2014

Allg. Eigenschaften akustischer Wellenausbreitung

Weites Schallspektrum:

Infraschall	$f < 16\,Hz$	(Anregung über Ozeanen u. Gebirgen)
Hörschall	$16\,Hz \ldots 20\,kHz$	
Ultraschall	$20\,kHz \ldots 1\,GHz$	(meist technisch erzeugt für viele verschiedene Anwendungen)
Hyperschall	$f > 1\,GHz$	

Technisch interess. Frequenzbereiche:

in Luft ($c = 330\,\frac{m}{s}$) : $1\,Hz \ldots 200\,kHz \rightsquigarrow \lambda = 1{,}6\,mm \ldots 330\,m$

in Flüssigk. ($c = 1000 \ldots 2000\,\frac{m}{s}$) : $1\,Hz \ldots 300\,MHz \rightsquigarrow \lambda = 3{,}3\,\mu m \ldots 2\,km$

im Festkörper ($c = 3000 \ldots 8000\,\frac{m}{s}$) : $50\,kHz \ldots 1\,GHz \rightsquigarrow \lambda = 3\,\mu m \ldots 16\,cm$

Wellenlänge: $\boxed{\lambda = \frac{c}{f}}$ c - Schallgeschw. f - Frequenz

Extreme Intensitätsveränderungen:

ZB: - Norwegische Brandung mit $\lambda_{Luft} = 2060\,m$ nachweisbar in Zentralasien! (0,16 Hz)
- Luftschall von 3 kHz ($\lambda = 0{,}11\,m$) hat Intensitätsabfall 1:1600 über 4 km
- Techn. Grenze bei Luft-Ultraschall-Anwendung bei ca. 200 kHz

Akustik behandelt Wellenausbreitung in stofflicher elastischer Materie! (im Gegensatz zu el.-mgn. Wellen...)

Spezielle Eigenschaften – Anwendungsgebiete

(1) **Energiedichte $\overline{W}_D$ ist $\sim f^2$:**

$\Rightarrow$ große Energiedichte, Bündelung mgl.

dh: überelastische Beanspruchung v. Material, nichtlineare Effekte, bleibende Veränderungen – auch Strukturveränderungen (Chemie) im Material
Zerstörung / Erosion durch Kavitation (allein aus Strömungseffekten)

ZB: angewandt bei Reinigen, Emulgieren, Erwärmen, Entgasen, Aerosolerzeugung, Bakterientötung, Stoffumwandlung

- viele Effekte werden über die universelle phys. Größe Energie vermittelt ... –

(2) Kleine Wellenlänge λ erzielbar:

⇒ hohe räumlich / zeitliche Auflösung entspr. Wellenlänge in der Meßtechnik mgl.

(ZB:) in medizin. Diagnostik, bei Modellversuchen Raumakustik (Planung Konzertsäle), Echolot, Ortung (1942 Einführung der Impulsechomethode)
Werkstoffprüfung in größeren Schichtdickenbereichen als durch Röntgenverfahren mgl.

(3) Bestimmung von Materialeigenschaften:

⇒ insbes. aus Schallgeschwindigkeit c und Dämpfung sind stoffl. Materialeigenschaften ermittelbar

(ZB:) Bestimmung elastischer Stoffkonstanten,
Aufklärung atomarer / molekul. Struktur von Flüss. u. Festkörpern

Im GHz-Bereich (Hyperschall ≙ "microwave acoustics") treten Effekte der Quantenakustik, wie Welle-Teilchen-Dualismus, Wirkung von Phononen (kleinste mikromechan. Stöße) ... vgl. Optik, auf!
(1974 erstes Ultraschall-Abtastmikroskop – ca. 2 GHz ≈ 2 µm Abtasttiefe)

(4) Geringe Ausbreitungsgeschwindigkeit:

im Vgl. zu elektr. / optischen Wellengeschw.

⇒ Verzögerung elektr. Signale im >10 µs-Bereich mgl.

(ZB:) Radartechnik, Sonartechnik
TV-Technik (Farbfernsehen – 64 µs FBAS), Sensorelektronik

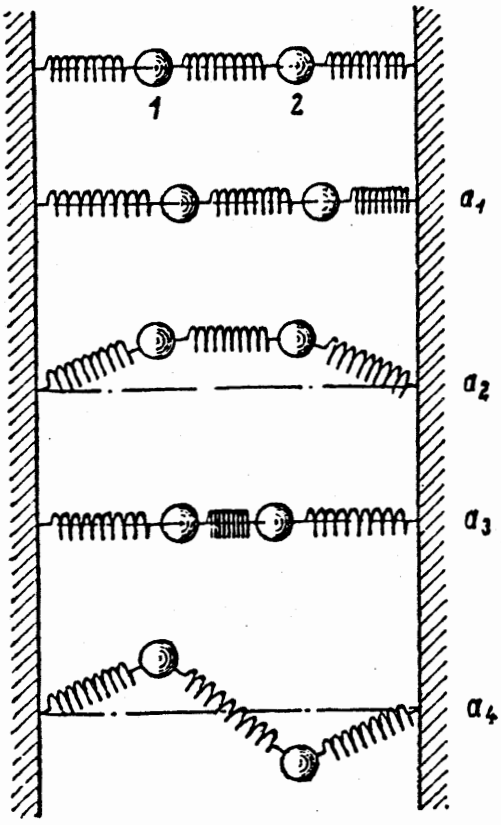
Dabei Anwendung von Oberflächenwellenfiltern (Rayleighwellen) in Verzögerungsleitungen, zur Impulsdehnung / Kontraktion ... in "signalangepaßten Filtern" (matched filters)

Elektro-Akustische Wandler

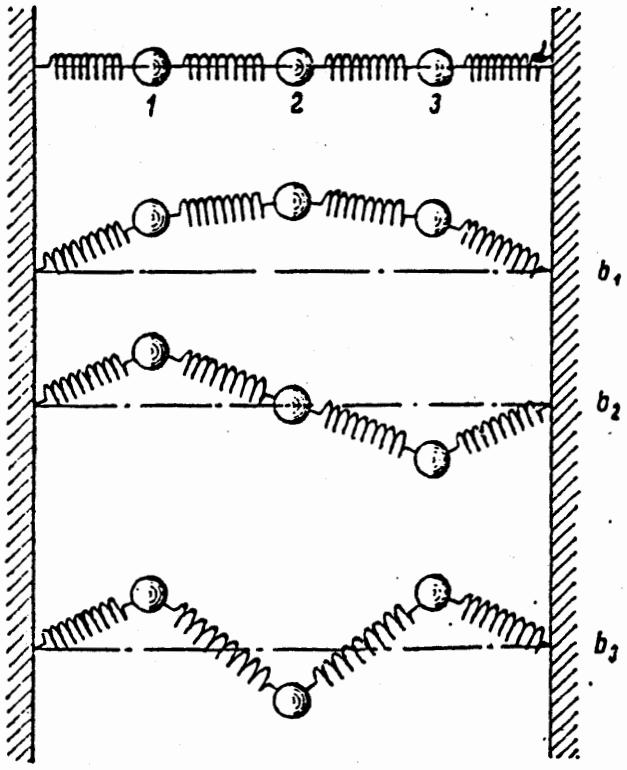
- elektromechanische ~ (zB. Lautsprecher)
- magnetostriktive ~ (Wandler für hohe Leistungen, Hydroortung)
- piezoelektrische ~ (Keramiken, Quarz)
- PVDF-Folien ~ (elektr. polarisierter Kunststoff)

EIGENSCHWINGUNGEN DEFORMIERBARER KÖRPER

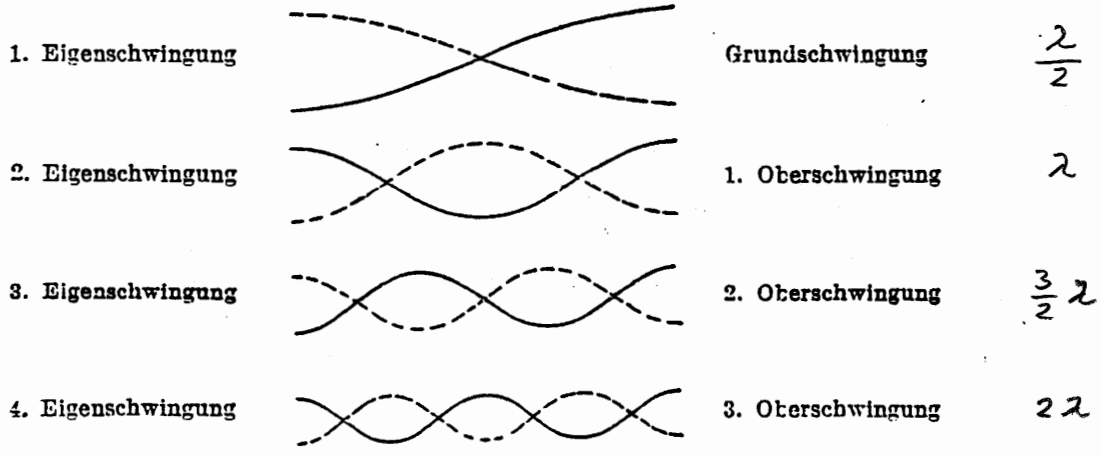
Einen deformierbaren Körper, z. B. einen Stab, denken wir uns durch ein Modell ersetzt, welches aus starren Massen besteht, die miteinander durch Schraubenfedern gekoppelt werden. Die Massen können in der Richtung der Federn sogenannte *Longitudinalschwingungen* oder dazu senkrecht *Transversalschwingungen* ausführen.



„Grund- und Oberschwingungen" von 2 elastisch gebundenen Massen.



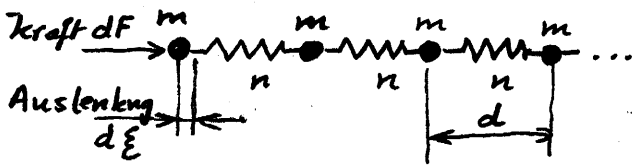
„Grund- und Oberschwingungen" von 3 elastisch gebundenen Massen.



Grund- und Oberschwingungen eines an beiden Enden freien, longitudinal schwingenden Stabes.

Obere Frequenzgrenze für akustische Wellenleitung

Betrachtung Kristall: darstellbar als mech. Kettenleiter:

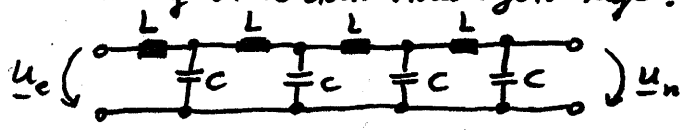


Mechan. Feder-Masse-System

- m – Masse (des Atoms)
- d – Atomabstand
- n – Federnachgiebigkeit/$\frac{m}{N}$ (≙ Bindungskräften)
- u – Schallschnelle

wobei $n = \frac{\xi}{F}$, $\frac{\partial \xi}{\partial t} = u = n \frac{dF}{dt}$

Bem: [Umwandlung in elektr. Analogon mgl: Tiefpaß



mit L aus m, C aus n } s. Arno Lenk u. Zollner/Zwicker zur Modellbildung]

Die longitudinale Schwingung jeder dieser Massen überträgt sich jeweils mit einer best. Phasenverzögerung $\Delta\varphi$ auf die Nachbarmasse ⇝ Fortpflanzung jedes Schwingungszustands durch die Kette

$$\Delta\varphi = 2 \arcsin\left(\pi \cdot f \cdot \sqrt{m \cdot n}\right)$$

$$\approx 2\pi \cdot f \sqrt{m \cdot n}$$ für sehr kleine Frequ. f, wobei Wellengeschw. $c_0 = \frac{d}{\sqrt{m \cdot n}}$

Für die Grenzfrequenz f_{gr} erreicht das Argument der sin-Fktn. den Wert 1 ⇝ $\Delta\varphi = \pi \hat{=} 180°$ als Phasenunterschied!

