3) & -R_3 & 0 \\ -R_3 & (R_3+R_4+R_6+R_7) & (R_6+R_7) \\ 0 & (R_6+R_7) & (R_6+R_7+R_5) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1+E_2 \\ E_4-E_3 \\ E_4 \end{pmatrix}
$$

(!) kann auch gleich aus Schaltung abgeleitet werden ... ($\hat{=}$ Formalisierung)

$$
\Rightarrow I_{R5} = -I_{III} = -\frac{D_{III}}{\det R} = -\frac{\left|\ \cdots \ \begin{matrix} E_1+E_2 \\ E_4-E_3 \\ E_4 \end{matrix}\right|}{\left|\ \underline{R}\ \right|}
$$

Determ.-Rechng. mit Cramer'scher Regel ...

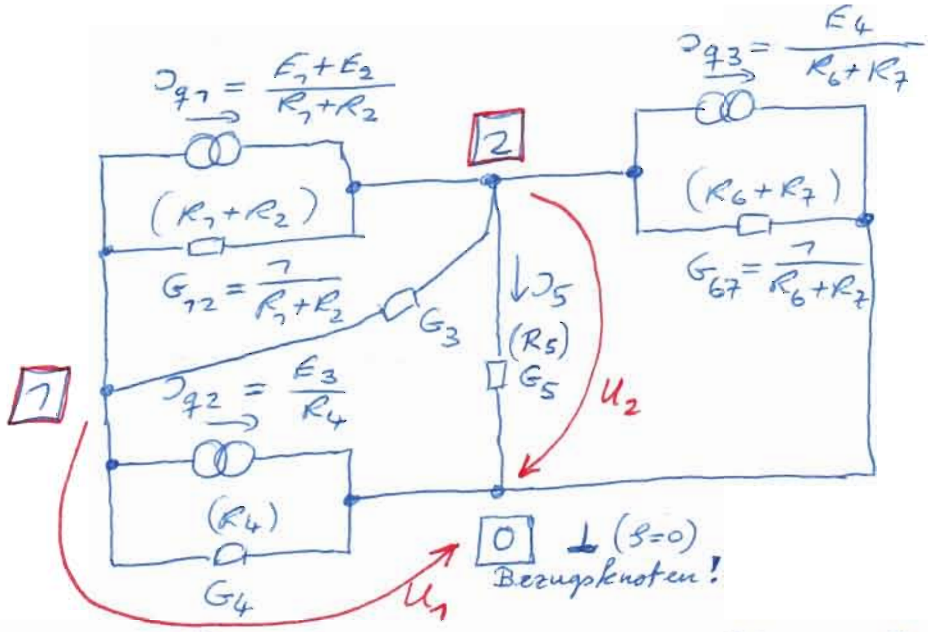
$$
\underline{\underline{I_{R5} = \ \ldots}}
$$

zu 6.1 e.) <u>Knotenspanngsanalyse</u>

Zusammenfassen $E_1 + E_2$ und der Reihenschaltg. der Widerstände

- Umformung der techn. Spanngsquellen in techn. Stromquellen (weil hier Strombilanzen an (k-1) Knoten aufgestellt werden!

↓



Wid. sinnvoll als Leitwerte eintragen

hier ex. 3 Knotenpunkte ↓ 2 unabhängige KP-Gleichgn erstellbar

$\boxed{0}$: Bezugs(Masse-)Knoten wird auf eine Anschlußseite des Zweiges gelegt, in dem J oder U bestimmt werden soll

! Festlg.: Quellströme zum KP + vom KPweg −

Knotenpunkt - Gleichungen:

Knotenpkt. $\boxed{1}$: $(U_1 - U_2)\cdot(G_3 + G_{12}) + U_1\cdot G_4 = -J_{q1} - J_{q2}$

$\boxed{2}$: $(U_2 - U_1)\cdot(G_3 + G_{12}) + U_2(G_5 + G_{67}) = J_{q1} - J_{q3}$

ordnen:
$$U_1(G_{12}+G_3+G_4) - U_2(G_{12}+G_3) = -J_{q1} - J_{q2}$$
$$-U_1(G_{12}+G_3) + U_2(G_{12}+G_3+G_5+G_{67}) = J_{q1} - J_{q3}$$

↓ Matrix - Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} (G_{12}+G_3+G_4) & -(G_{12}+G_3) \\ -(G_{12}+G_3) & (G_{12}+G_3+G_5+G_{67}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -J_{q1} - J_{q2} \\ J_{q1} - J_{q3} \end{pmatrix}$$

(!) kann auch direkt aus Schaltung abgeleitet werden ...
(≙ Formalisierung)

./.

Lösung nach Cramer'scher Regel für $\underline{\underline{U_2}}$

$$\curvearrowright \quad \underline{\underline{I_{R5}}} = \frac{U_2}{R_5}$$

$$\curvearrowright \quad \underline{\underline{U_2}} = \frac{D_2}{\det G} = \frac{\begin{vmatrix} (G_{12}+G_3+G_4) & (-I_{q1}-I_{q2}) \\ -(G_{12}+G_3) & (I_{q1}-I_{q3}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (G_{12}+G_3+G_4) & -(G_{12}+G_3) \\ -(G_{12}+G_3) & (G_{12}+G_3+G_5+G_{67}) \end{vmatrix}}$$

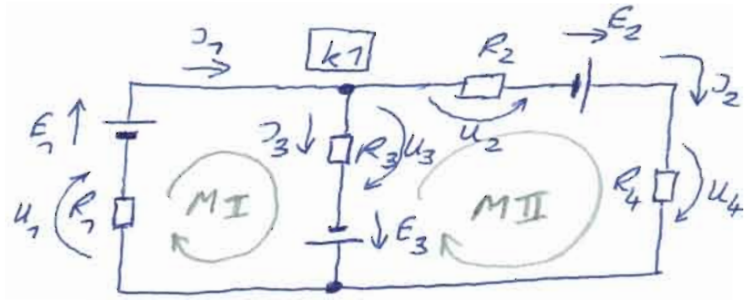
$$\underline{\underline{U_2 = \qquad \ldots}}$$

damit $\underline{\underline{I_{R5} = \frac{U_2}{R_5}}} = \ldots$

6.2

MB

geg:



- Zweigströme I_1, I_2, I_3 eintragen (ev. Spgsabfälle)
- Maschen (umläufe) festlegen

ges: $I_4 \; (= I_2)$

a.) nach Kirchhoff'schen Sätzen (ZSA)
b.) nach Überlagerungssatz
c.) ...

hier $z = 3$ Zweige ↷ für a) sind $\underline{\underline{3}}$ Gleichungen erf.:
aus 1 unabhäng. Knotenpktgl. (hier $k = 2$)
+ 2 Maschengleichungen (unabhängige)

a.) Kirchhoff'sche Sätze

$$\begin{array}{llllll} \boxed{k1} & I_1 & -I_2 & -I_3 & = 0 \\ MI & U_1 & & +U_3 & = E_1 + E_3 \\ MII & & (U_2+U_4) & -U_3 & = E_2 - E_3 \end{array}$$

mit Strom-Spanngs-Beziehungen:
$U_1 = R_1 \cdot I_1$
$U_2 = R_2 \cdot I_2$
$U_3 = R_3 \cdot I_3$
$U_4 = R_4 \cdot I_2$

Einsetzen der SSB in Kirchhoff'sche Glng.en:

$$\begin{array}{llllll} \boxed{k1} & I_1 & -I_2 & -I_3 & = 0 \\ MI & R_1 \cdot I_1 & & +R_3 I_3 & = E_1 + E_3 \\ MII & & (R_2+R_4) I_2 & -R_3 I_3 & = E_2 - E_3 \end{array}$$

Gl.-System in Matrizenschreibweise:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & 0 & R_3 \\ 0 & (R_2+R_4) & -R_3 \end{pmatrix}}_{\text{Koeffiz.-matrix}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}}_{\text{Vektor der Unbekannten}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ E_1 + E_3 \\ E_2 - E_3 \end{pmatrix}}_{\text{Vektor der absoluten Glieder}}$$

⇒ Lösung für unbekannte Zweigströme mit CRAMER-scher Regel:
Die k-te Unbekannte ergibt sich, indem man in der Koeff.-Matrix die k-te Spalte durch die Spalte der abs. Glieder ersetzt und den Wert der Determinante der so entstandenen Matrix durch den Wert der Determinante der ursprünglichen Koeff.-Matrix dividiert.

weiter zu 6.2 (MB)

$$\underline{\underline{I_4 = I_2}} = \frac{\left|\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ R_1 & E_1+E_3 & R_3 \\ 0 & E_2-E_3 & -R_3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 \\ R_1 & E_1+E_3 \\ 0 & E_2-E_3 \end{matrix}}{\left|\begin{matrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & 0 & R_3 \\ 0 & (R_2+R_4) & -R_3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & -1 \\ R_1 & 0 \\ 0 & (R_2+R_4) \end{matrix}}$$

$$= \frac{+(E_1+E_3)R_3 + R_1(E_2-E_3) + R_3(E_2-E_3)}{+R_1(R_2+R_4) + R_1R_3 + (R_2+R_4)}$$

Zähler u. Nenner mit (-1) multipliziert (zur Vz.-Umkehr)

$$= \frac{R_3(E_1+E_3) + (E_2-E_3)(R_1+R_3)}{(R_2+R_4)(R_1+R_3) + R_1R_3}$$

Zahlenwerte:

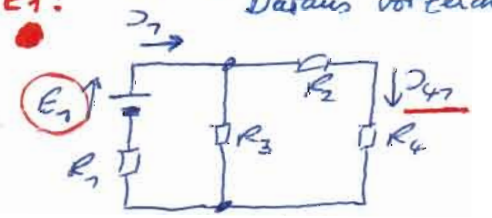
$$= \frac{4\Omega \cdot 12V + (-1{,}5V)\cdot 1\Omega}{6\Omega \cdot 7\Omega + 12\Omega^2} = \frac{37{,}5V}{54\Omega}$$

$$\underline{\underline{I_4 = I_2 = 0{,}695\,A}}$$

b) Lsng. nach Überlagerungssatz (mit klass. Stromteilerregel)

Wirkung der einzelnen Quellen E_1, E_2 und E_3 auf I_4 bestimmen; Daraus vorzeichenrichtige Summe bilden, um I_4 zu erhalten:

E_1:



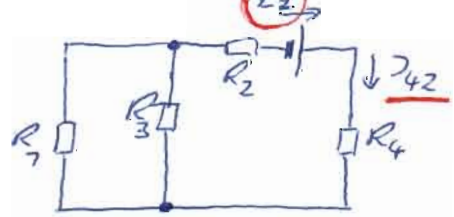
$$I_1 = \frac{E_1}{R_1 + R_3 \| (R_2+R_4)} = \frac{E_1}{R_1 + \frac{R_3(R_2+R_4)}{R_3+R_2+R_4}}$$

$$\frac{I_{41}}{I_1} = \frac{R_3 \| (R_2+R_4)}{R_2+R_4} = \frac{R_3\cdot(R_2+R_4)}{(R_3+R_2+R_4)(R_2+R_4)}$$

$$\underline{\underline{I_{41}}} = \frac{R_3 E_1 \cdot \cancel{(R_2+R_3+R_4)}}{\cancel{(R_2+R_3+R_4)}\left[R_1(R_2+R_3+R_4) + R_3(R_2+R_4)\right]}$$

$$= \frac{4\Omega \cdot 4{,}5V}{3\Omega\cdot 10\Omega + 4\Omega \cdot 6\Omega} = \frac{18V}{54\Omega} = \underline{\underline{0{,}\overline{3}\,A}}$$

E_2:

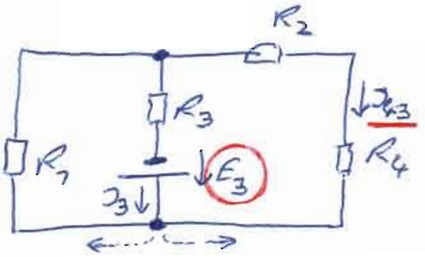


$$\underline{\underline{I_{42}}} = \frac{E_2}{R_2+R_4+\frac{R_1R_3}{R_1+R_3}} = \frac{6V}{6\Omega + \frac{12}{7}\Omega}$$

$$= \frac{6V\cdot 7}{54\Omega} = \underline{\underline{0{,}777\,A}}$$

weiter zu 6.2 (MB)

E_3:



$$I_3 = \frac{E_3}{R_3 + R_1 || (R_2 + R_4)}$$

$$= \frac{E_3}{R_3 + \frac{R_1 (R_2 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_4}}$$

$$\frac{I_{43}}{I_3} = - \frac{R_1 || (R_2 + R_4)}{R_2 + R_4}$$ ← neg. Vz.! weil I_{43} in neg. Richtung gegenüber I_3 festgelegt wurde

$$= - \frac{R_1 \cancel{(R_2 + R_4)}}{(R_1 + R_2 + R_4) \cdot \cancel{(R_2 + R_4)}}$$

$$I_{43} = - \frac{R_1 E_3 \cdot \cancel{(R_1 + R_2 + R_4)}}{\cancel{(R_1 + R_2 + R_4)} [R_3 (R_1 + R_2 + R_4) + R_1 (R_2 + R_4)]}$$

$$= - \frac{3 \Omega \cdot 7{,}5 V}{4 \Omega \cdot 9 \Omega + 3 \Omega \cdot 6 \Omega} = - \frac{22{,}5 V}{54 \Omega} = -0{,}417 A$$

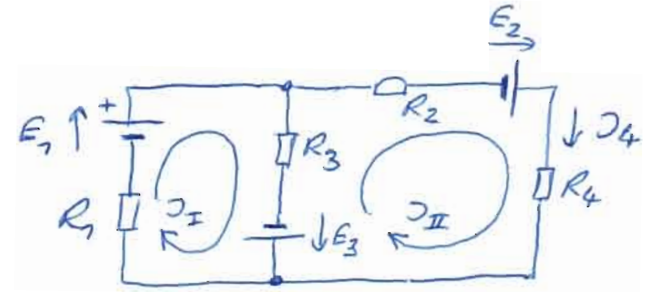
Ergebnis:

$$\Longrightarrow I_4 = I_{41} + I_{42} + I_{43}$$

$$I_4 = 0{,}33 A + 0{,}78 A + (-0{,}42 A) = 0{,}69 A$$

für MB + WIW

6.2) Lsng. nach Maschenstromanalyse (MSA)



ges: I_4

es ex. 2 Maschen (unabhängige ~) $\rightarrow$ 2 Maschenströme (Rechengrößen) I_I, I_{II} einführen.

dh. es entst. 2 unabhängige Maschen(strom)-Gleichungen

(!) sinnvoll, I_4 aus nur einem Maschenstrom zu bestimmen!

$\hookrightarrow I_4 = I_{II}$

$$\text{I}\curvearrowright \quad I_I(R_1 + R_3) - I_{II} \cdot R_3 = E_1 + E_3$$
$$\text{II}\curvearrowright \quad -I_I \cdot R_3 + I_{II}(R_2 + R_3 + R_4) = E_2 - E_3$$

in Matrix-Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} (R_1 + R_3) & -R_3 \\ -R_3 & (R_2 + R_3 + R_4) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_I \\ I_{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 + E_3 \\ E_2 - E_3 \end{pmatrix}$$

Cramer'sche Regel:

$$I_4 = I_{II} = \frac{D_{II}}{\det R} = \frac{\begin{vmatrix} (R_1 + R_3) & (E_1 + E_3) \\ -R_3 & (E_2 - E_3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (R_1 + R_3) & -R_3 \\ -R_3 & (R_2 + R_3 + R_4) \end{vmatrix}}$$

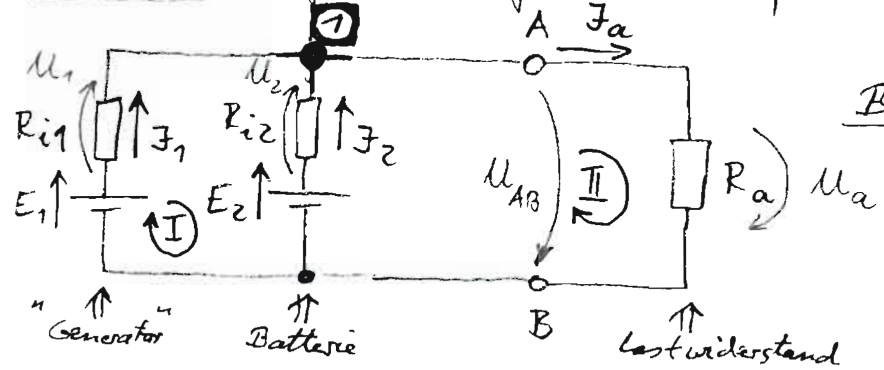
$$I_4 = \frac{(R_1 + R_3)(E_2 - E_3) + R_3(E_1 + E_3)}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_3 + R_4) - R_3^2}$$

$$I_4 = \frac{(E_2 - E_3)(R_1 + R_3) + (E_1 + E_3) \cdot R_3}{(R_2 + R_4)(R_1 + R_3) + R_1 \cdot R_3}$$

(vgl. vorige Lösungen)

Schaltbild   Gleichstromgenerator = Spannungsquelle

6.3



Berechnung nach ZSA

$z=3 \Rightarrow \begin{cases} 2 \text{ Maschengl. unabhäng.} \\ 1 \text{ unabh. Knoten} \end{cases}$

$\Rightarrow$ 3 Gleichungen für 3 unbek. Ströme

Knotenpunktsatz $\boxed{1}$	$I_1 + I_2 - I_a$	$= 0$
Maschensatz I	$I_1 R_{i1} - I_2 R_{i2}$	$= E_1 - E_2$
Maschensatz II	$I_2 R_{i2} + I_a R_a$	$= E_2$

Cramersche Regel

Sarrus'sche Regel

$$I_a = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ R_{i1} & -R_{i2} & E_1-E_2 \\ 0 & R_{i2} & E_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ R_{i1} & -R_{i2} & 0 \\ 0 & R_{i2} & R_a \end{vmatrix}} = \frac{-R_{i2}E_2 - R_{i1}E_2 - R_{i2}(E_1-E_2)}{-R_{i2}R_a - R_{i1}R_{i2} - R_{i1}R_a} =$$

$$= \frac{-R_{i1}E_2 - R_{i2}E_1}{-R_a(R_{i1}+R_{i2}) - R_{i1}R_{i2}} = I_a$$

lt. Aufg.-stellg.

mit $R_{i1} = R_{i2} = R_i$ ergibt sich

$$I_a = \frac{-R_i(E_1+E_2)}{-[2R_aR_i + R_i^2]} = \frac{E_1+E_2}{2R_a+R_i}$$

Auflösen nach I_1 mittels Cramerscher Regel:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ E_1-E_2 & -R_{i2} & 0 \\ E_2 & R_{i2} & R_a \end{vmatrix}}{\text{s.o.}} = \frac{-(E_1-E_2)R_{i2} - (E_1-E_2)R_a - E_2R_{i2}}{-R_a(R_{i1}+R_{i2}) - R_{i1}R_{i2}} =$$

$$= \frac{-R_{i2}(\cancel{+E_2} + E_1 - \cancel{E_2}) - (E_1-E_2)R_a}{\text{Nenner}}$$

mit $R_{i1} = R_{i2} = R_i$ ergibt sich

$$I_1 = \frac{E_1 + \frac{R_a}{R_i}(E_1-E_2)}{2R_a+R_i}$$

b.w.