Damit wird $f_{gr} = \frac{1}{\pi \sqrt{m \cdot n}}$

als max. mgl. Frequenz einer akustischen Wellenausbreitung.
(für $f > f_{gr}$ ist die Fktn. nicht mehr definiert!)

Physikalische Bewertung:

$\Delta\varphi = \pi$ bei f_{gr} bedeutet: benachbarte Atome schwingen gegenphasig ⇝ vollständige Kompensation der kinet. Energien ⇝ keine Wellenausbreitung

mehr mgl.!, dh. $\boxed{\lambda_{gr} \text{ kann nicht kleiner werden als } 2 \cdot d}$ (!)

mit c_0 folgt $\boxed{f_{gr} = \frac{c_0}{\pi \cdot d}}$ vgl. sogen. "Debye-Frequenz" (aus Modifizierung der Einstein'schen Wärmetheorie)

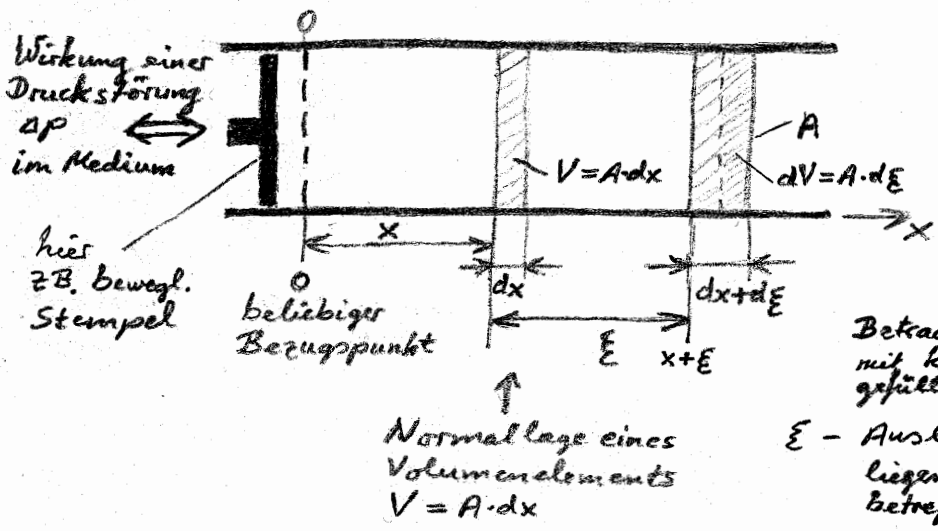
(ZB:) Metall mit $c_0 = 5000 \frac{m}{s}$, $d = 3 \cdot 10^{-10}\,m$ (Atomabstand) } ⇝ $f_{gr} = 5{,}3 \cdot 10^{12}\,Hz = 5{,}3\,THz$

(Vgl. Experimentell erzeugte Frequenzen z.Zt. bei 1 THz)

Physik des Schallfeldes

- Grundgesetze der Schallwellenausbreitung
- Bestimmungs-/Meßgrößen des Schallfeldes

Herleitung der Wellengleichung für Kompressionswellen:



Zylinder mit Querschnitt A
Inhalt: beliebiger deformierbarer Stoff
(≙ Ausschnitt aus ∞-ausgedehntem ebenen Wellenfeld)

Betrachtung eines Volumenelements, mit konstanter Anzahl von Teilchen gefüllt.

ξ – Auslenkung eines (linksseitig liegenden) Teilchens des betreffenden Volumenelements

Durch linksseitige Druckstörung entsteht im Stoff innerhalb des Zylinders eine elastische Spannung $= f(x)$, dies führt zur

<u>Verschiebung</u> des Volumenelements um Weg ξ und <u>Änderung der Dicke</u> auf $dx + d\xi$ (folgt zeitl. und räuml. Schwankung von Dichte, Druck, Teilchengeschw.)

Für d. Volumen gilt
$$\left.\begin{aligned} V &= A\cdot dx \\ dV &= A\cdot d\xi \end{aligned}\right\} \curvearrowright \quad \frac{dV}{V} = \frac{d\xi}{dx}$$

(!) Wegen der i.a. hohen Geschwindigkeit der Druckschwankung kann in der Akustik vorausgesetzt werden, daß <u>kein Wärmeaustausch</u> der Wellenausbreitung mit der Umgebung bzw. innerhalb der Welle auftritt! Für solche <u>adiabatischen</u> (Druck-Volumen-) <u>Zustandsänderungen</u> gilt: (vgl. "Adiabatisches Feuerzeug")
$$p_0 \cdot V_0^{\varkappa} = p \cdot V^{\varkappa}$$

Damit ist der p-V-Zusammenhang
$$\boxed{p \cdot V^{\varkappa} = \text{konst.}}$$
$$\hookrightarrow p = \text{konst.} \cdot V^{-\varkappa}$$

nach Differentation folgt Ausdruck für diff. Änderungen
$$dp = (-\varkappa)\cdot \underbrace{\text{konst.}\cdot V^{-\varkappa}}_{p}{}^{-1} \cdot dV$$
... sortieren

$$\curvearrowright \frac{dp}{p} = -\varkappa \frac{dV}{V} = -\varkappa \frac{d\xi}{dx} \quad \text{(s. oben)}$$
(dh. mit $p\uparrow \curvearrowright V\downarrow$)

damit wird $\underline{\underline{dp = -\varkappa\, p \frac{d\xi}{dx}}}$

$\varkappa$ – Adiabatenkonstante
$$\varkappa = \frac{c_{wp}}{c_{wV}} \qquad [c_w] = 1\,\frac{J}{kg\cdot K}$$
spezif. Wärmekapazität c_w bei $p = \text{const.}$ bzw. $V = \text{const.}$

$\varkappa = 1{,}67$ für 1-atomige Gase (Edelg. He, Ar)
$\varkappa = 1{,}4$ für 2-atomige Gase (O_2, N_2, H_2)
$\varkappa = 1{,}3$ für 3-atom. Gase (CO_2, H_2O)

Wird noch p_0 = Druck des ruhenden Mediums (Gases) berücksichtigt,

dann folgt der <u>Druckverlauf im Rohr</u> (infolge Verschiebung des Stempels)

$$p(x) = p_0 - \varkappa p_0 \frac{d\xi}{dx}$$

Hierbei entsteht auf das Volumenelement $V = A \cdot dx$
eine <u>Differenzdruckwirkung dp</u>

wegen des Druckgefälles ($\hat{=}$ Kraft auf Vol.-element) in x-Richtung.

Darstellbar aus Differentation $\frac{dp}{dx} = -\varkappa p_0 \frac{d^2\xi}{dx^2}$ als Fktn. der Auslenkung

Aus der <u>Gleichsetzung der Kraft</u> aus der Differenzdruckwirkung dp auf das Vol.-element mit der Kraft aus Masse m u. Beschleunigung a folgt:

(Kraft in Druckabfallrichtung positiv)

mit $\left[\begin{array}{l} F = m \cdot a \\ F = dp \cdot A \end{array}\right] \rightarrow F = -\frac{dp}{dx} dx \cdot A = \varkappa p_0 \frac{d^2\xi}{dx^2} \cdot dx \cdot A$

Ausdrücke gleichsetzen: $F = A \cdot dx \cdot \varkappa p_0 \frac{d^2\xi}{dx^2} \overset{!}{=} \underbrace{A \cdot dx \cdot \varrho}_{\text{Masse } m} \cdot \underbrace{\frac{d^2\xi}{dt^2}}_{\text{Beschl. } a}$ ϱ - Dichte

m und a berücksichtigt

Umstellung nach Beschleunigung: $\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \underbrace{\frac{\varkappa p_0}{\varrho}} \cdot \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$ Betrachtung der Ableitungen: $\frac{\cancel{\partial^2\xi}}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial x^2}{\cancel{\partial^2\xi}} = c^2$

daraus folgt mit $\frac{\varkappa p_0}{\varrho} = c^2$ die <u>Schallgeschwindigkeit c</u>
als Bewegung eines <u>Phasenzustands</u> der Welle! (= Wellengeschwindigkeit = Phasengeschwindigkeit)

<u>Damit ist d. Wellengleichung:</u>

(partielle Ableitungen von ξ in x,y,z-Richtung f. 3 dim. Fall)
hier nur in x-Richtung: $\boxed{\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}}$ wobei $\boxed{c = \sqrt{\frac{\varkappa p_0}{\varrho}}}$

(!) dieser Ausdruck ist allg. gültig und sagt nicht über die Form der Welle aus! Diese ergibt sich aus der Erregung! (Darst. für Gase)

Mit dem differentiellen Übergang für kompressible Medien wird

$c^2 = \varkappa \frac{dp}{d\varrho}$, mit $\varrho = \frac{\text{konst.}}{V}$ $\varkappa$ - Adiabatenkonst.

Somit folgt $c^2 = -\frac{\varkappa \cdot V}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dV}$ wobei gilt: $-\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dp} = \beta_{is}$ isotherme Kompressibilität
(weil $+dp \rightsquigarrow -dV$) $= \varkappa \cdot \beta_{ad}$ adiabat. Kompr.

Damit wird c darstellbar:

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{\varkappa}{\varrho \cdot \beta_{is}}} = \sqrt{\frac{1}{\varrho \cdot \beta_{ad}}} = \sqrt{\frac{K_{ad}}{\varrho}}}$$

$K_{ad} = \frac{1}{\beta_{ad}}$ adiabat. Kompressionsmodul

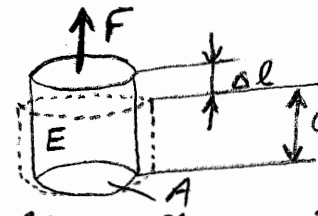
(Darst. für Flüssigkeiten)

Für Festkörper folgt mit dem Hooke'schen Gesetz (kleine Δl):

$$\text{Druck } p = \frac{F}{A} = E \cdot \frac{\Delta l}{l} = E \cdot \varepsilon$$

ε – Dehnung

E – Elastizitätsmodul (Young) $[E] = 1\,\frac{N}{m^2}$



Verformung eines Zylinders

Der Elastizitätsmodul E des Festkörpers entspricht dem Kompressionsmodul κ_{ad} beim Gas!

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}}$$ (Darst. für Festkörper)

Bem: unter Nutzung der Gas-Zustandsgrößen folgt

mit Überführung $\rho_0 = \frac{m}{V_0} = \frac{n \cdot M}{V_0} = \frac{p_0 \cdot \cancel{V_0}}{R \cdot T_0} \cdot \frac{M}{\cancel{V_0}} = \frac{M}{R \cdot T_0} \cdot p_0$

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{R \cdot T}{M} \varkappa}}$$

n – Molanzahl des Gases
M – molare Masse
R – molare Gaskonstante

(Darst. für Gase)

Allg. Lösung der Wellengleichg. wäre eine Fktn. der Form: $\xi = \hat{\xi} \cdot \underbrace{f\left(t \pm \frac{x}{c}\right)}_{\text{beliebige 2x differenzierbare Funktion}}$

Amplitude

eine **partikuläre Lösung** der Wellengleichg. ist z.B.:

für Auslenkung der Teilchen aus der Ruhelage

$$\boxed{\xi(x,t) = \hat{\xi} \cdot \sin \omega \left(t - \frac{x}{c}\right)}$$

räumlich – zeitliche Abhängigkeit von ξ (!)