- $$\underline{\underline{J_2}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ R_{i1} & E_1 - E_2 & 0 \\ 0 & E_2 & R_a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \\ S\,0 \\ \\ \end{vmatrix}} = \frac{(E_1 - E_2) R_a - E_2 R_{i1}}{-R_a (R_{i1} + R_{i2}) - R_{i1} R_{i2}}$$

mit $R_{i1} = R_{i2} = R_i$ ergibt sich:

$$\underline{\underline{J_2 = \frac{E_2 - \frac{R_a}{R_i}(E_1 - E_2)}{2 R_a + R_i}}}$$

- Klemmenspannung: $U_a = J_a \cdot R_a$

$$\underline{\underline{U_a = \frac{R_a (E_1 + E_2)}{2 R_a + R_i} = \frac{E_1 + E_2}{\frac{R_i}{R_a} + 2}}}$$

Zahlenwerte: $E_1 = 235\,V$; $R_{i1} = R_{i2} = 0{,}4\,\Omega$; $E_2 = 228\,V$

a) $R_a = R_3 = 6{,}3\,\Omega$

$J_a = 35{,}62\,A$; $J_1 = 26{,}56\,A$; $J_2 = 9{,}06\,A$

$U_a = 224{,}5\,V$

b) $R_a = R_4 = 13\,\Omega$

$J_a = 17{,}6\,A$; $J_1 = 17{,}6\,A$; $J_2 = 0$

$U_a = 228\,V$

c) $R_a = R_5 = 40\,\Omega$

$J_a = 5{,}75\,A$; $J_1 = 11{,}6\,A$; $J_2 = -5{,}85\,A$

$U_a = 230\,V$

Bem:
Die Zweigströme J_1 und J_2 könnten auch aus den Maschensätzen berechnet werden. Maschen dabei so wählen, daß jeweils R_a mit dabei

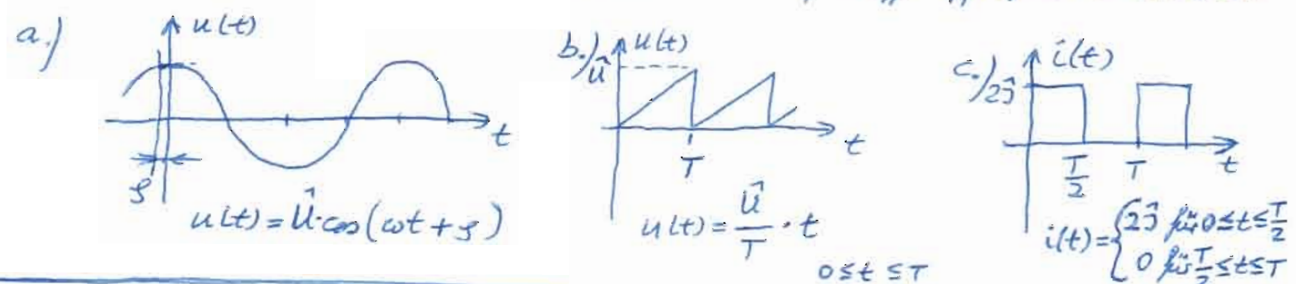
$$E_1 = U_1 + U_a \rightarrow U_1 = J_1 R_{i1} = E_1 - U_a \Longrightarrow \underline{\underline{J_1 = \frac{E_1 - U_a}{R_{i1}}}}$$

$$E_2 = U_2 + U_a \rightarrow U_2 = J_2 R_{i2} = E_2 - U_a \Longrightarrow J_2 = \frac{E_2 - U_a}{}$$

7.1) Mittelwert, Effektivwert, Gleichrichtwert

geg: 3 Funktionen:

ges: $\bar{x}$, x_{eff}, $|\bar{x}|$ als Gleichrichtwert



zu a.) Mittelwert

$$\boxed{\bar{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\cdot dt}$$

$$\Rightarrow \bar{u} = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{u}\cdot\cos(\omega t + \varphi)\cdot dt = \frac{\hat{u}}{T}\cdot\left[\frac{1}{\omega}\sin(\omega t + \varphi)\right]_0^T = 0$$

Nullphasen∢ der Fktn. unerheblich! ⇒ im Weiteren nicht mehr berücksichtigt

Effektivwert

$$\boxed{u_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\cdot dt}}$$

$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

$$\Rightarrow u_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left(\hat{u}\cdot\cos(\omega t)\right)^2\cdot dt} = \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{T}\left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4\omega}\sin(2\omega t)\right]_0^T}$$

$$= \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{\cancel{T}}\left[\frac{1}{2}\cancel{T} + \underbrace{\frac{1}{4\frac{2\pi}{T}}\cdot\sin\left(2\frac{2\pi}{\cancel{T}}\cancel{T}\right)}_{=0}\right]}$$

$$= \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$$

Gleichrichtwert

$$\boxed{|\bar{u}| = \frac{1}{T}\int_0^T |u(t)|\cdot dt}$$

für cos-Fktn. nur über $\frac{T}{4}$ integrieren ⇒ Faktor 4

$$\Rightarrow |\bar{u}| = \frac{1}{T}\int_0^T |\hat{u}\cdot\cos(\omega t)|\cdot dt = \frac{4\hat{u}}{T}\left[\frac{1}{\omega}\cdot\sin(\omega t)\right]_0^{\frac{T}{4}}$$

$$= \frac{4\hat{u}}{\cancel{T}}\left[\frac{\cancel{T}}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right]_0^{\frac{T}{4}}$$

$$= \frac{2\hat{u}}{\pi}\cdot\underbrace{\sin\left(\frac{2\pi}{\cancel{T}}\cdot\frac{\cancel{T}}{4}\right)}_{1,0} = \frac{2\hat{u}}{\pi} = 0{,}634\,\hat{u}$$

(weiter zu 7.1)

zu b.) $\underline{\underline{\bar{u}}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\hat{u}}{T} t \cdot dt = \left[\frac{\hat{u}}{T^2} \cdot \frac{t^2}{2}\right]_0^T = \underline{\underline{\frac{\hat{u}}{2}}}$

$\underline{\underline{u_{eff}}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{\hat{u}}{T} t\right)^2 \cdot dt} = \sqrt{\left[\frac{\hat{u}^2}{T^3} \cdot \frac{t^3}{3}\right]_0^T} = \underline{\underline{\frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}}}$ vgl.

$\underline{\underline{|\bar{u}| = \frac{\hat{u}}{2}}}$ hier wie $\underline{\bar{u}}$, da nur positive Fktns.-werte

zu c.) $\underline{\underline{\bar{\jmath}}} = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} 2\hat{\jmath} \cdot dt = \left[\frac{1}{T} \cdot 2\hat{\jmath} \cdot t\right]_0^{T/2} = \underline{\underline{\hat{\jmath}}}$

urspr. Amplitude

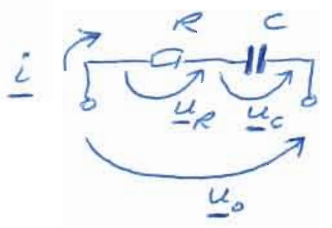
$\underline{\underline{\jmath_{eff}}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{T/2} (2\hat{\jmath})^2 \cdot dt} = \sqrt{\left[\frac{1}{T} \cdot 4\hat{\jmath}^2 \cdot t\right]_0^{T/2}} = \underline{\underline{\sqrt{2} \cdot \hat{\jmath} = \frac{2\hat{\jmath}}{\sqrt{2}}}}$

vgl.

$\underline{\underline{|\bar{\jmath}| = \hat{\jmath}}}$ hier wie $\underline{\bar{\jmath}}$, da nur positive Fktns.-werte

7.2) R-C-Schaltungen (Zeigerbilder für U, I / Kompl. Wid.)

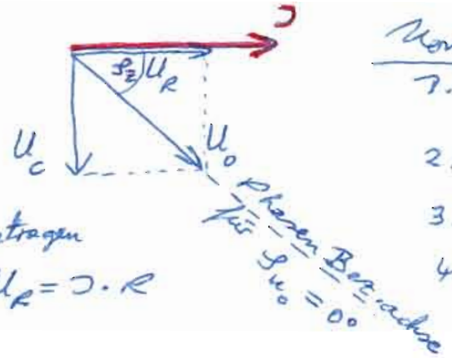
a.)



$\underline{i}_C = \underline{i}_R = \underline{i}$

$\underline{u}_R + \underline{u}_C = \underline{u}_0$ $\qquad u_R \perp u_C$

Zeigerbild:



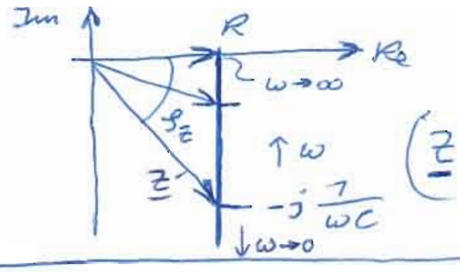
Konstruktion:
1. mit $\underline{i}$ (als gemeinsame Größe) beginnen
2. $\underline{u}_R$, $\underline{u}_C$ einzeichnen
3. $\underline{u}_R + \underline{u}_C = \underline{u}_0$
4. Phasenbezugsachse einzeichnen

hier Eff-werte eingetragen

$U_C = \frac{I}{\omega C}$, $U_R = I \cdot R$

$\varphi_Z = \varphi_{u_0} - \varphi_i$ ist hier negativ, dh. i eilt u_0 voraus $\hat{=}$ kapaz. Verhalten

Komplexe Wid.-ebene:



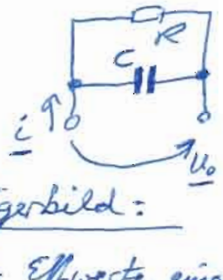
$\boxed{\underline{Z} = R + jX}$ Reihenschaltung

$= R + \frac{1}{j\omega C}$

$= R - j \cdot \frac{1}{\omega C}$

---

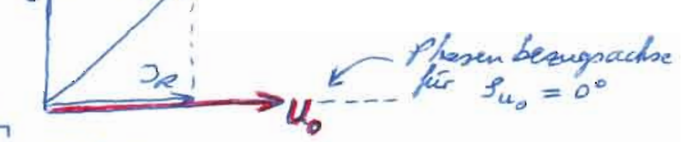
b.)



$\underline{u}_C = \underline{u}_R = \underline{u}_0$ (gemeinsame Größe zu Beginn der Konstruktion)

$\underline{i} = \underline{i}_R + \underline{i}_C$

Zeigerbild:



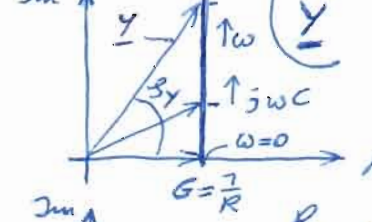
hier Eff-werte eingetr.

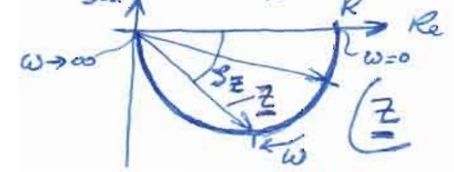
$I = U_0 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C)^2} = U_0 \cdot |\underline{G}|$

Kompl. Wid.-/Leitwertebene:

$\boxed{\underline{Y} = G + j \cdot B}$ Parallelschaltg.

$= G + j\omega C$





Zur Inversion der $\underline{Y}$-Ortskurve

$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{|\underline{Y}| \cdot e^{j\varphi_Y}} = \frac{1}{|\underline{Y}|} \cdot e^{j(-\varphi_Y)}$

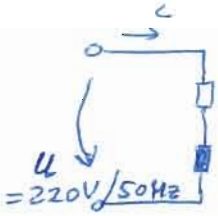
dh.: $\boxed{|\underline{Z}| = \frac{1}{|\underline{Y}|}}$ und $\boxed{\varphi_Z = -\varphi_Y}$

Reziprokwert $\qquad$ Vz.-Umkehr der Phase Y

3 Blätter

7.3) Ersatzschaltbild einer Spule / R-L-Reihenschaltung, u, i, P

geg:



$\varphi_u = 30°$

Annahme: $u(t) = \hat{U}\cdot\cos(\omega t + 30°)$

φ_u - Nullphasenwinkel der Spannung

ges:

$\underline{i}$, $\hat{\imath}$, $i(t)$

u_R, u_L

Zeigerbild aller Spannungen u. Ströme

(Ortskurve $\underline{Z}$)

P_W, Q, S

Scheinwiderstand $|\underline{Z}| = Z$

nach Maschensatz gilt:

$$\left.\begin{aligned}\underline{u} &= \underline{u}_R + \underline{u}_L\\ \underline{u} &= \underline{i}\cdot R + j\omega L\cdot\underline{i}\end{aligned}\right\} \text{mit } \underline{u}_R = \underline{i}\cdot R, \quad \underline{u}_L = L\cdot\frac{d\underline{i}}{dt} = L\cdot j\omega\cdot\underline{i}$$

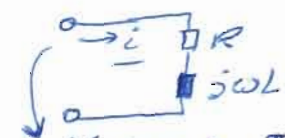
(Differenzieren von $\underline{i}$ $\hat{=}$ Multiplik. mit $j\omega$)

ev. gleich hier beginnen:

$$\underline{i} = \frac{\underline{u}}{R + j\omega L}$$

$\hat{=}$ Darstellung mit Widerstandsoperatoren, die aus $\underline{i} = \frac{\underline{u}}{\underline{Z}}$ entsteht.

Dies ist die Transformation in den Bildbereich; aus dem angegebenen Schaltbild entsteht dann:



$$\underline{u} = \hat{U}\cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)} \xLeftarrow{\text{Transf.}} u(t) = \hat{U}\cdot\cos(\omega t + \varphi_u)$$

$$\underline{i} = \frac{\hat{U}\cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)}}{\underbrace{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}_{\text{Betrag}}\cdot e^{j\underbrace{\arctan\frac{\omega L}{R}}_{\text{Phase } \varphi_Z}}}$$

(jeweils des Nenners)

Jetzt in der Form $\boxed{\underline{i} = |\underline{i}|\cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)}}$ schreiben:

$$\underline{i} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\cdot e^{j\overbrace{(\omega t + \varphi_u - \underbrace{\arctan\frac{\omega L}{R}}_{\varphi_Z})}^{\varphi_i}}$$

$\boxed{\text{Lösung im Komplexen}}$ (φ_Z positiv!)

Amplitude $\quad \hat{\imath} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{220V\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{20^2 + (2\pi\cdot\frac{50}{s}\cdot 0{,}2\frac{Vs}{A})^2}} = 4{,}72\,A$

Phasenwinkel den die Schaltung erzeugt, dh. aus $\underline{Z}$ $\quad \varphi_Z = \arctan\frac{\omega L}{R} = \arctan\frac{2\pi\cdot 50\,s^{-1}\cdot 0{,}2\frac{Vs}{A}}{20\,\Omega} = 72{,}34°$

φ_Z positiv: dh. u eilt i voraus!

Phasenwinkel des Stromes i $\quad \varphi_i = \varphi_u - \varphi_Z = 30° - 72{,}34° = -42{,}34°$

unter Berücksichtigung des Nullphasenwinkel der Spannung mit Spannungsteilerregel:

für u_R: $\dfrac{\underline{u}_R}{\underline{u}} = \dfrac{R}{\underline{Z}} \curvearrowright \underline{u}_R = \dfrac{R \cdot \hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)}}{R + j\omega L} = \dfrac{R \cdot \hat{U} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \cdot e^{j\left(\arctan \frac{\omega L}{R}\right)}}$

Lösung im Komplexen: $\underline{u}_R = \dfrac{R \cdot \hat{u}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cdot e^{j\left(\omega t + \varphi_u - \arctan \frac{\omega L}{R}\right)}$

$\curvearrowright$ Amplitude $\hat{U}_R = \dfrac{R \cdot \hat{u}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \dfrac{20\,\Omega \cdot 220\,V \cdot \sqrt{2}}{65{,}94\,\Omega} = 94{,}3\,V$

bzw. Effektivwert $U_R = \dfrac{\hat{u}_R}{\sqrt{2}} = 66{,}7\,V$

für u_L: $\dfrac{\underline{u}_L}{\underline{u}} = \dfrac{j\omega L}{\underline{Z}} \curvearrowright \underline{u}_L = \dfrac{j\omega L \cdot \hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)}}{R + j\omega L}$

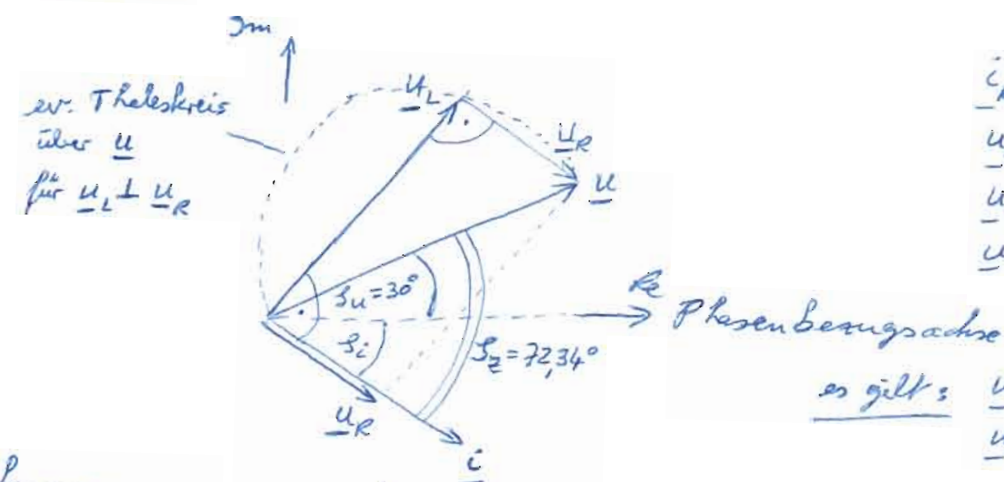
$j \equiv$ Phasendrehung um $+90°$

Lösung im Komplexen: $\underline{u}_L = \dfrac{\omega L \cdot \hat{u}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cdot e^{j\left(90° + \omega t + \varphi_u - \arctan \frac{\omega L}{R}\right)}$

$\curvearrowright$ Amplitude $\hat{U}_L = \dfrac{2\pi \cdot 50\,s^{-1} \cdot 0{,}2\,\frac{As}{V} \cdot 220\,V \cdot \sqrt{2}}{65{,}94\,\Omega} = 296{,}42\,V$

bzw. Eff.wert $U_L = \dfrac{\hat{U}_L}{\sqrt{2}} = 209{,}6\,V$

Zeigerbild:



$\underline{i}_R = \underline{i}_L = \underline{i}$

$\underline{u}_R \parallel \underline{i}$

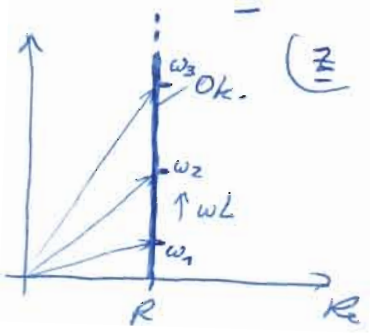
$\underline{u}_L \perp \underline{i}$

$\underline{u}_L + \underline{u}_R = \underline{u}$

es gilt: $\underline{u}_L = j\omega L \cdot \underline{i}_L$

$\underline{u}_R = R \cdot \underline{i}$

Ortskurve:



$\underline{Z} = R + j\omega L$

$\curvearrowright$ Ortskurve für $\underline{Z} = f(\omega)$

zu 7.3)

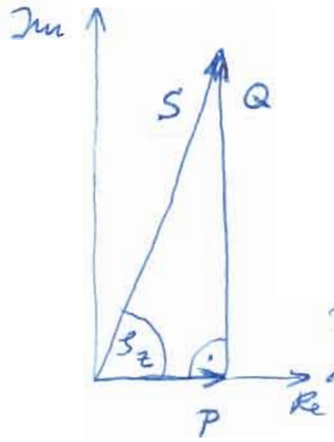
Leistungen: hier Rechnung mit Effektivwerten für U und I (!)

$$\underline{\underline{S}} = U \cdot I = 220\,V \cdot \underbrace{3{,}34\,A}_{\text{aus } \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}} = \underline{\underline{734{,}8\,VA}}$$ Scheinleistung

$$\underline{\underline{P}} = U \cdot I \cdot \cos \varphi_Z = S \cdot \cos(72{,}34°) = \underline{\underline{222{,}9\,W}}$$ Wirkleistung

$$\underline{\underline{Q}} = U \cdot I \cdot \sin \varphi_Z = S \cdot \sin(72{,}34°) = \underline{\underline{700{,}17\,var}}$$ Blindleistung

positiv, d.h. wirkt induktiv



Zeigerdiagramm der Leistungen

(!) Beachten der Angabe verschiedener Leistungs-Einheiten

Scheinwiderstand

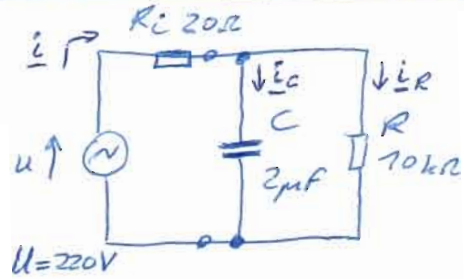
$$\underline{Z} = R + j\omega L \quad \curvearrowright \quad \underline{\underline{|\underline{Z}| = Z}} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \underline{\underline{65{,}94\,\Omega}}$$

Scheinwiderstand bestimmbar aus U-I-Messung unabhängig voneinander, d.h. ohne Berücksichtigung der Phaseninformation (!)

d.h.: $Z = \dfrac{U}{I}$ z.B. aus Effektivwerten

7.4.) Komplexe Rechnung ... $|\underline{Z}|$, I_{Ri}, φ_Z, komplex. Stromteiler, S, Zeigerbild

a.)