≙ Darstellung für harmonische, ebene Welle, in x-Richtung laufend

(!) Wellengeschwindigkeit (Schallgeschw.) c ist hier nicht eine Bewegungsgeschwindigkeit eines Körpers, sondern die eines Zustands:
↳ Begriff "Phasengeschwindigkeit" $c = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$

Übergang zur komplexen Schreibweise für harmonische Wellen

z.B.:
$$\xi = \hat{\xi} \cdot \sin \omega \left(t - \frac{x}{c}\right)$$
$$= \hat{\xi} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$
$$\xi = \hat{\xi} \cdot \sin(\omega t - k \cdot x)$$

mit Einführung der (Kreis)Wellenzahl k: $[k] = \frac{2\pi}{m}$ Dimension

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Hin-Transform. ins Komplexe

$$\boxed{\underline{\xi} = \xi^{<} = \hat{\xi} \cdot e^{j(\omega t - kx)}}$$

wobei $\cos(\ldots)$ hier der Realteil (≙ Ergänz.) der komplexen Fktn. $e^{j(\ldots)}$ wäre.
(Euler-Bezhng.: $\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi = e^{j\varphi}$)

- ω kennzeichnet zeitliche Periodizität $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- k gibt an, wie viele Wellenlängen λ auf die Strecke $2\pi \cdot 1m$ ≙ Einheitskreisumfang entfallen (Radius 1m). Ist also ein Maß für die räumliche Periodizität! $\lambda = \frac{2\pi}{k}$

Bem: Bei Berücksichtigung innerer Verluste (Dämpfung) wird

$$\underline{\xi} = \hat{\xi} \cdot e^{j(\omega t - kx)} \cdot e^{-\alpha x}$$

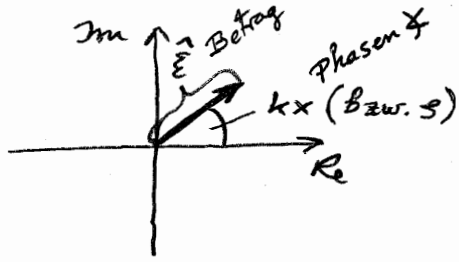
Absorptionskonstante, $\alpha = f(f)$

Zeigerdarstellung erf. als "ruhender Zeiger", dabei Zeitabhängigkeit ωt weggelassen, Frequenz als Parameter betrachtet:

Darstellung einer in x-Richtung laufenden Welle

für ξ $\boxed{\underline{\xi} = \hat{\xi} \cdot \cancel{e^{j\omega t}} \cdot e^{-jkx} = \hat{\xi}\, e^{-jkx}}$ wobei $\omega = \text{const.}$

hierzu Zeigerbild:



bzw.

Darstellung einer in (−x)-Richtung (rückwärts!) laufenden Welle:

$$\boxed{\underline{\xi}_R = \hat{\xi} \cdot e^{+jkx}}$$

zB. für reflektierte Welle...

(Vz.-Umkehr, umgekehrte Laufrichtung)

Betrachtungsweise:

Die Wellengleichung ist sowohl zeitlich als auch räumlich periodisch:

zB. für feste Raumkoordinate x: $\xi = \hat{\xi} \cdot \sin \omega (t - \varrho')$

Phasenkonstante $\varrho' = \frac{x}{c}$

zB. für festgehaltene Zeit t: $\xi = \hat{\xi} \cdot \sin \omega \left(\varrho'' - \frac{x}{c}\right)$

feste Bezugsphasenlage ϱ''

für 2 in x-Richtung aufeinanderfolgende Schwingungszustände gleicher Phase gilt mit der Wellenlänge λ:

$$\omega\left(\varrho'' - \frac{x+\lambda}{c}\right) - \omega\left(\varrho'' - \frac{x}{c}\right) = 2\pi$$

damit ist $\frac{\omega}{2\pi} \cdot \lambda = c$ bzw. $\boxed{f \cdot \lambda = c}$ als die allg. bekannte Beziehung

Bem: So kann die part. Lösung der Wellengleichung

$\xi = \hat{\xi} \cdot \sin \omega \left(t - \frac{x}{c}\right)$ auch geschrieben werden als:

$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

$$\boxed{\xi = \hat{\xi} \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = \hat{\xi} \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda}(c \cdot t - x)}$$

Schallschnelle, Schallbeschleunigung

aus Wellengleichung $\xi = \hat{\xi} \cdot \sin \omega \left(t - \frac{x}{c}\right)$ für Teilchenauslenkung folgen:

- die "Schallschnelle": $\frac{d\vec{\xi}}{dt} = \boxed{\vec{u} = \omega \cdot \hat{\vec{\xi}} \cos \omega \left(t - \frac{x}{c}\right)}$ Vektor
  (Geschwindigkeit der Teilchenbewegung)

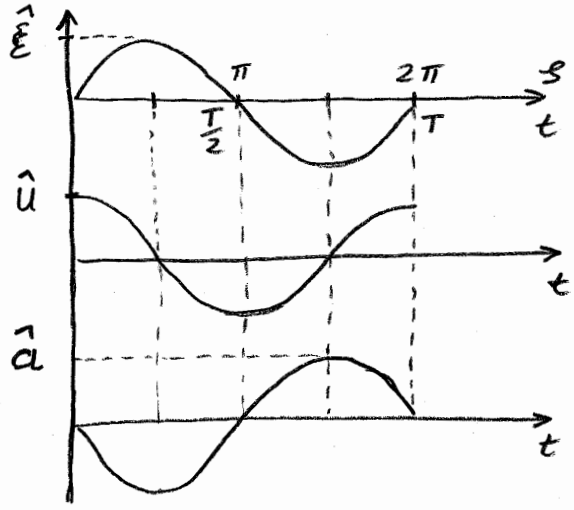
  mit Amplitude $\boxed{\hat{u} = \omega \hat{\xi}}$ steigt mit f (!)
  ($\hat{=}$ max. Bewegungsgeschwindigkeit der Teilchen in d. Welle)

nochmaliges Diff. ergibt

- die "Schallbeschleunigung": $\frac{d^2\vec{\xi}}{dt^2} = \boxed{\vec{a} = -\omega^2 \hat{\vec{\xi}} \sin \omega \left(t - \frac{x}{c}\right)}$ Vektor
  (Beschleunigung der Teilchen)

  gegenphasig zu ξ

  mit Amplitude $\boxed{\hat{a} = \omega^2 \hat{\xi} = \omega \cdot \hat{u}}$ steigt mit f^2 (!)



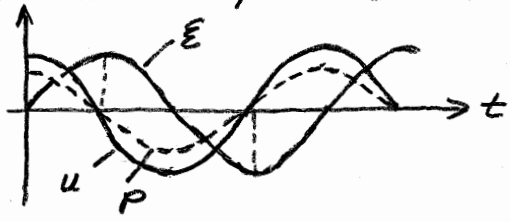
Teilchenauslenkung ξ

Schallschnelle u

Schallbeschleunigung a

Beachte die Phasenlage der Größen!

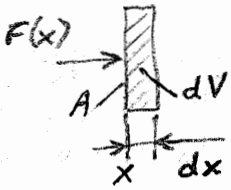
Bem: Schalldruck p (folg. Seite...) und Schallschnelle u sind in einer ebenen, nicht zu stark gedämpften Welle in Phase!



[dagegen Phasenverschiebung bei Zylinder- bzw. Kugelwellen!]

Ableitung des Schall(wechsel)drucks

Kraft auf Volumenelement dV aus (Differenz)druckwirkung $\Delta F \rightarrow dF = A \cdot dp$ in x-Richtung:



$$dF = F(x+dx) - F(x) = A \cdot [p(x+dx) - p(x)]$$
$$= A\left[\cancel{p(x)} + \frac{\partial p}{\partial x} dx - \cancel{p(x)}\right]$$
$$dF = A \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx = dV \cdot \frac{\partial p}{\partial x}$$

Jetzt Gleichsetzen dieses dF mit $F = m \cdot a$ als "Gegenkraft" ↝

$$dF = A \cdot dp = A \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx \overset{!}{=} \underbrace{A \cdot dx \cdot \varrho}_{m} \cdot \underbrace{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}}_{a}$$

ϱ – Dichte

Masse und Beschleunigung

Daraus folgt die Druckänderung über ∂x:

$$\cancel{A \cdot dx} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \cancel{A \cdot dx} \cdot \varrho \cdot \ddot{\xi}$$

$$\underline{\underline{\partial p = \varrho \cdot \ddot{\xi} \cdot \partial x}} \quad \text{mit } \xi = \hat{\xi} \cdot \sin\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

Der Schallwechseldruckverlauf p(x) folgt nun aus der Integration über ∂p (mit variabler oberer Grenze x für f(x))

$$p(x) = \int \partial p = \int_0^x \varrho \ddot{\xi} \, \partial x = -\varrho \hat{\xi} \omega^2 \int_0^x \sin\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) dx$$

Integration über dx, für t = const.

$$= +\underbrace{\varrho \hat{\xi} \omega c}_{} \cdot \cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

Skalar:

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{p} = p_{max} &= \varrho \cdot \hat{\xi} \cdot \omega \cdot c \\ &= \varrho \cdot \hat{u} \cdot c \end{aligned}}$$

<u>Schall(wechsel)druck – Amplitude</u>

$$[p] = 1\,\text{Pascal} = 1\,\frac{N}{m^2}$$

Energie und Leistung in der Akustik

In einer ebenen Schallwelle sind Schalldruck p und Schallschnelle u <u>in Phase</u> ↝ Druckkraft leistet <u>positive Arbeit!</u>

In der Mechanik: ist die (Momentan)leistung, die in ein System eingeleitet wird: $P_m = \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{x}}{t} = \frac{\text{Arbeit } (\rightarrow \text{Energie})}{\text{Zeit}}$

Eine akust. Welle transportiert keine Masse, sondern Energie und Impuls! Infolge der Wellenausbreitung wird deshalb

Für die Akustik erforderlich:

- <u>Mittelung</u> über hinreichend lange Zeit (da i.a. stationäre Schwingung)
- zur Darstellung der in der Schallwelle <u>transportierten</u> Leistung erfolgt Bezug auf Flächeneinheit, dh. Kraft F wird <u>durch Schalldruck p ersetzt.</u>
- Ersetzen von $\vec{v}$ durch $\vec{u}$ ↝ Intensität $\boxed{\vec{J} = \frac{P}{A} = \overline{p \cdot \vec{u}}}$

damit folgt im Schallfeld einer ebenen Welle für die transportierte Energie die

Schall-Intensität $\vec{J}$ (= Schallstärke, $\hat{=}$ Energiestromdichte)

$$\boxed{\vec{J} = \frac{P}{\vec{A}} = \frac{\vec{F}\cdot\vec{x}}{\vec{A}\cdot t} = \frac{\vec{F}}{\vec{A}}\cdot\frac{\vec{x}}{t} = \overline{p\cdot\vec{u}}}$$

← als zeitlich gemittelte Größe! an einem Feldpunkt

bei Phasenverschiebung ϱ zwischen p und u (gilt für nicht-ebene Wellen)

wird
$$J = \frac{1}{T}\int_T p\cdot u\cdot dt = \hat{p}\cdot\hat{u}\cdot\frac{1}{T}\int_T \cos\omega t\cdot\cos(\omega t+\varrho)\cdot dt$$
$$= \frac{1}{2}\hat{p}\cdot\hat{u}\cdot\cos\varrho = \frac{1}{2}\tilde{p}\cdot\sqrt{2}\cdot\tilde{u}\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\varrho = \tilde{p}\cdot\tilde{u}\cdot\cos\varrho$$

(vgl. elektr. Leistung mit Leistungsfaktor)

für $\varrho = 0°$ gilt
$$\boxed{J = \tilde{p}\cdot\tilde{u}}, \quad [J] = \frac{N}{m^2}\cdot\frac{m}{s} = 1\,\frac{W}{m^2} = 1\,\frac{N}{m\cdot s}$$

$\vec{J}$ ist vorstellbar als Quotient aus Schall-Leistung P und der senkrecht durchstrahlten Querschnittsfläche $A_\perp$, dh. als die pro Zeiteinheit durch ein Flächenelement hindurchtretende Schallenergie

$$\vec{J} = \frac{P}{\vec{A}} \quad \text{bzw. Schall-leistung} \quad \boxed{P = \vec{J}\cdot\vec{A} = \overline{p\cdot\vec{u}}\cdot\vec{A}}$$

Schall-Leistung P (als Gesamtleistung einer Schallquelle)

P ist vorstellbar als die Schallenergie, die pro Zeiteinheit durch eine beliebig große (die Schallquelle umschließende) senkrecht zur Schallausbreitungsrichtung liegende Fläche $S_\perp$ (zB. Kugeloberfläche) strömt.