$U = 220V$

$u(t) = \hat{U} \cdot \sin \omega t$, $f = 50\,Hz$, Phasen∢ $\varphi_u = 0$

b.) $$\underline{Z} = R_i + R \,\|\, \frac{1}{j\omega C} = R_i + \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = R_i + \frac{R}{R \cdot j\omega C + 1}$$

(!) ⟹ um $\underline{Z}$ in die Form $\underline{Z} = R + j \cdot X$ zu bringen, Umformung

Wirkwid. Blindwid.

dh. $\boxed{\text{Entfernen des } j \text{ aus dem Nenner}}$ zB:

durch Multiplikation mit konjugiert komplexem Nennerausdruck in Zähler u. Nenner

damit: $$\underline{Z} = R_i + \frac{R \cdot (1 - j\omega CR)}{(1 + j\omega CR)(1 - j\omega CR)} = R_i + \frac{R - j\omega CR^2}{1 + (\omega CR)^2}$$

$$\Rightarrow \underline{Z} = \underbrace{R_i + \frac{R}{1 + (\omega CR)^2}}_{\boxed{Re\{\underline{Z}\}}} - j \underbrace{\frac{\omega CR^2}{1 + (\omega CR)^2}}_{\boxed{Im\{\underline{Z}\}}} = R - jX$$

neg. Im.-Anteil ≙ kapazitiver Wid.

Damit Scheinwiderstand:

$$|\underline{Z}| = Z = \sqrt{\left(R_i + \frac{R}{1 + (\omega CR)^2}\right)^2 + \left(\frac{(\omega CR)^2}{1 + (\omega CR)^2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(20 + \frac{10^4}{1 + (2\pi \cdot 50 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4)^2}\right)^2 + \left(\frac{2\pi \cdot 50 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^8}{1 + (2\pi \cdot 50 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4)^2}\right)^2} \cdot \Omega$$

$$Z = |\underline{Z}| = 1575\,\Omega$$

c.) Strom durch R_i:

$$I_{Ri} = I_{ges} = \frac{U}{Z} = \frac{220V}{1575\Omega} = 0{,}14A$$ als Effektivwert

$$\hat{I}_{Ri} = \sqrt{2} \cdot I_{Ri} = 0{,}197A$$ als Spitzenwert (Amplitude)

d.) Phasen∢ zwischen Spannung und Strom:

$\boxed{\text{allg.:}}$ ist $\varphi_z > 0$ bei induktiver Wirkung, u eilt i voraus

ist $\varphi_z < 0$ bei kapazitiver Wirkung, u eilt i nach

./.

$$\varphi_Z = \arctan \frac{\mathrm{Im}\{\underline{Z}\}}{\mathrm{Re}\{\underline{Z}\}}$$

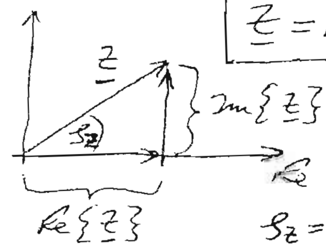
$$= \arctan \frac{-\omega C R^2 \cdot \cancel{[1+(\omega C R)^2]}}{\cancel{[1+(\omega C R)^2]} \cdot [R_i(1+(\omega C R)^2)+R]}$$

$$= \arctan \frac{-\omega C R^2}{R+R_i+R_i(\omega C R)^2}$$

$$\underline{\underline{\varphi_Z}} = \arctan\left(-\frac{2\pi \cdot 10^4}{10809{,}57}\right) = -\arctan 5{,}8126 = \underline{\underline{-80{,}24^\circ}} \quad (\text{kapazitiv})$$

dh. $\underline{u}$ eilt $\underline{i}$ nach!

$\boxed{\underline{Z} = \mathrm{Re}\{\underline{Z}\} + j\,\mathrm{Im}\{\underline{Z}\}}$



$$\tan\varphi_Z = \frac{\mathrm{Im}\{\underline{Z}\}}{\mathrm{Re}\{\underline{Z}\}} \;\Downarrow\; \underline{\underline{\varphi_Z = \arctan \frac{\mathrm{Im}\{\underline{Z}\}}{\mathrm{Re}\{\underline{Z}\}}}}$$

$$\mathrm{Re}\{\underline{Z}\} = |\underline{Z}| \cdot \cos\varphi_Z$$

$$\mathrm{Im}\{\underline{Z}\} = |\underline{Z}| \cdot \sin\varphi_Z$$

e.) Strom durch C nach Stromteiler-Regel:

$$\frac{\underline{i}_C}{\underline{i}} = \frac{R \,||\, \frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C}} = \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{\left(\frac{1}{j\omega C}\right)\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$\underline{i}_C = \underline{i} \cdot \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

jetzt Angabe als Effektivwert I_C durch Einsetzen des Eff.wertes von $I_{ges} = 0{,}14\,A$: (dh. Weiterrechnen mit dem (komplexen) Effektivwert! und Betragsbildung)

$$\Rightarrow I_C = |\tilde{\underline{I}}_C| = |\tilde{\underline{I}}| \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

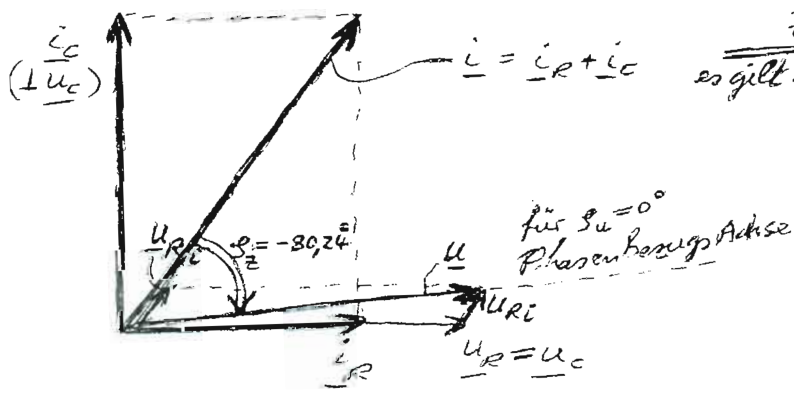
$$\underline{\underline{I_C}} = 0{,}14\,A \frac{10^4\,\Omega}{\sqrt{10^8\,\Omega^2 + \frac{10^8\,\Omega^2}{4\pi^2}}} = \underline{\underline{138{,}26\,mA}} \quad \text{Eff.-wert}$$

dh. $I_C \approx I_{ges}$: fast der gesamte Strom fließt durch C!

f.) Scheinleistung:

$$\underline{\underline{S}} = U \cdot I = I^2 \cdot Z = (0{,}14\,A)^2 \cdot 1575\,\frac{V}{A} = \underline{\underline{30{,}87\,VA}}$$

g.)



Zeigerbild für U und I

es gilt: $\underline{u}_R = \underline{u}_C$ (Beginn der Zeichnung)

$\underline{i}_R \parallel \underline{u}_R$

$\underline{i}_C \perp \underline{u}_C$

$\underline{i} = \underline{i}_{Ri} = \underline{i}_C + \underline{i}_R$ (vektorielle Zeigeraddition)

$\underline{u}_{Ri} \parallel \underline{i}_{Ri}$

$\underline{u} = \underline{u}_{Ri} + \underline{u}_R$ (vektorielle Zeigeraddition)

~~8.2~~

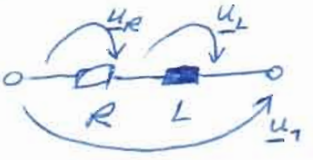
8.1) **geg:** Spule, bei Wechselspannung $U_1 = 220\,V$, fließt Strom $I_1 = 2{,}32\,A$ } $f = 50\,Hz$ Effektivwerte!

bei Gleichspannung $U_0 = 100\,V$, fließt Strom $I_0 = 2{,}5\,A$ } Gleichgrößen!

ges: L, φ_L, φ bei Parallelschaltung $C = 10\,\mu F$, Kompens., Ok, Lstg.

---

a.) **ESB:**



$$\underline{Z} = R + j\omega L$$

$$|\underline{Z}| = Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad \text{wobei} \quad Z = \frac{U_1}{I_1} \ (\text{Wechselgrößen})$$

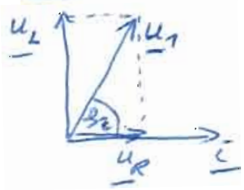
bei Gleichspannungsmessung wirkt $R = \dfrac{U_0}{I_0} = \dfrac{100V}{2{,}5A} = 40\,\Omega$

$$\curvearrowright L = \sqrt{\frac{Z^2 - R^2}{\omega^2}} = \sqrt{\frac{Z^2 - \left(\frac{U_0}{I_0}\right)^2}{\omega^2}}$$

$$L = \frac{1s}{2\pi \cdot 50} \cdot \sqrt{\left(\frac{220V}{2{,}32A}\right)^2 - \left(\frac{100V}{2{,}5A}\right)^2} = 0{,}27\,\frac{Vs}{A} = 0{,}27\,H$$

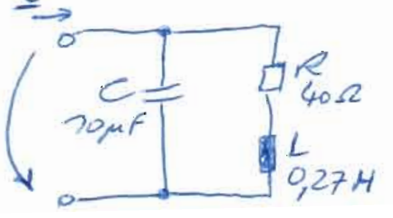
b.) **Phasen $\sphericalangle\ \varphi_Z$:**

$$\varphi_Z = \arctan \frac{Im\{\underline{Z}\}}{Re\{\underline{Z}\}} = \arctan \frac{\omega L}{R} = \arctan \frac{2\pi \cdot 50 s^{-1} \cdot 0{,}27 Vs}{40\,\Omega \quad A} = 64{,}75°$$



Zeigerbild

c.) **Parallelschaltung C:** günstig mit Leitwertbetrachtung



$$\underline{Y} = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L}$$ konjugiert komplexe Erweiterung

$$= j\omega C + \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$$ Hauptnenner

$$\underline{Y} = \frac{R + j\left[\omega C\left(R^2 + (\omega L)^2\right) - \omega L\right]}{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$\varphi_y = \arctan \frac{\omega C(R^2+(\omega L)^2) - \omega L}{R}$$ = Phasen∢ des kompl. Leitwerts!

$$\underline{\underline{\varphi_y}} = \arctan \frac{2\pi f}{R}\left[C\left(R^2+(\omega L)^2\right) - L\right] = \underline{\underline{-55{,}03°}}$$

dies ist Phasenverschiebung zwischen I und U

Für Phasen∢ des kompl. Widerstands φ_Z: Vorzeichenumkehr!