dh.: Schallquelle von geschlossener Fläche $S_\perp$ umgeben denken:

↳ abgestrahlte Gesamtleistung der Quelle: ist eine Skalare Größe

$$\boxed{P = \oint \vec{J}\cdot d\vec{S}} = \iint_S \overline{p\cdot\vec{u}}\cdot d\vec{S} = \overline{p\cdot u}\cdot S_\perp$$

Skalarprodukt — mit Normalelementen bzgl. Integrationsfläche

hierzu Betrachtung d. Dimension $[P]$: $\frac{N}{m^2}\cdot\frac{m}{s}\cdot m^2 = \frac{Nm}{m^2\cdot s}m^2 = \frac{Ws}{m^2\cdot s}m^2 = 1\,\frac{J}{s}$

dh. dies ist die Abgestrahlte Gesamtenergie / Zeiteinheit!

$$[P] = 1\,\frac{Nm}{s} = 1\,W$$

mit $\overline{p} = \overline{\varrho\cdot u\cdot c}$ wird:
$$P = J\cdot S = \overbrace{\varrho\cdot u\cdot c}^{\overline{p}}\cdot\overline{u}\cdot S$$
$$= \frac{\hat{u}^2}{2}\cdot\varrho\cdot c\cdot S = \frac{\hat{p}^2}{2\varrho c}\cdot S$$

(wie oben)
$$\boxed{P = \frac{\hat{p}\cdot\hat{u}}{2}\cdot S = \frac{\hat{p}}{\sqrt{2}}\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}\cdot S = \tilde{p}\cdot\tilde{u}\cdot S}$$

Schallfluß q (= "Volumenfluß", = "Volumengeschwindigkeit")

Betrachtung eines Teilchenkollektivs unter der Voraussetzung, daß im Volumen $dV = d\xi\cdot\vec{A}$ (bzw. V) gilt: $u = \text{const.}$ für alle Teilchen! (besonders einfach):

$$\boxed{q = \frac{dV}{dt} = \frac{d\xi}{dt}\cdot\vec{A} = \vec{u}\cdot\vec{A}} \qquad [q] = 1\,\frac{m^3}{s}$$

(selten gebraucht, ev. für Kontinuitätsbetrachtungen verw. ...)

dies gilt nur, wenn die betrachteten Abmessungen $\ll \lambda$ sind!

q gibt an, wieviel Volumenanteil dV des Mediums in der Zeit dt durch eine Fläche $A_\perp$ in periodisch wechselnder Richtung hindurchströmt.

Energie W und Energiedichte W_D – als zeitliche Mittelwerte

aus der Wellengln. $\xi(x,t) = \hat{\xi} \cdot \sin \omega (t - \frac{x}{c})$ folgte bekanntermaßen die Schallschnelle $\frac{d\xi}{dt} = u = \omega \hat{\xi} \cdot \cos \omega (t - \frac{x}{c})$

als Geschwindigkeit der schwingenden Masseelemente $\Delta m = \rho \cdot \Delta V$

↳ deren kinetische Energie $\Delta W_{kin} = \frac{1}{2} \Delta m \cdot u^2$ ⟸ aus Mechanik: $W_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$

$$= \frac{1}{2} \rho \cdot \Delta V \cdot u^2$$

$$= \frac{1}{2} \rho \cdot \Delta V \cdot \omega^2 \hat{\xi}^2 \cdot \left[\cos \omega (t - \frac{x}{c})\right]^2$$

Im zeitlichen Mittel $\overline{\Delta W_{kin}} = \frac{1}{T} \int_0^T \Delta W_{kin} \cdot dt$ wird der Bestandteil

$$\left[\sin \omega (t - \frac{x}{c})\right]^2 = \left[\cos \omega (t - \frac{x}{c})\right]^2 = \frac{1}{2}$$ (vgl. S. 1-10 Ableitung für J)

↳ Mittlere kin. Energie eines Masseelements im Volumen ΔV

$$\overline{\Delta W_{kin}} = \frac{1}{4} \rho \cdot \Delta V \cdot \hat{u}^2 \qquad \text{mit } \omega^2 \hat{\xi}^2 = \hat{u}^2$$

da bei harmonischer Schwingung gilt: $\overline{W_{pot}} = \overline{W_{kin}}$ (es wäre $\overline{\Delta W_{pot}} = \frac{\hat{p}^2 \cdot \Delta V}{4 \rho c^2}$)

↳ Gesamtenergie eines Masseelements Δm

$$\overline{\Delta W} = \frac{1}{2} \rho \cdot \Delta V \cdot \hat{u}^2$$

(wechselseitiger Austausch d. Energieform) feste Größen für zeitl. Mittelwerte! im V_{ges} deshalb $\overline{W_{ges}} = \overline{W_{kin}} + \overline{W_{pot}}$!

Division durch das Volumen liefert die (zeitlich gemittelte) Feldgröße

Skalar: Energiedichte (= Schalldichte) $\boxed{\overline{W_D} = \frac{1}{2} \rho \cdot \hat{u}^2}$ $\qquad [\overline{W_D}] = 1 \frac{J}{m^3} = 1 \frac{Ws}{m^3} = 1 \frac{N}{m^2}$

Dimension eines Drucks !

bzw. Umformung $\overline{W_D} = \frac{d\overline{W}}{dV} = \frac{\rho}{2} \hat{u}^2 = \frac{\rho}{2} \omega^2 \hat{\xi}^2 = \frac{\hat{p}^2}{2 \rho \cdot c^2} = \frac{J}{c}$ (Größen für pot. Energie)

Für die Intensität $\vec{J}$ folgt hieraus:

Vektor: gerichteter Energiefluß $\boxed{\vec{J} = \frac{1}{2} \rho \cdot \vec{\hat{u}}^2 \cdot c}$ $\qquad [J] = 1 \frac{W}{m^2} = 1 \frac{N}{m \cdot s}$

wegen $J = \frac{P}{A_\perp} = \frac{\overline{W}}{A_\perp \cdot t} = \frac{\overline{W_D} \cdot dV}{A_\perp \cdot t} = \frac{\overline{W_D} \cdot \cancel{A_\perp} \cdot dx}{\cancel{A_\perp} \cdot t} = \frac{\overline{W_D} \cdot c \cdot \cancel{t}}{\cancel{t}} = \overline{W_D} \cdot c$

bzw. mit Umformg. für Schalldruck p folgt

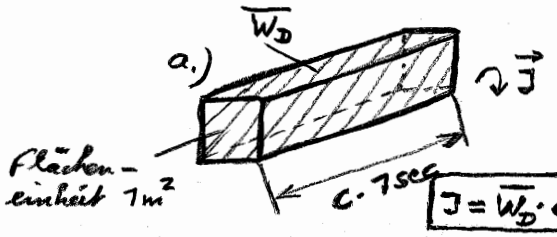
$$J = \frac{\rho}{2} \cdot \hat{u}^2 \cdot c = \frac{\hat{p}^2}{2 \rho \cdot c} = \frac{\hat{p} \cdot \hat{u}}{2} = \tilde{p} \cdot \tilde{u}$$ (vgl. S. 1-10 allg. Ansatz)

$\vec{J}$ ist eine Leistungsgröße/Fläche bzw. kennzeichnet Energietransport/Fläche·Zeit

hierzu physikal. Vorstellung für $\vec{J}$:

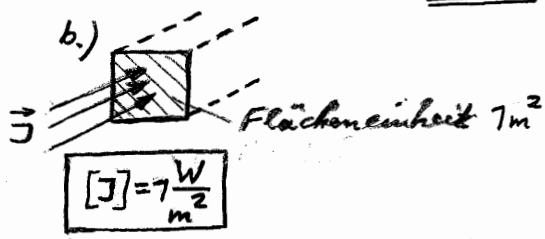
a.) $\boxed{\text{Schallintensität } \vec{J}}$ entspricht der Energiemenge, die im Volumen von $1\,m^2$ Grundfläche und einer Länge gleich der Schallgeschwindigkeit c $\times$ 1 sec enthalten ist: $J = \overline{W_D} \cdot c \Rightarrow [J] = [\overline{W_D}] \cdot [c] = 1\frac{Ws}{m^3} \cdot 1\frac{m}{s} = 1\frac{W}{m^2}$

b.) bzw. $\vec{J}$ entspricht der Energiemenge, die je Zeiteinheit durch die Flächeneinheit hindurchgeht: $[J] = \frac{\text{Kraft} \cdot \text{Weg}}{\text{Fläche} \cdot \text{Zeit}} = \frac{\text{Energie}}{\text{Fläche} \cdot \text{Zeit}} \left(= \frac{\text{Leistung}}{\text{Fläche}}\right)$



Im Volumen enthaltene Energie

bzw:



Durchgang Energiemenge pro Zeiteinheit 1s

Zusammenfassung zu Schall-Leistung P und Intensität $\vec{J}$

sind allg. als zeitliche Mittelwerte definiert:

dh: $P = \frac{1}{T}\int_T P(t)\,dt = \frac{A}{T}\int_T p(t) \cdot u(t)\,dt = \frac{A}{T}\int_0^T \hat{p}\sin\omega t \cdot \hat{u}\sin\omega t \cdot dt$ (*)

$$\boxed{P = \frac{1}{2}\vec{A} \cdot \hat{p} \cdot \hat{\vec{u}}} = \vec{A}\frac{\hat{p}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{\vec{u}}}{\sqrt{2}} = \boxed{\vec{A} \cdot \tilde{p} \cdot \tilde{\vec{u}}}$$

Faktor $\frac{1}{2}$!

$$\boxed{\vec{J} = \frac{P}{\vec{A}} = \tilde{p} \cdot \tilde{\vec{u}}}$$

Effektivwerte einsetzen! ev. Vektoreigenschaft von $\vec{A}$ und $\vec{u}$ beachten.

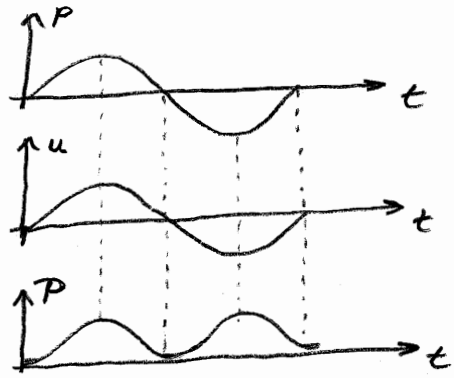
Ebenso sind aber auch die Momentanwerte $P(t)$ und $J(t)$ angebbar:

in einer ebenen Welle ist an einem Punkt x_0 über der Fläche $A_\perp$:

Schalldruck $p(t)$

Schallschnelle $u(t)$

Momentanleistung $P(t)$



$P(t) = p(t) \cdot u(t) \cdot A_\perp$

bzw.

$J(t) = p(t) \cdot u(t)$

(*) zeitl. Mittelwert über $\cos^2(\omega t - kx)$ bzw. $\sin^2(\ldots)$ ergibt Faktor $\frac{1}{2}$

Schallfeldkennwerte bei $f = 1\,kHz$, $\tilde{p} = 1\,Pa$

Material	$c\,[\frac{m}{s}]$	$\lambda\,[m]$	$\varrho\,[\frac{kg}{m^3}]$	$Z_0\,[\frac{Ns}{m^3}]$	$\hat{\xi}\,[\mu m]$	$\hat{u}\,[\frac{mm}{s}]$	$J\,[\frac{W}{cm^2}]$
Luft	343	0,343	1,189	408	0,38	2,4	$2{,}4 \cdot 10^{-7}$
H_2	1309	1,309	0,0827	108	1,44	9	$9 \cdot 10^{-7}$
H_2O	1490	1,49	1000	$1{,}49 \cdot 10^{6}$	$1{,}1 \cdot 10^{-4}$	$0{,}7 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-11}$
Al	5100	5,1	2700	$1{,}3 \cdot 10^{7}$	$1{,}2 \cdot 10^{-5}$	$7{,}7 \cdot 10^{-5}$	$7{,}7 \cdot 10^{-12}$
Stahl	5000	5,0	7800	$3{,}9 \cdot 10^{7}$	$4{,}1 \cdot 10^{-6}$	$2{,}6 \cdot 10^{-6}$	$2{,}6 \cdot 10^{-12}$

Schall-Leistung von Schallquellen $P\,[W]$

Unterhaltungssprache	$7 \cdot 10^{-6}$
menschl. Stimme (Max.)	$2 \cdot 10^{-3}$
Klavier	0,2
Geige	$1 \cdot 10^{-3}$
15-Mann Orchester	5
75-Mann Orchester	70

Schallfeldkennwerte bei $\hat{\xi} = 100\,nm$ in H_2O

kHz	λ	$\hat{u}\,[\frac{\mu m}{s}]$	$\hat{a}\,[\frac{m}{s^2}]$	$\hat{p}\,[\frac{N}{m^2}]$	$J\,[\frac{W}{mm^2}]$
0,1	14,9 m	63	$4 \cdot 10^{-2}$	90	$2{,}8 \cdot 10^{-9}$
10	14,9 cm	6300	$4 \cdot 10^{2}$	$9 \cdot 10^{3}$	$2{,}8 \cdot 10^{-5}$
1000	1,49 mm	$630 \cdot 10^{3}$	$4 \cdot 10^{6}$	$9 \cdot 10^{5}$	0,28

Phys. Einheiten:

Kraft $1\,N = 1\,\frac{kg \cdot m}{s^2}$

Druck $1\,Pa = 1\,\frac{N}{m^2} = 1\,\frac{kg \cdot m}{s^2 \cdot m^2} = 1\,\frac{kg}{m \cdot s^2}$

Arbeit (Energie) $1\,Nm = 1\,Ws = 1\,J$

Absoluter Schall(druck)pegel

zB: • Hörschwelle des Menschen bei Intensität $J_0 = 10^{-12}\,\frac{W}{m^2}$ (1kHz)

aus J folgt Bewegungsampl. in Luft $\hat{\xi}_0 = \sqrt{\frac{2 J_0}{\omega^2 \varrho \cdot c}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-12}}{4\pi^2 \cdot 10^6 \cdot 1{,}2 \cdot 331}} = 1{,}1 \cdot 10^{-11}\,m$

• Schmerzgrenze d. Menschen bei $J_s = 1\,\frac{W}{m^2} = 10^{-4}\,\frac{W}{cm^2}$ (1kHz)

$\rightsquigarrow \hat{\xi}_s = 0{,}011\,mm$

(!) vgl: $10^{-10}\,m = 1\,\mathring{A}$ (Angström) ≙ 1 Atom Ø

Praktisch liegen Meßwerte der Schallfeldgrößen über viele Größenordnungen ⇝ Einführung eines logarithmischen Verhältnismaßes (=Pegel) meist auf Basis des Schallwechseldrucks, da p leichter meßbar als J

Def: Absoluter Schall(druck)pegel:

Beachte d. Zshng. wegen $J \sim p^2$

$J = \frac{P}{A_\perp}$; $J = \frac{\hat{p}\hat{u}}{2} = \frac{\hat{p}^2}{2\varrho c}$

$$L_N = 20 \cdot \lg \frac{p}{p_0}\ dB \quad \leftarrow \text{Amplitudenverhältnis}$$

$$= 10 \cdot \lg \frac{J}{J_0}\ dB \quad \leftarrow \text{Leistungsverhältnis}$$

mit den Bezugsgrößen: (Normwerte international für Hörschallakustik)

$$\tilde{p}_0 = 2 \cdot 10^{-5}\,Pa \quad \leftarrow \text{Effektivwert!}$$
$$J_0 = 10^{-12}\,\frac{W}{m^2}$$

⇝ zB. Schmerzgrenze $L_{Ns} = 120\,dB$ bei 1kHz ≙ $\frac{p_s}{p_0} = 10^6$ bzw. $\frac{J_s}{J_0} = 10^{12}$

($J_s = 10^{-4}\,\frac{W}{cm^2} = 1\,\frac{W}{m^2}$ bzw. $p_s = 20\,Pa$)

Bem: Die Lautstärke in phon (="hörbare Empfindung") ist ebenfalls als log. Verhältnismaß definiert, allerdings frequenzabhängig mit der Ohr-Empfindlichkeit gewichtet!
Bei f = 1kHz gilt gleicher Zahlenwert für Lautstärke/phon = L_N/dB

Der Mensch differenziert ±1dB ≙ ±1phon
Dynamik des Ohres 1:10⁶ für p bzw. 1:10¹² für J (s. obige Zahlenrechnung)

Bewertung:
- Verdoppelung von p einer Quelle ⇝ L_N steigt um 6 dB (≙ Faktor 2)
- Überlagerung der gleichen p zweier Quellen ⇝ $L_{N\,ges}$ steigt nur um 3 dB (≙ Verdoppelung der Schallenergie)

Schallpegeladdition von 2 verschied. Quellen: erfordert die logarithmische Addition der Quadrate der einzelnen Schalldrücke:

$$L_{N\,ges} = 20 \cdot \lg \sqrt{\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^2 + \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^2} = 10 \lg \left[\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^2 + \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^2\right]$$

(entsprechend Aufsummierung für n-Quellen ...)

TYPISCHE SCHALLPEGEL

(ungefähre Richtwerte, abhängig von der Entfernung der Schallquelle, hier typische Entfernung)

SCHALLPEGEL (dB) SPL	SCHALLQUELLE	GEFAHR	SCHALLDRUCK (Pa) p	SCHALLINTENSITÄT (W/m2) J
0 dB(A)	unvorstellbar leise	vollkommen ungefährlich	0,00002	0,000000000001
10 dB(A)	Blätterrascheln		0.000063246	0,00000000001
20 dB(A)	Ruhe im Radiostudio		0,0002	0,0000000001
25 dB(A)	Atemgeräusch		0.000355656	0,000000000316
30 dB(A)	Flüstern		0.000632456	0,000000001
35 dB(A)	Zimmerventilator		0.001124683	0,000000003162
40 dB(A)	Konzentrationsstörungsschwelle	ungefährlich, aber Konzentrations-störung	0,002	0,00000001
45 dB(A)	ruhige Wohnung		0.003556559	0,000000031623
50 dB(A)	leise Radiomusik, Vogelgezwitscher		0.006324555	0,0000001
55 dB(A)	Radio/TV in Zimmerlautstärke		0.011246827	0,00000031623
60 dB(A)	normales Gespräch, Rasenmäher (10 m Entf)		0,02	0,000001
65 dB(A)	Risikoerhöhung Herz-, Kreislauferkrankung	meist ungefährlich, aber Risikoerhöhung von Erkrankungen	0.035565588	0,00000316228
70 dB(A)	Staubsauger, Haartrockner		0.063245553	0,00001
75 dB(A)	PKW		0.112468265	0.00003162278
80 dB(A)	Starker Verkehr, Dreherei, Bohrerei, LKW		0,2	0,0001
85 dB(A)	unangenehm, bei längerer Einwirkung Gehörschaden	gefährlich bei LÄNGERER Einwirkung (über 40 Std/Woche) Hörschaden	0.355655882	0.00031622777
90 dB(A)	schweres KFZ, Schweißumformer, Handschleifgerät		0.632455532	0,001
95 dB(A)	Holzfräsmaschine, Musik (Kopfhörer)		1.12468265	0.00316227766
100 dB(A)	Kreissäge, Schleifhexe, Discothek		2	0,01
105 dB(A)	Schlagschrauber, Formel 1-Wagen (30 m)		3.55655882	0.03162277660
110 dB(A)	Druckluftmeißel, Kettensäge, Rockkonzert		6.32455532	0,1
115 dB(A)	Bleche hämmern		11.246826504	0.31622776601
120 dB(A)	unerträglich laut, Schmerzgrenze	sehr gefährlich schon bei KURZER Einwirkung Gehörschaden	20	1
130 dB(A)	Niethammer		63.245553203	10
140 dB(A)	Flugzeugstart		200	100
150 dB(A)	Schmiedehammer		632.455532034	1000
160 dB(A)	Geschützknall		2000	10000

dB(A) – angegeben unter Bewertung des Freqenzganges des menschl. Ohres

Schallkennwiderstand und Schallimpedanz

A in einer ebenen Welle (Medium ausgedehnt und rückwirkungsfrei) sind Schalldruck p und Schallschnelle u in Phase!
(gegenüber der Auslenkung ξ ex. 90° Phasenunterschied)

damit ist das Verhältnis von p zu u zu jedem Zeitpkt. und an jeder Stelle des Raumes konstant!

Def.: Schallkennwiderstand: (= Kennimpedanz)

$$\boxed{Z_0 = \frac{p}{u}} \qquad [Z_0] = 1\,\frac{Ns}{m^3}$$

zur Charakterisierung der akustischen Eigenschaften der Stoffe ≙ "Wellenwiderstand"
(elektr. Analogon ist der Wellenwiderstand Z einer el. Leitung...)

Wegen $p = \varrho \cdot u \cdot c$ (Seite 1-9)
wird
Z_0 aus Dichte ϱ u. Schallgeschw. c bestimmbar als Materialkenngröße:

$$\boxed{Z_0 = \frac{\varrho \cdot \cancel{u} \cdot c}{\cancel{u}} = \underbrace{\varrho \cdot c}_{\text{reelle Größe!}} = \sqrt{\frac{\varrho}{\beta_{ad}}}}$$

damit wird zB. $J = Z_0 \cdot \tilde{u}^2 = \frac{\tilde{p}^2}{Z_0}$ (Vgl. Analogie zur E-Technik für Leistung)

bzw. Druckkraft auf eine Fläche A $\quad F = \underbrace{Z_0 \cdot A}_{\text{≙ akust. Widerstand des Mediums auf der Fläche } A} \cdot u$

ZB: Z_0 in

Luft (20°C)	$4{,}14 \cdot 10^2\ \frac{Ns}{m^3}$	Wolfram $104 \cdot 10^6\ \frac{Ns}{m^3}$ (!)
Wasser	$1{,}48 \cdot 10^6$ ~	
Stahl	$45 \cdot 10^6$ ~	(s.a. Tabellen S. 1-16c...)

B liegt keine ebene Wellenausbreitung vor, entsteht Einfluß d. Schallfeldgeometrie!
treten Störungen / Hindernisse / Mediengrenzen auf → Interferenzen...
oder bei merklicher Schallabsorption
entsteht Phasenverschiebung von p zu u im Feld!

Def.: komplexe Schallimpedanz: (= Spezifische Schallimpedanz, = Feldimpedanz)

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{p}}{\underline{u}} = R_s + j \cdot X_s}$$

ZB: a) je nach Phasenlage der reflektierten Welle wird einer Quelle mehr oder weniger Energie entzogen!

b) zB. in der Kugelschallwelle gilt: $\underline{Z} = \frac{\underline{p}(r)}{\underline{u}(r)} = \varrho c \frac{jkr}{1 + jkr}$ $\qquad k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ Wellenzahl

je $r \gg \lambda$ desto $\underline{Z} \to Z_0$ angenähert (ebene Welle) $\qquad r$ – Radiusabstand von der Quelle

Bem: zur Dimension:

$$[Z_0] = [\underline{Z}] = 1\,\frac{Ns}{m^3} \xrightarrow{\text{mit } 1N = 1\frac{kg \cdot m}{s^2}} 1\,\frac{kg \cdot m \cdot s}{s^2\, m^3} = 1\,\frac{kg}{s \cdot m^2}$$

SI-Einheit $\qquad$ veraltete Einheit

(weiterhin veraltet: $1\,\text{Rayl} = 10\,\frac{Ns}{m^3}$)

Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

Unterscheidung erforderlich bei nicht-sinusförmiger Schallabstrahlung bzw. bei Impulsbetrieb wegen λ-abhängiger Ausbreitungsgeschwindigkeit

‖ Fourierreihen-Entwicklung bzw. Fourier-Integral liefern die spektralen Bestandteile nicht-sin-förmiger Wellenabstrahlung!