$\Rightarrow$ Ph.-verschiebg. zw. U und I ist φ_Z:

$$\underline{\underline{\varphi_Z = -\varphi_y = 55{,}03°}}$$ wirkt induktiv! bei $f = 50\,Hz$!

d.h. nur geringfügige Verringerung von φ_Z!

d.) **C = ?, um $\varphi_Z' = 25°$ zu erhalten:**

mit $$\varphi_Z' = -\arctan \frac{\omega C\left(R^2+(\omega L)^2\right) - \omega L}{R}$$ Phasen∢ des kompl. Widerstands

Umformen nach C

$$\Rightarrow \frac{R}{\omega}\tan \varphi_Z' = C\left(R^2+(\omega L)^2\right) - L$$

$$C = \frac{\frac{R}{\omega}\cdot\tan\varphi_Z' + L}{R^2+(\omega L)^2} = \frac{\frac{40\,\Omega\cdot s}{100\pi}\cdot 0{,}466 + 0{,}27\,\frac{Vs}{A}}{1600\,\Omega^2 + 7194{,}94\,\Omega^2}$$

$$\underline{\underline{C = 37{,}45\,\mu F}}$$

e.) **hierfür Strom der ges. Schaltung:**

$$I = \frac{U}{Z}$$

$$\underline{Z} = (R+j\omega L)\,\|\,\frac{1}{j\omega C} = \frac{(R+j\omega L)\cdot\frac{1}{j\omega C}}{R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}}$$

$$= \frac{R+j\omega L}{j\omega CR + j^2\omega^2 LC + 1}$$ $j^2 = -1$

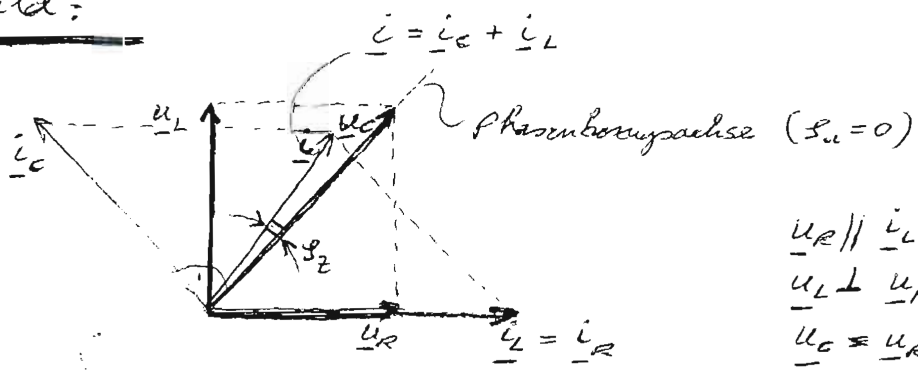
$$\underline{Z} = \frac{R+j\omega L}{1-\omega^2 LC + j\omega CR}$$

(*) für g.) in Form $\underline{Z} = R + jX$ bringen... (ff.)

$$|\underline{Z}| = Z = \frac{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}{\sqrt{(1-\omega^2LC)^2+(\omega CR)^2}} = \ldots = \underline{\underline{200\,\Omega}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{I = \frac{U}{Z}}} = \frac{220\,V}{200\,\Omega} = \underline{\underline{1{,}1\,A}}$$ Effektivwerte

Zeigerbild:



$\underline{u}_R \parallel \underline{i}_L$; $\underline{i}_R = \underline{i}_L$

$\underline{u}_L \perp \underline{u}_R$ bzw $\underline{i}_L$

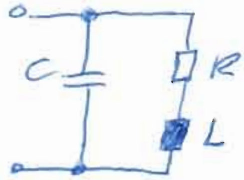
$\underline{u}_C = \underline{u}_R + \underline{u}_L = \underline{u}$

$\underline{i}_C \perp \underline{u}_C$

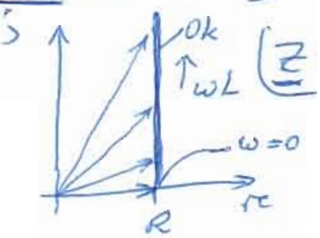
$\underline{i} = \underline{i}_{ges} = \underline{i}_C + \underline{i}_L$

φ_Z hier negativ (i voreilend geg. $\underline{u}$)
dies gilt bei höheren Frequenzen!
$\Rightarrow$ kapazitives Verhalten

f) Ortskurve $\underline{Z} = f(\omega)$, Zeigerbild aller U u. I



Beginn mit $\underline{Z} = R + j\omega L$



Für Parallelschaltung von C Überführung in Leitwertdarstellung der R-C-Schaltung erforderlich:

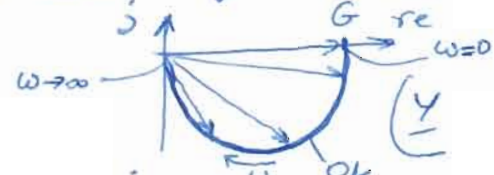
Dh.: Ausführung der Inversion der Ortskurve:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{|\underline{Z}| \cdot e^{j\varphi_z}} = \frac{1}{|\underline{Z}|} \cdot e^{j(-\varphi_z)}$$

Reziprokwertbildg. vom Betrag

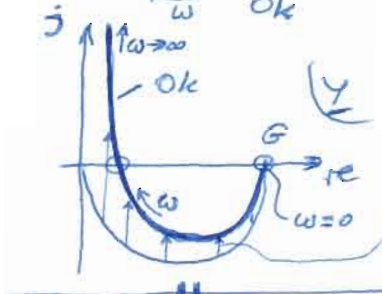
Vorzeichenumkehr des Phasen∢

Inversion $\Downarrow$



$G = \frac{1}{R}$

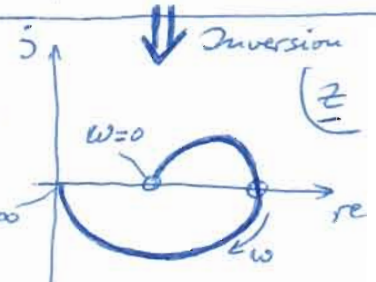
hierzu Addition des kapaz. Leitwerts $j\omega C$ (frequenzabhängig!)



jeweils frequenzabhängige Addition von $j\omega C$!

Abschließend Rückführung in die Widerstandsdarstellung dh. nochmalige Inversion

$\Downarrow$ Inversion



g.) Wirk- / Blind- / Scheinwiderstand $Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2} = \dots$

aus ⊛: $\underline{Z} = \dfrac{(R + j\omega L)\left[(1-\omega^2 LC) - j\omega CR\right]}{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}$ ← nach konjugiert komplexer Erweiterung ...

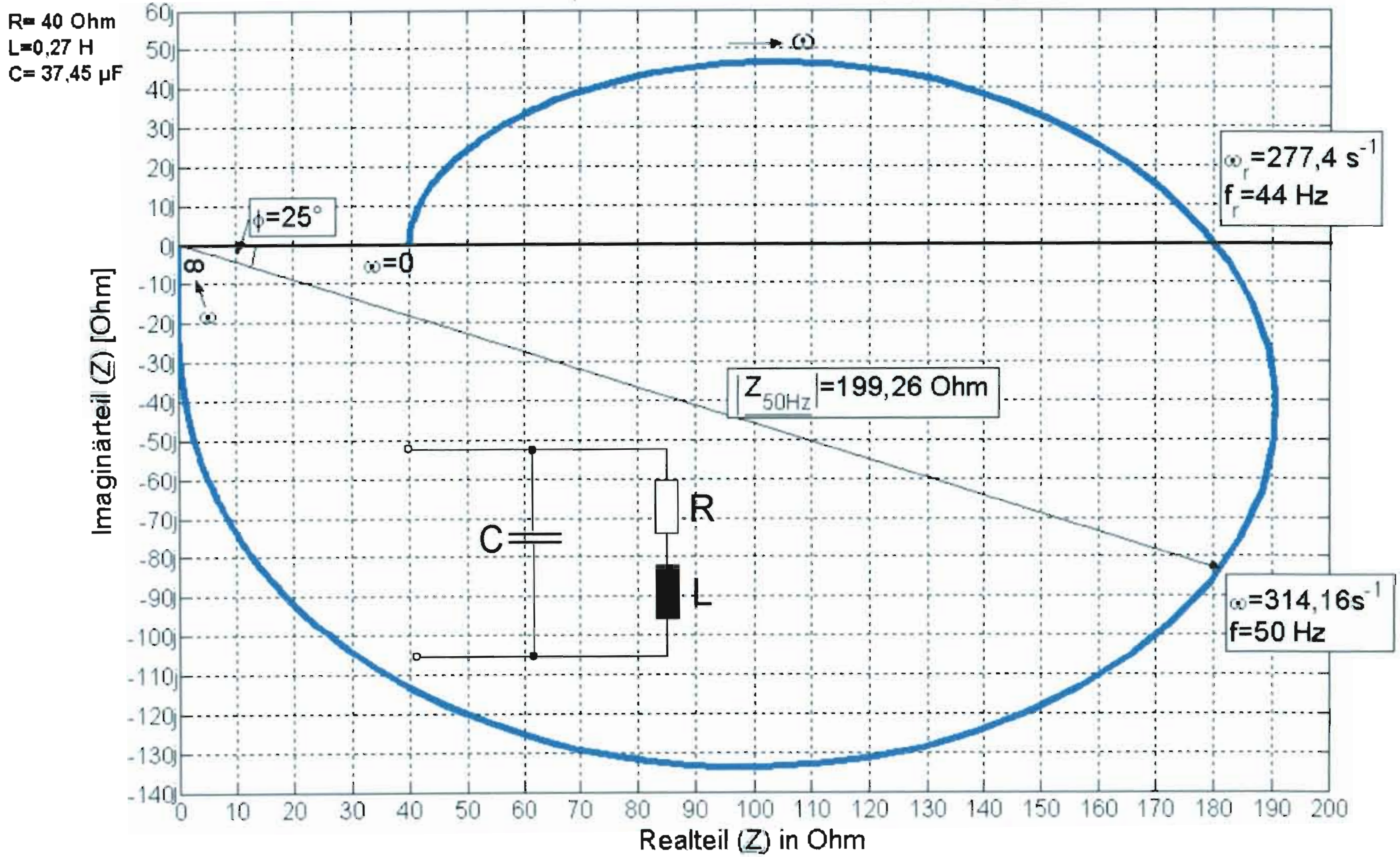
$$= \frac{R(1-\omega^2 LC) + \omega^2 LCR}{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2} + j\,\frac{\omega L(1-\omega^2 LC) - \omega CR^2}{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}$$