Amplitudenmaximum liegt dort, wo Phasenunterschiede $\Delta\varphi$ minimal sind.

- **Wenn gleiche Phasengeschwindigkeit $c = \frac{\omega}{k}$ aller Partialwellen:**

  es gilt $\frac{dc}{d\lambda} = 0$ dh. $c(\lambda) = \text{const.}$

  ↳ Max. der Wellengruppe hat gleiche Geschwindigkeit wie die Partialwellen

  ⟹ $\boxed{\text{Welle behält äußere Form bei!}}$

  ‖ nur mgl. wenn Material vollkommen elastisch, keine Energieumwandlung (Dissipation), dh. keine Dispersion: $c \neq f(f)$

- **Wenn frequenzabhängige Phasengeschwindigkeit $c = f(f)$ d. Part.wellen**

  es gilt $\frac{dc}{d\lambda} > 0$ dh. $c\downarrow$ mit $f\uparrow$ bzw. $\lambda\downarrow$

  ↳ Max. der Überlagerung verschiebt sich innerhalb der Wellengruppe

  ⟹ $\boxed{\text{Form des Wellenzugs ändert sich!}}$

  ‖ dies infolge frequenzabhängiger Energieumwandlung, wodurch die Abhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit von der Wellenlänge entsteht; wird bezeichnet als Dispersion: $c = f(f)$ (bzw. $\omega = \omega(k)$)

  Bei sehr großer Dispersion "zerfließt" die Wellengruppe sehr schnell...

Def.: $\boxed{\text{Die Gruppengeschwindigkeit } u = \frac{d\omega}{dk} \text{ ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Maximums der Wellenüberlagerung}}$

Zur Veranschaulichung s. folg. Seite

geg. seien 2 monochromatische Wellenzüge mit λ und λ' (c und c')

In der Schwebung (aus Überlagerung) beider Wellen läuft das Max. mit der gesuchten Gruppengeschw. u:

es ist: ‖ für $t_0 = 0$: Phasengleichheit für Maxima 6 und 7'

nach Zeit Δt: —"— an Einzelmaxima 5 und 6'

dh. Verschiebung beider Wellen gegeneinander...

(Welle mit $\lambda > \lambda'$ ⇝ $c > c'$)

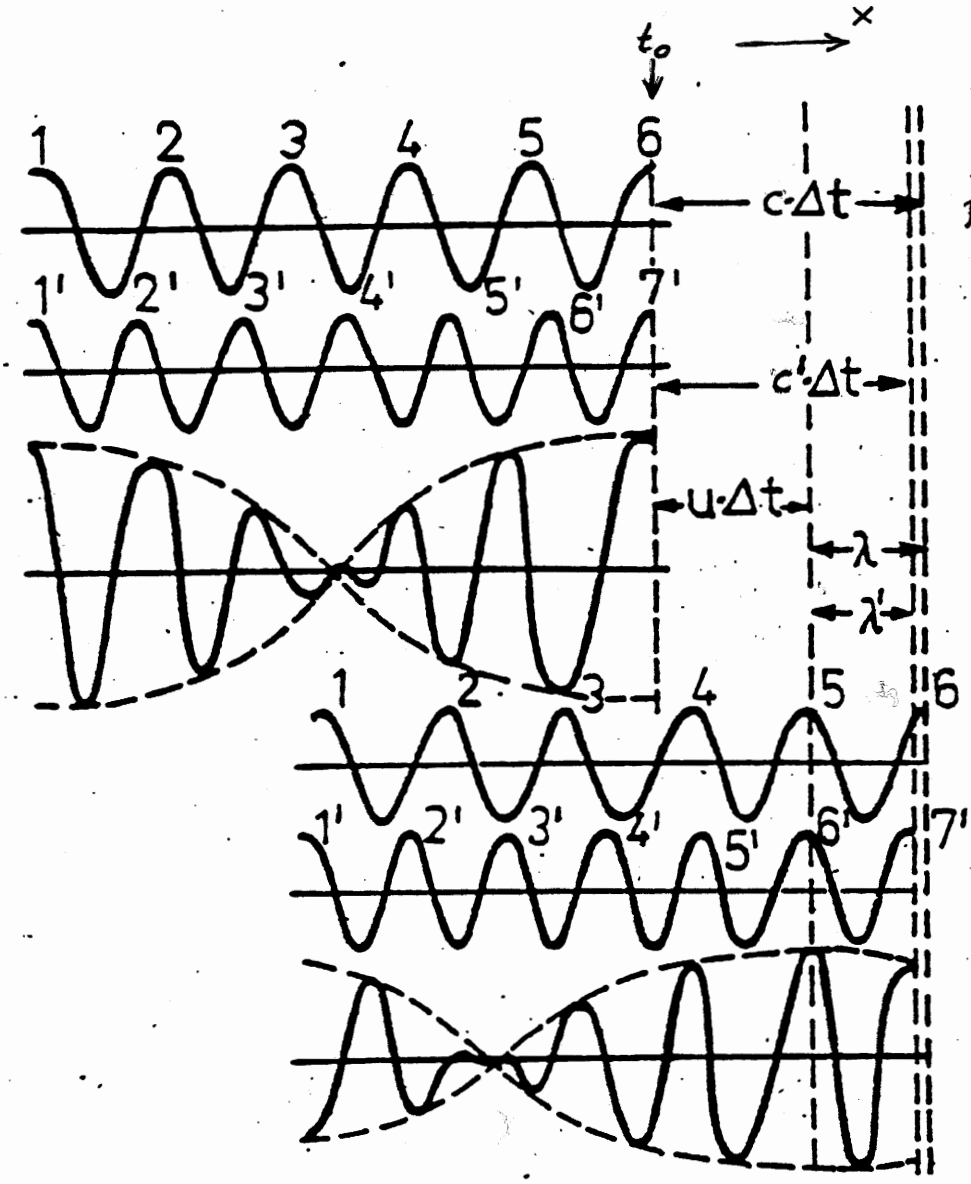
damit wird $\underline{u \cdot \Delta t = c \cdot \Delta t - \lambda} = c' \cdot \Delta t - \lambda'$ (mit $c' = c - \Delta c$ bzw. $\lambda' = \lambda - \Delta\lambda$)

$\Delta t = \frac{\Delta\lambda}{\Delta c}$ eingesetzt, wird die

Gruppengeschwkt. $\boxed{u = c - \lambda \frac{\Delta c}{\Delta \lambda} \quad \text{bzw.} \quad u = c - \lambda \cdot \frac{dc}{d\lambda}}$ in differenz. Form

Bild : Zusammenhang zwischen Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

$\boxed{u < c}$! bei "Normaler Dispersion" der Phasengeschw., dh. bei $\frac{dc}{d\lambda} > 0$!
(negativ mgl. an Resonanzflanken v. Teilchen)



2 Wellen mit Phasengeschw. c und c' :

$c > c'$

Max. der Überlagerung läuft mit Gruppengeschw. u

hier Situation nach Ablauf der Zeit Δt

Max. der Überlagerung hat nur Strecke $u \cdot \Delta t$ zurückgelegt !

Wellenarten – Schwingungsformen

Entstehung der verschiedenen ~ ist abhängig von:
- Art der Anregung (wirkende Kräfte)
- Verhältnis der Abmessungen des Mediums zur Wellenlänge $\frac{L}{\lambda}$

• In unbegrenzten Medien ($L \gg \lambda$)

Longitudinalwellen: Schwingungsrichtung ξ = Ausbreitungsrichtung
= "Kompressionswelle", = "Dichtewelle" weil Größe der Teilvolumina verändert wird (Stauchung – Streckung)
Nur Übertragung von Normalspannungen mgl. (Gase, Flüssigk., Festk.)

Transversalwellen: Schwingungsrichtung $\eta, \xi \perp$ zur Ausbr.richtung
= "Schubwellen", = "Scherwellen" weil nur Formänderung der Teilvolumina auftritt, keine Volumenänderung
(!) Nur in formelastischen Festkörpern mgl., nicht in Flüssigk. Gasen
(!) Polarisation ausführbar, da Schwing.richtung in y- u. z-Richtg. mgl.

• Medium in einer Dimension begrenzt (Mischtypen aus L- und T-Wellen)

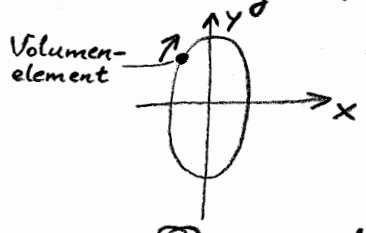
Torsionswellen: in Stäben, Zylindern ...

Biegungswellen: in Platten, Blechen der Dicke $d \ll \lambda$
(!) hier Dispersion $c = f(\omega)$

Dehnungswellen: in Stäben mit $\varnothing \approx \lambda$
hier Querdehnungszahl ϑ zu berücksichtigen!

• An freien Oberflächen von Festkörpern (Oberflächenwellen)

Rayleigh-Wellen: auf Platten mit Dicke $d \gg \lambda$
besteht aus L- und T-Wellen-Bewegungsanteil mit $\Delta\varphi = 90°$
Der Weg eines Oberflächenvoluminas ist als Ellipse beschreibbar:

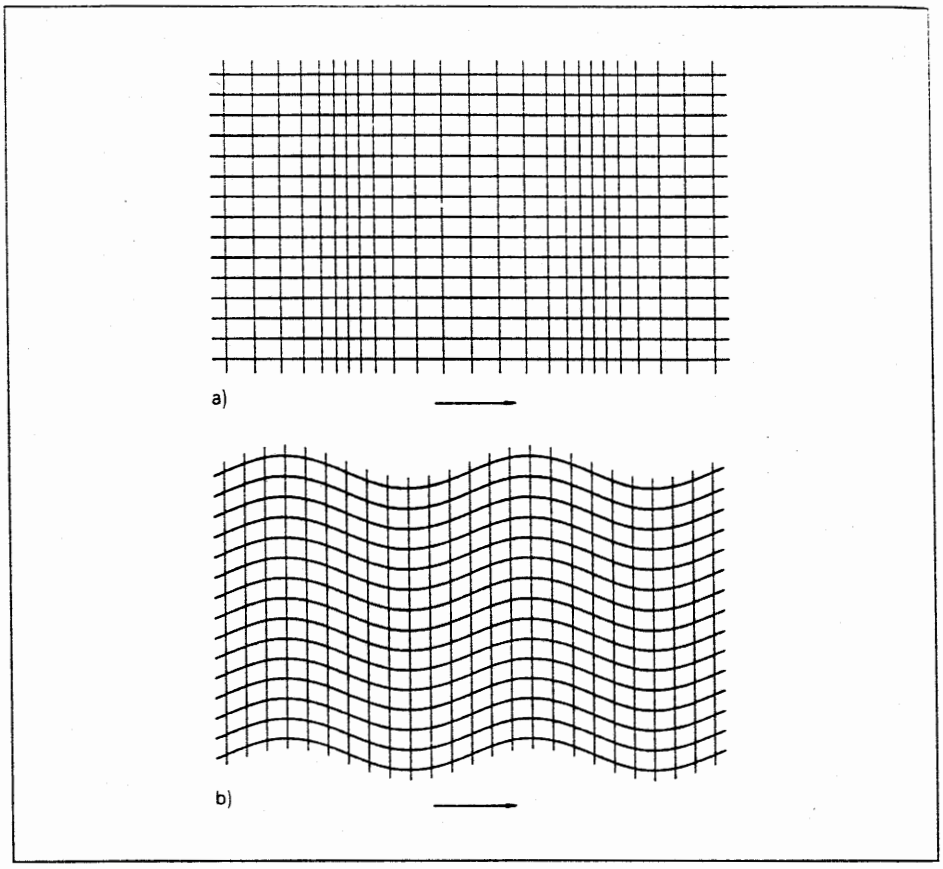


unterscheidliche Amplitude der L- u. T-W.-Anteile aber $\Delta\varphi = 90°$.

Eindringtiefe in Größenordnung von λ_R (gering!)
exp. Abnahme der Bewegungsamplitude mit Tiefe

(!) es ex. keine geschlossene Formel für c_R (s. Abb. S. 1-16b für $c_R/c_T = f$ (Querdehnungszahl ϑ)) ← auch "Poissonzahl"

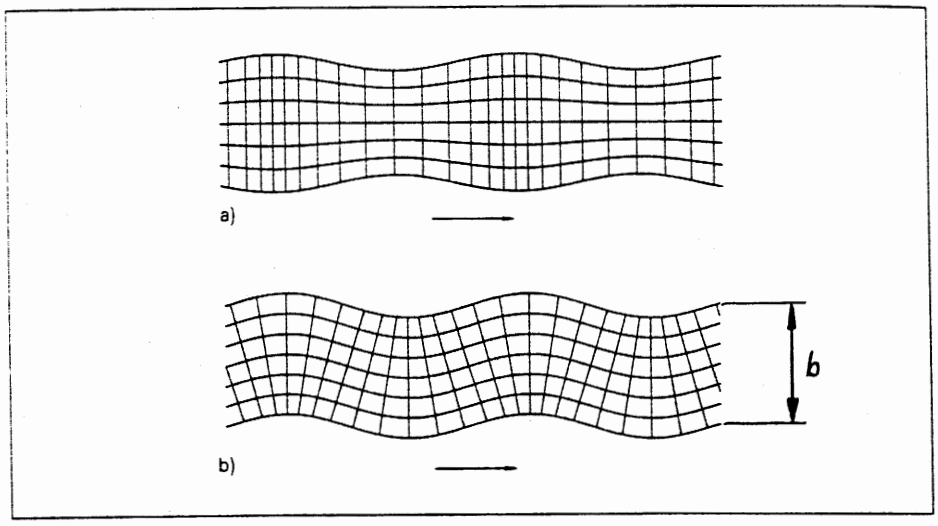
Zu beachten!
- in endlich ausgedehnten Festkörpern besteht das Schallfeld allg. aus verschiedenen o.g. Wellenarten!
- in anisotropen Festkörpern ex. richtungs-/orientierungsabh. phys. Eig.
- verschiedene Schallgeschwindigkeiten, sowie Dispersion $c = f(\omega)$



$$c_L = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho_0}}$$

$$c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}$$

Abb. Schallwellen im unbegrenzten isotropen Festkörper. – **a.** Longitudinal- oder Dichtewelle. – **b.** Transversal- oder Schubwelle.



$$c_D = \sqrt{\frac{E}{\rho_0 \underbrace{(1-\nu^2)}_{\to 1}}}$$

(für sehr dünne Stäbe)

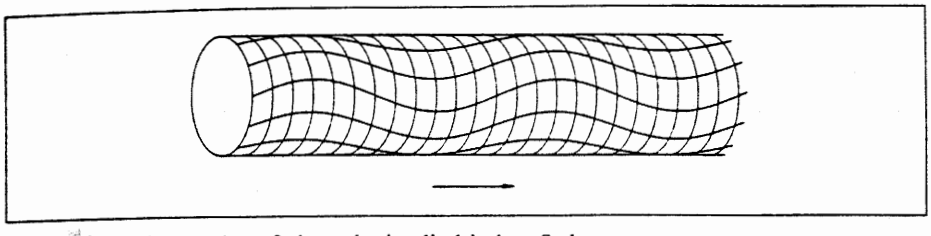
$$c_B = \sqrt{\omega}\,\sqrt[4]{\frac{B'}{\rho_0}}$$

mit

$$B' = \frac{b^2}{12}\,\frac{E}{1-\nu^2}$$

(Biegesteife)

Abb. Wellen auf dünnen Platten oder Stäben. – **a.** Dehnwelle (Quasilongitudinalwelle). – **b.** Biegewelle.



$$c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}$$

Abb. Torsionswelle auf einem kreiszylindrischen Stab.

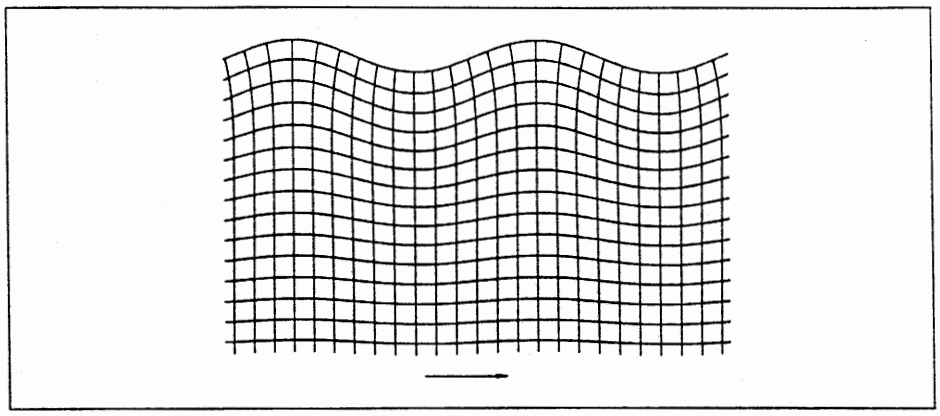


Abb. Oberflächen- oder Rayleighwelle.

für c_R keine geschlossene Lösung !

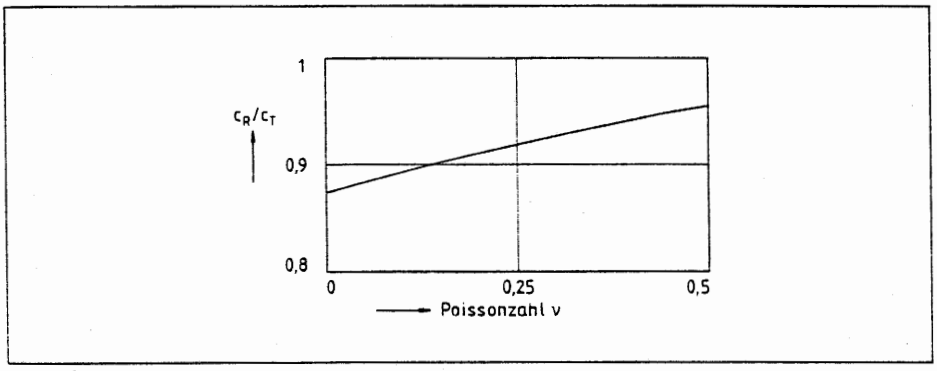


Abb. Verhältnis der Rayleighwellengeschwindigkeit c_R zur Transversalwellengeschwindigkeit c_T als Funktion der Poissonzahl.

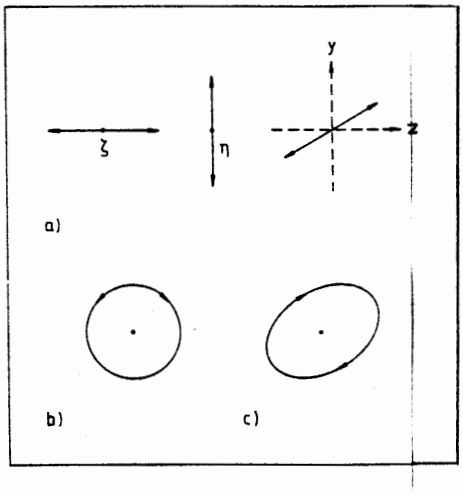


Abb. Polarisation von Transversalwellen. – **a.** Lineare Polarisation. – **b.** Rechts- oder linkszirkulare Polarisation. – **c.** Elliptische Polarisation.

Dichte, Schallgeschwindigkeit und Schallwiderstand einiger Werkstoffe

Werkstoff	Dichte	Schallgeschwindigkeiten km/s		Schallwiderstand Z_0 10^6 kg/(m² s)
	10^3 kg/m³	long. c_l	transv. c_t	$Z_0 = \varrho c_l$
Metalle				
Aluminium	2,7	6,32	3,13	17
Blei	11,4	2,16	0,70	25
Eisen (Stahl)	7,7	5,90	3,23	45
Gold	19,3	3,24	1,20	63
Gußeisen	6,9 ... 7,3	3,5 ... 5,8	2,2 ... 3,2	25 ... 42
Hartmetall	11 ... 15	6,8 ... 7,3	4,0 ... 4,7	77 ... 102
Kadmium	8,6	2,78	1,50	24
Konstantan	8,8	5,24	2,64	46
Kupfer	8,9	4,70	2,26	42
Manganin	8,4	4,66	2,35	39
Magnesium	1,7	5,77	3,05	10
Messing (MS 58)	8,4	4,40	2,20	37
Neusilber	8,4	4,76	2,16	40
Nickel	8,8	5,63	2,96	50
Platin	21,4	3,96	1,67	85
Quecksilber	13,6	1,45	—	20
Silber	10,5	3,60	1,59	38
Wismut	9,8	2,18	1,10	21
Wolfram	19,1	5,46	2,62	104
Zink	7,1	4,17	2,41	30
Zinn	7,3	3,32	1,67	24
Nichtmetalle				
Epoxidharz	1,1 ... 1,25	2,4 ... 2,9	1,1	2,7 ... 3,0
Aluminiumoxid	3,6 ... 3,95	9 ... 11	5,5 ... 6,5	32 ... 43
Eis	0,9	3,98	1,99	3,6
Glas, Flint	3,6	4,26	2,56	15
Glas, Kron	2,5	5,66	3,42	14
Gummi, weich	0,9	1,48		1,4
Gummi, hart	1,2	2,3		2,8
Hartparaffin	0,83	2,2		1,8
Plexiglas	1,18	2,73	1,43	3,2
Polyamid	1,1 ... 1,2	2,2 ... 2,6	1,1 ... 1,2	2,4 ... 3,1
Polystyrol	1,06	2,35	1,15	2,5
Porzellan	2,4	5,6 ... 6,2	3,5 ... 3,7	13
Quarzglas	2,6	5,57	3,52	14,5
Teflon	2,2	1,35	0,55	3,0

Werkstoff	Dichte	Schallgeschwindigkeiten km/s		Schall-widerstand Z_o 10^6 kg/(m² s)
	10^3 kg/m³	long. c_l	transv. c_t	$Z_o = \varrho c_t$
Flüssigkeiten				
Glycerin	1,26	1,92		2,5
Methylenjodid	3,23	0,98		3,2
Dieselöl	0,80	1,25		1,0
Motoröl (SAE 20 u. 30)	0,87	1,74		1,5
Wasser (bei 20 °C)	1.0	1,483		1,5

Schallgeschwindigkeit der Longitudinal- und Transversalwelle

Aus Betrachtung der Wellengleichung mit den 3 mgl. Verschiebungskomponenten ξ (in x-Richtung), η (in y-Richtg.) und ζ (in z-Richtg.) folgt:

⇒ Für ebene Wellen, die in x-Richtg. laufen, gilt unter Berücksichtigung der elastischen Eigenschaften: ← (partielle Ableitungen nach y und z verschwinden)

$$\left.(2\mu+\lambda)\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \varrho_0\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\right\}$$

dh. ξ in Richtung x ≙ Longitudinalwelle

$$\left.\begin{aligned}\mu\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} &= \varrho_0\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\\ \mu\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} &= \varrho_0\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\end{aligned}\right\}$$

hier η und ζ senkrecht zur Schallausbr.richtung x ≙ Transversalwellen

↓ Long. welle $\boxed{c_L = \sqrt{\frac{2\mu+\lambda}{\varrho_0}}}$ Volumenelemente werden in x-Richtung gestreckt u. gestaucht

Transv. welle $\boxed{c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho_0}}}$ Volumenelemente werden nur in der Form geändert (auch: "Schub"- oder "Scher"welle)

Grundsätzlich gilt: $\boxed{c_T < c_L}$!