dh.: $\underline{Z} = \underbrace{\qquad}_{R} + j \cdot \underbrace{\qquad}_{X}$

Wirkwiderstand R   Blindwiderstand X

8.1

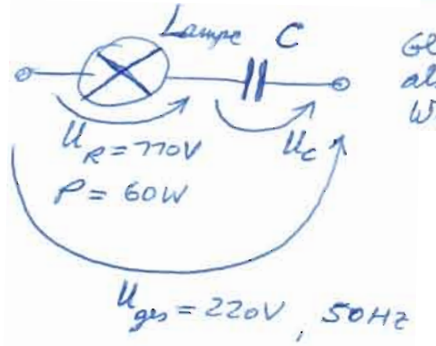
Übung 9 - Aufgabe 8.2. f) - Ortskurve Z=f(ω) (Parallelschwingkreis)



Kraitl, 06/08

~~8.3~~

8.2) geg: Glühlampe mit Vorschaltkondensator



Glühlampe wirkt als ohmscher Widerstand R

Bem: Lampenwiderstand R aus $P = \frac{U_R^2}{R}$

$\Rightarrow \underline{\underline{R}} = \frac{U_R^2}{P} = \frac{(110V)^2}{60\,VA} = \underline{\underline{202\,\Omega}}$

("Brennwiderstand")

ges: C, damit Lampe mit $U_{ges} = 220V$ betrieben wird ?, dh. C soll als kapazitiver Vorwiderstand wirken

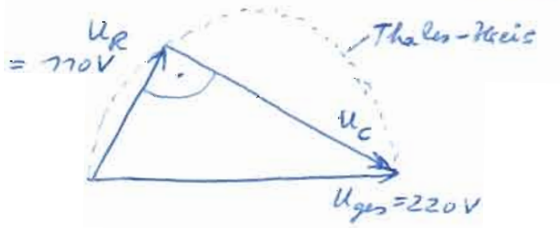
$$\frac{\underline{U}_R}{\underline{U}_{ges}} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\text{Betrag:}} \quad \frac{U_R}{U_{ges}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

nur Betrag $|\underline{U}_R|$ ist hier interessant!, nicht der Phasen $\sphericalangle$

$$R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2 = \left(R \frac{U_{ges}}{U_R}\right)^2$$

$$\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2 = R^2 \left[\left(\frac{U_{ges}}{U_R}\right)^2 - 1\right]$$

Zeigeraddition von $\underline{U}_R$ und $\underline{U}_C$ (!)



$$\Rightarrow C = \frac{1}{\omega R} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{U_{ges}}{U_R}\right)^2 - 1}}$$

$$\underline{\underline{C = 9{,}11\,\mu F}}$$

Spannungsabfall über C : (zur Veranschaulichung der vektoriellen Zeigeraddition)

$$\frac{\underline{U}_C}{\underline{U}_{ges}} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega CR}$$

$\underline{\text{Betrag:}}$ $\frac{U_C}{U_{ges}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}$ $\Rightarrow U_C = \frac{U_{ges}}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}$

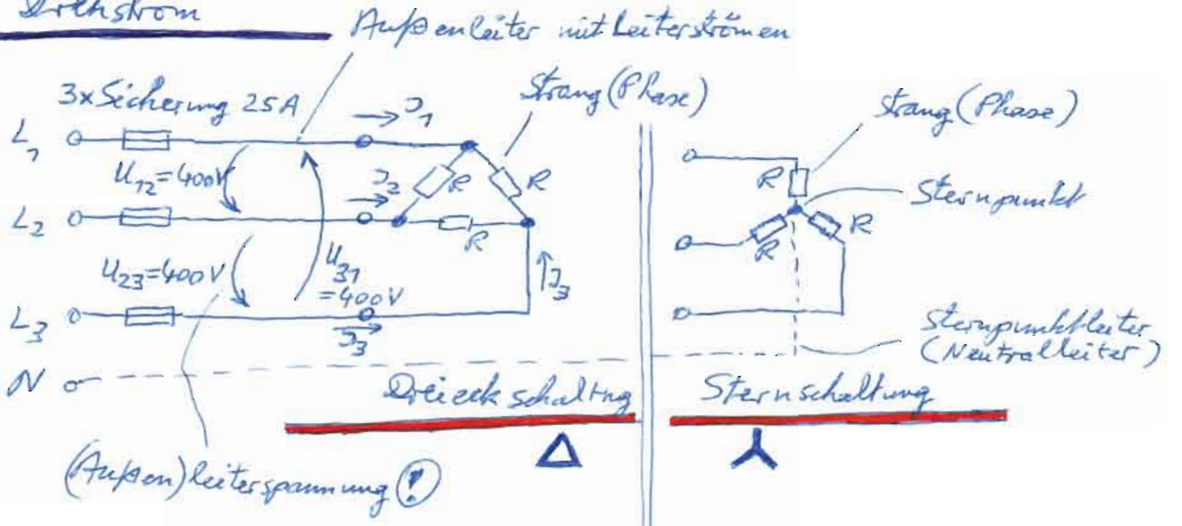
$$\underline{\underline{U_C = 190{,}54V}} \quad \text{Eff-wert}$$

Kapazitiver Widerstand :

$$\underline{\underline{X_C}} = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \cdot 50s^{-1} \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-6} As} \frac{V}{} = \underline{\underline{349\,\Omega}}$$

9.1) Drehstrom

Allg.:



Leiterspannung $U_{Leiter} = U_{12} = U_{23} = U_{31} = 400V$

	Dreieckschaltung Δ	Sternschaltung ⅄
	$U_{Strang} = U_{Leiter}$	$\sqrt{3}\, U_{Strang} = U_{Leiter}$
	$\sqrt{3}\, I_{Strang} = I_{Leiter}$	$I_{Strang} = I_{Leiter}$
Wirk-leistung:	$\boxed{P_\Delta = 3 \cdot U_{Strang} \cdot I_{Strang} \cdot \cos\varphi}$ gilt bei symm. Belastg.	$\boxed{P_\lambda = 3\, U_{Strang} \cdot I_{Strang} \cos\varphi}$ gilt bei symm. Belastung
Spez. Fall Ohmsche Last R (symm. Belastung):	$\underline{\underline{P_\Delta}} = 3 \frac{U_{Leiter}^2}{R} = \underline{\underline{3\, P_\lambda}}$ mit $I_{Leiter_\Delta} = \frac{U_L}{R}\sqrt{3}$	$\underline{\underline{P_\lambda}} = 3 \frac{\left(\frac{U_{Leiter}}{\sqrt{3}}\right)^2}{R} = \frac{U_{Leiter}^2}{R} = \underline{\underline{\frac{P_\Delta}{3}}}$ mit $I_{Leiter_\lambda} = \frac{U_L}{\sqrt{3} R}$ weil Strangspang. hier um $\frac{1}{\sqrt{3}}$ geg. U_L geringer ist!

zB. Motoreneinschalten: $P_\lambda = \frac{P_\Delta}{3}$ hieraus: $\boxed{\lambda \to \Delta - \text{Umschaltung}}$ (Anlauf → Vollast)

(!) da entweder Leiterstrom oder Leiterspannung um den Faktor $\sqrt{3}$ größer ist, als die zugehörige Stranggröße

↷ Einheitliche Beziehung für P_Δ und P_λ, dargestellt durch die (Außen) Leitergrößen:

mit $P = 3\, U_{Strang} \cdot I_{Strang} \cdot \cos\varphi$

mit Faktorumformung $\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \underline{\underline{\sqrt{3}}}$

Wirkleistung ↷ $\boxed{P = \sqrt{3} \cdot U_{Leiter} \cdot I_{Leiter} \cdot \cos\varphi}$

Vorteil: einfache Meßbarkeit der Leiterspang u. des Leiterstroms!

allg. gilt: (!) Bei symm. Belastung wird die Leistung zeitlich konstant an den Verbraucher geliefert!

(!) Bei symm. Belastung ist der Strom im Sternpunktleiter $= 0$ und die Spang $= 0$ ("Neutral" = Massepotenzial)

Zur Aufgabe:

9.1) geg: 3x AC 50 Hz, 400 V ; jeder Leiter mit 25 A abgesichert (dh., es soll $I_L = 25\,A$ fließen!)

a.) P_W wobei $\cos\varphi = 1$ ($\varphi = 0°$): reine Wirkleistung!

jeweils gleiches Ergebnis

- $U_L = 400\,V = U_{Str.}$
  $I_{Str.} = \frac{I_L}{\sqrt{3}} = \frac{25\,A}{\sqrt{3}}$
  $I_{Str} = 14{,}43\,A$
  für Δ-Schaltung
  $P_W = 3\,U_{Str.} \cdot I_{Str.} = 3 \cdot 400\,V \cdot 14{,}43\,A$
  $P_W = 17{,}32\,kW$

- $U_{Str} = \frac{U_L}{\sqrt{3}} = \frac{400\,V}{\sqrt{3}} = 230\,V$
  $I_{Str.} = 25\,A = I_L$
  für λ-Schaltung
  $P_W = 3\,U_{Str.} \cdot I_{Str.} = 3 \cdot 230\,V \cdot 25\,A$
  $P_W = 17{,}32\,kW$

- [weiterhin Vgl. mit „Einheitl. Beziehung“ $P_W = \sqrt{3}\,U_{Leiter} \cdot I_{Leiter} \cdot \underbrace{\cos\varphi}_{=1}$, $P_W = 17{,}32\,kW$]

=

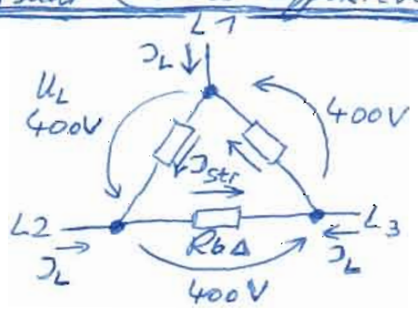
b.) Strangwiderstand $R_{a\lambda}$

aus λ-Schaltung. $R_{a\lambda} = \frac{U_{Str.}}{I_{Str}} = \frac{U_L/\sqrt{3}}{25\,A} = \frac{230\,V}{25\,A} = 9{,}2\,\Omega$

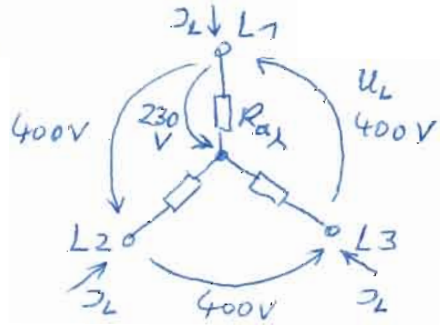
c.) Strangwiderstand $R_{b\Delta}$

aus Δ-Schaltung $R_{b\Delta} = \frac{U_{Str.}}{I_{Str.}} = \frac{U_L}{I_L/\sqrt{3}} = \frac{400\,V}{14{,}43\,A} = 27{,}7\,\Omega$

hierzu Übersicht (alles Effektivwerte!):



I_L jeweils 25 A ; $I_{Str.} = \frac{I_L}{\sqrt{3}}$
$U_L = U_{Str} = 400\,V$



I_L jeweils $25\,A = I_{Str}$
$U_{Str} = \frac{U_L}{\sqrt{3}} = 230\,V$

Strombelastung auf Leitern (Außenleiterströme)

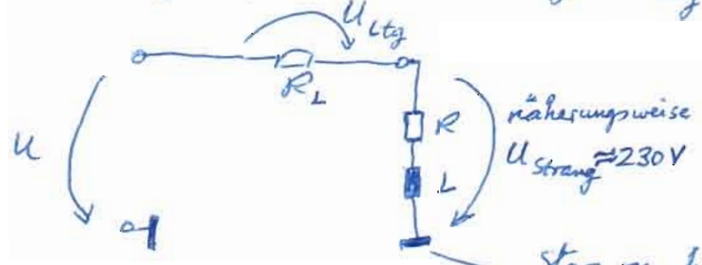
9.2) **geg:** Drehstromverbraucher ($400\,V$, $P = 16{,}5\,kW$, $\cos\varphi = 0{,}8$)
ist mit Mehrader-Cu-Leitung mit max. Spannungsabfall von 3% zu versorgen $\quad \varkappa_{Cu} = 56\,\frac{S\cdot m}{mm^2}$ [Siemens]

ges: Leitungsquerschnitt bei Leitungslänge $l = 30\,m$
— " — $l = 120\,m$

Betrachtung für $\curlywedge$-Schaltung:

$U_{Strang} = 230\,V$ $\quad I_{Strang} = I_{Leiter}$

Spannungsabfall auf Leitung U_{Ltg}



(nach Wid-Bemessungsgleichung)

$$\underline{\underline{U_{Ltg}}} = U - U_{Strang} = R_L \cdot I_{Leiter}$$

$$\text{dh.: } \underline{\underline{U_{Ltg} = \frac{l}{\varkappa A} \cdot I_{Leiter}}}$$

Sternpunkt liegt auf Potenzial $= 0\,V$!
bei symm. Belastung

$$\Rightarrow A = \frac{l \cdot I_{Leiter}}{\varkappa \cdot U_{Ltg}} \qquad \text{mit } U_{Ltg} = 0{,}03 \cdot U_{Strang}$$

(3%)

(dh. auf 3% U_{Strang} bezogen)

$$\underline{\underline{A = \frac{l \cdot I_{Leiter}}{\varkappa \cdot U_{Strang} \cdot 0{,}03}}}$$

Genormte DIN-Leitungsquerschnitte:
$1{,}5\,mm^2$ ← Wohnung
2,5
4
6
10
16
25
$35\,mm^2$ ...

– Tabelle –

a.) rein ohmsche Belastung ($\cos\varphi = 1$): mit $I = \frac{P}{U}$ ⇒

$$\underline{\underline{I_{Strang}}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{P}{U_{Strang}} = \frac{1}{3}\,\frac{16{,}5\,kW}{230\,V} = \underline{\underline{23{,}91\,A}}$$

mit $I_{Strang} = I_{Leiter}$ ⇒

$$\underline{\underline{A\Big|_{30m}}} = \frac{30\,m \cdot 23{,}91\,A \cdot V \cdot mm^2}{230\,V \cdot 0{,}03 \cdot 56\,A \cdot m} = \underline{\underline{1{,}86\,mm^2}}$$

$$\underline{\underline{A\Big|_{120m}}} = \frac{120\,m \cdot \sim}{\sim} = \underline{\underline{7{,}44\,mm^2}}$$

b.) bei komplexer Belastung ($\cos\varphi = 0{,}8$): wegen $P = U \cdot I \cdot \cos\varphi$ ⇒

$$\underline{\underline{I_{Strang}}} = \frac{1}{3}\,\frac{P}{U_{Strang} \cdot \cos\varphi} = \frac{16{,}5\,kW}{3 \cdot 230\,V \cdot 0{,}8} = \underline{\underline{29{,}89\,A}}$$

mit $I_{Strang} = I_{Leiter}$ ⇒

$$\underline{\underline{A\Big|_{30m}}} = \frac{30\,m \cdot 29{,}89\,A \cdot V \cdot mm^2}{230\,V \cdot 0{,}03 \cdot 56\,A \cdot m} = \underline{\underline{2{,}33\,mm^2}}$$

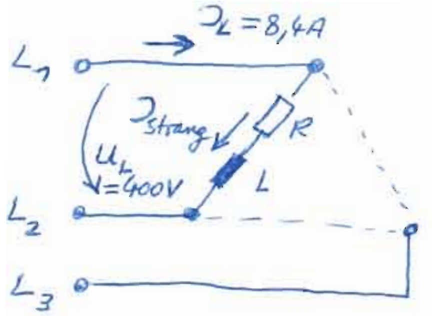
dh: wegen zusätzl. Blindstrombelastung größere Leiterquerschn. erforderl.

$$\underline{\underline{A\Big|_{120m}}} = \sim = \underline{\underline{9{,}30\,mm^2}}$$

9.3) **Ersatzelemente u. Leistungen S u. Q**

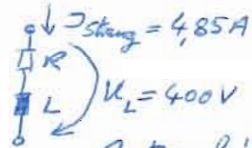
geg: symm. Δ-Schaltung (je Strang R–L)
Außenleiterstrom I_L jeweils 8,4 A
$P = 4{,}52\,kW$ (=gesamte Wirkleistung)

ges: Strangelemente R u. L, sowie S u. Q



$$\underline{\underline{I_{Strang}}} = \frac{I_L}{\sqrt{3}} = \frac{8{,}4A}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{4{,}85\,A}}$$

hiervon nur 1 Strang betrachten:



Außenleiterspannung = Strangspannung

Bestimmung des $\cos\varphi$:

$$\underline{\underline{P}} = 3 \cdot U_{Strang} \cdot I_{Strang} \cdot \cos\varphi \overset{!}{=} \underline{4{,}52\,kW} \text{ (s. Aufg.stellung)}$$

$$\underline{\underline{S}} = 3 \cdot U_{Strang} \cdot I_{Strang} = 3 \cdot 400V \cdot 4{,}85A = \underline{\underline{5{,}82\,kVA}}$$

$$\curvearrowright \quad \underline{\underline{\cos\varphi}} = \frac{P}{S} = \frac{4{,}52\,kW}{5{,}82\,kVA} = \underline{\underline{0{,}777}} \implies \underline{\underline{\varphi}} = \arccos 0{,}777 = \underline{\underline{39^\circ}}$$

a.) **Bestimmung R u. L:**

$$\text{Strang: } \underline{Z} = R + j\omega L = |\underline{Z}| \cdot (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi)$$

$$= \underbrace{|\underline{Z}| \cdot \cos\varphi}_{} + j \cdot \underbrace{|\underline{Z}| \sin\varphi}_{}$$

$$\underline{Z} = R + j \cdot \omega L$$

$$\text{mit } |\underline{Z}| = Z = \frac{U}{I} = \frac{400V}{4{,}85A}$$

$$\underline{\underline{|\underline{Z}| = 82{,}47\,\Omega}} \quad \curvearrowright \quad \underline{\underline{R = 64\,\Omega}}$$

$$\omega L = 57{,}9\,\Omega$$

$$L = \frac{57{,}9\,\Omega \cdot s}{2\pi \cdot 50}$$

$$\underline{\underline{L = 0{,}165\,H}}$$

b.) **Q und S: z.B. aus I_{Strang} und Z bzw. X_L ber.:**

$(P = I^2 \cdot R)$

$$\underline{\underline{S}} = 3 \cdot I_{Strang}^2 \cdot Z = 3 \cdot (4{,}85A)^2 \cdot 82{,}47\,\Omega = \underline{\underline{5{,}82\,kVA}}$$

$$\underline{\underline{Q}} = 3 \cdot I_{Strang}^2 \cdot \omega L = 3\,(4{,}85A)^2 \cdot 2\pi \cdot 50\,s^{-1} \cdot 0{,}165\,\frac{Vs}{A} = \underline{\underline{3{,}658\,kvar}}$$

als Δ-Gesamtleistung (Faktor 3)

Bem: als Probe $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ ✓ i.O.

dgl. auch für $\underline{\underline{S}} = 3 \cdot U_L \cdot I_{Strang}$, $\underline{\underline{Q}} = \underbrace{3 \cdot U_L \cdot I_{Strang}}_{S} \cdot \sin\varphi$ bestimmbar