$\boxed{\mu \text{ und } \lambda}$ beschreiben die elastischen Eigenschaften der Stoffe, sog. "Elastizitätszahlen" (Lamé-Konstanten)

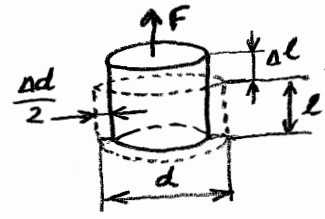
$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

μ – Schubmodul (Gleitmodul) $1\frac{N}{m^2} = 1\,Pa$

E – (Youngscher) Elastizitätsmodul $1\frac{N}{m^2}$

ν – Querdehnungszahl $(0 \leq \nu \leq 0{,}5)$

$$\lambda = \frac{\nu\cdot E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$



$\sigma = \frac{F}{A_\perp}$ Normalspannung

$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ Dehnung

$$\nu = -\frac{\Delta d/d}{\Delta l/l}$$

wobei Querdehnung $\varepsilon_q = \frac{\Delta d}{d} = -\nu\cdot\varepsilon = -\frac{\nu\cdot\sigma}{E}$

mit $0 \leq \nu \leq 0{,}5$ folgt: $\frac{E}{3} \leq \mu \leq \frac{E}{2}$

weiterhin Elastizitätszahl $k_E = 2\mu+\lambda$ (s. Wellengln.) ersetzt den Kompressionsmodul im Festkörper bei Ausbreitung einer L-Welle

$= \varrho_0\cdot c_L^2$

aus c_L, c_T folgt das Verhältnis der Wellengeschwindigkeiten

$$\boxed{\frac{c_L}{c_T} = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}} \geq \sqrt{2}}$$

zB.: $\nu_{Stahl} = 0{,}28 \rightarrow \frac{c_L}{c_T} = \underline{\underline{1{,}82}}$

$\nu_{Alu} = 0{,}34 \rightarrow \frac{c_L}{c_T} = \underline{\underline{2{,}04}}$

dh. hängt nur von der Querdehnungszahl ν ab, und hat mindestens den Wert $\sqrt{2}$!

Schallgeschwindkts.-tabellen

Bem: Umgekehrt können so die elastischen Stoffeigenschaften aus den Schallgeschwindigkeiten bestimmt werden (→ Materialuntersuchg.)

Polarisation möglich für T-Wellen:

- lineare Polarisation: Schwingung in einer definierten Ebene
- Elliptische Pol.: Aus Überlagerung von Wellen, die in y- bzw. z-Richtung pol. sind

zB. 2 Wellen mit $\xi_y = \hat{\xi} \cdot \cos(kx - \omega t)$ und $\xi_z = \hat{\xi} \cdot \cos(kx - \omega t - \delta)$

→ Speziell für
- $\delta = 0°$: Schwingung in 45° der y-z-Ebene
- $\delta = 90°$: Zirkulare Pol.: $\xi_y = \hat{\xi} \cdot \cos kx$ und $\xi_z = \hat{\xi} \cos(kx - \frac{\pi}{2}) = \hat{\xi} \cdot \sin kx$
  (Ellipse → Kreis wg. $x^2 + y^2 = 1$ bzw. $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$)

Zur Übertragung akustischer Schallenergie (Begriffe)

An einem "Hindernis" wird die einfallende Schallenergie anteilig
→ reflektiert
→ absorbiert ("Energieaufnahme")

Ein Teil der absorbierten Energie wird irreversibel in Wärme umgew.:
→ Dissipation

der andere Teil wird als Körperschall weitergeleitet und an anderer Stelle abgestrahlt:
→ Transmission

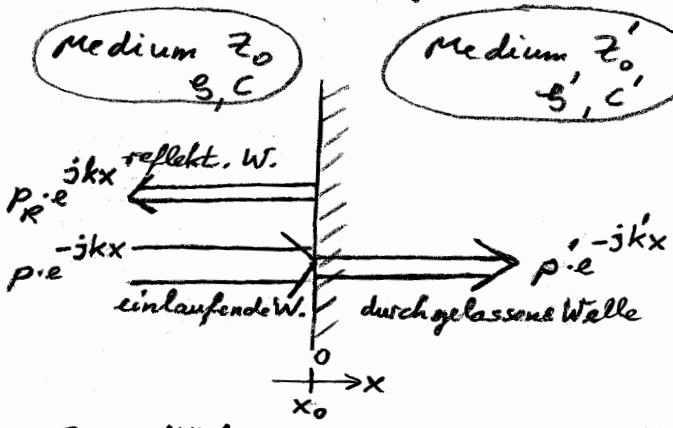
Der Begriff der Dämpfung kommt aus der Schwingungslehre, entspr. Energieentzug.
(! oft synonyme Verwendung von "Dämpfung" / "Absorption" / "Dissipation")

Schalldämmung: ist Grenzschichteigenschaft, nur einen Teil der auftreffenden Schallenergie in das Empfangsmedium zu übertragen. Hierzu näherungsweise unterscheidbar:

- "Große Hindernisse": Auftreffende Energie $\overset{!}{=} \sum$ absorb.- u. gestreuter E
- "Kleine Hindernisse": dargestellt durch "Äquivalenten Streuquerschnitt"
  — jew. gegenüber λ — (hier Beugung / Brechung / Interferenz v. Wellen)

Reflexion und Transmission an Grenzflächen

am Übergang von Wellen durch Grenzflächen, ia. mit verschied. Z_0;
Darstellung mit folg. Bezeichnungen:



Medium, in das eingestrahlt wird (')

Verhältnis der Intensitäten

$$\boxed{J - J_R = J'}$$

Grenzfläche bei $x_0 = 0$ führt harmon. Schwingung aus
durchgelassene- und reflektierte Welle entstehen!

Grenzbedingungen:

Schallschnelle $\boxed{u + u_R = u'}$ ← infolge Bewegung der Gr.fl.

Schalldruck $\boxed{p + p_R = p'}$ ← Druckgleichheit (Wirkung = Gegenwirkung)

- Für die ebenen Wellen in x-Richtung laufend, gelten:

$p = \varrho \cdot c \cdot u = Z_0 \cdot u$; $p' = \varrho' c' \cdot u' = Z_0' \cdot u'$ (hier sind p und u in Phase)

- Für die reflektierte Welle in (−x)-Richtung laufend gilt:

$p_R = -\varrho \cdot c \cdot u_R = -Z_0 \cdot u_R$ (hier sind p_R und u_R gegenphasig)

negatives Vorzeichen!

weil entweder p oder u an Grenzfl. bei Reflexion das Vorzeichen ändern! – je nach Verhältnis Z_0' / Z_0 (s. §1-22)

mit Schallkennwiderständen Umformung für u

$$\boxed{\begin{aligned} u + u_R &= u' \\ Z_0 (u - u_R) &= Z_0' \cdot u' \end{aligned}}$$

bzw. Umformung für p

$$\boxed{\begin{aligned} p + p_R &= p' && \text{(a)} \\ \frac{p - p_R}{Z_0} &= \frac{p'}{Z_0'} && \text{(b)} \end{aligned}} \quad \left(Z_0 = \frac{p}{u} \rightarrow u = \frac{p}{Z_0} \right)$$

Diese Grenzbedingung kann für das Verhältnis der Schalldrücke aufgelöst werden ...

aus Glng. für Druck (a), wobei p' aus Glng. (b) eingesetzt wird, folgt

$$p + p_R = \frac{p}{Z_0} \cdot Z_0' - \frac{p_R}{Z_0} \cdot Z_0'$$

$$p_R + p_R \frac{Z_0'}{Z_0} = p \frac{Z_0'}{Z_0} - p$$

$$p_R (Z_0 + Z_0') = p (Z_0' - Z_0) \qquad \curvearrowright \underline{\underline{p_R}} = p \frac{Z_0' - Z_0}{Z_0 + Z_0'}$$

$\curvearrowright$ der <u>Reflexionsfaktor</u>

<u>Def.:</u>

$$\boxed{R = \frac{p_R}{p} = \frac{Z_0' - Z_0}{Z_0 + Z_0'}} = \frac{\varrho' c' - \varrho c}{\varrho c + \varrho' c'}$$

$\boxed{-1 \le R \le +1:}$

$\underline{\underline{R = 0}}$ bei "Anpassung" $Z_0 = Z_0'$

$R = -1$ für $Z_0' \ll Z_0$ } Vorz. entspr. Phasenlg. p_R, p

$R = +1$ für $Z_0' \gg Z_0$

(s. unten)

(analog für Schallschnelle folgt der Reflexionskoeffizient als

$$\boxed{R_u = \frac{u_R}{u} = \frac{Z_0 - Z_0'}{Z_0 + Z_0'}}$$
)

Nach Einsetzen von $\underline{\underline{p_R}}$ ins Druckgleichgewicht

$$p + p \frac{Z_0' - Z_0}{Z_0 + Z_0'} = p' \qquad \text{folgt}$$

der <u>Transmissionsfaktor</u>

<u>Def.:</u>

$$\boxed{T = \frac{p'}{p} = 1 + R = \frac{2 \cdot Z_0'}{Z_0 + Z_0'}}$$

$\boxed{0 \le T \le 2:}$

$T = 0$ für $Z_0' \ll Z_0$

$\underline{\underline{T = 1}}$ bei "Anpassung" $Z_0 = Z_0'$

$T = 2$ für $Z_0' \gg Z_0$ (weil $\underline{\underline{p' \approx 2p}}$)

(bzw. Transmissionskoeffizient als

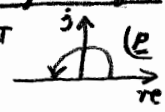
$$\boxed{T_u = \frac{u'}{u} = \frac{2 \cdot Z_0}{Z_0 + Z_0'}}$$
)

(!) <u>Beachte:</u> <u>Vorzeichen von R aus Phasenbeziehungen</u> an der Grenzfläche

$x_0 = 0$:

- Schallharte Reflexion ($Z_0' \gg Z_0$) $\curvearrowright$ an x_0 wird $p_0 \to 2p$ und $u_0 \to 0$ $\Big\|$ $R \approx +1$, $T \approx 2$ — p und p_R an x_0 <u>phasengleich</u>
- Schallweiche Reflexion ($Z_0' \ll Z_0$) $\curvearrowright$ an x_0 wird $p_0 \to 0$ und $u_0 \to 2u$ $\Big\|$ $R \approx -1$, $T \approx 0$ — p und p_R an x_0 <u>gegenphasig</u>

anschaulich: $-1 = e^{j\pi}$



<u>Bem:</u> R und T sind i.a. komplexe Größen $\underline{R} = \hat{R} \cdot e^{j\varphi_R}$ (dgl. $\underline{T}$)
nur reell für ∞-ausgedehntes (ungestörtes) Medium

- R hat pos. und neg. Vorzeichen, entspr. Phasenlage p, p_R an x_0!
- T hat immer pos. Vz., weil für einfallende Welle und durchgelassene Welle jeweils p bzw. u phasengleich sind! (kein Phasensprung an x_0)

Bem: Unter Vernachlässigung der Phasenverhältnisse gilt ein nur positiver "Allgemeiner Amplitudenreflexions-Koeffizient" $R_{ampl} = \left|\frac{\hat{p}_R}{\hat{p}}\right| = \left|\frac{\hat{u}_R}{\hat{u}}\right| = \left|\frac{Z_0 - Z_0'}{Z_0 + Z_0'}\right|$

hier $R_{ampl.} \to 1$ für $Z_0 \gg Z_0'$ oder $Z_0 \ll Z_0'$ } "Fehlanpassung"

Für die Intensität J (Energie die pro Zeiteinheit durch die Flächeneinheit fließt) gilt der

mit $\boxed{J = \tilde{u} \cdot \tilde{p}}$

Reflexionsgrad $\boxed{RG = \frac{J_R}{J} = \frac{u_R \cdot p_R}{u \cdot p} = R_u \cdot R = -\left(\frac{Z_0' - Z_0}{Z_0' + Z_0}\right)^2}$

Transmissionsgrad $\boxed{TG = \frac{J'}{J} = \frac{u' \cdot p'}{u \cdot p} = T_u \cdot T = \frac{4 Z_0 \cdot Z_0'}{(Z_0 + Z_0')^2}}$

~koeff. ~faktor

$-1 \le RG \le 0$
$0 \le TG \le 1$

Für Energien als reelle Größen gilt $\boxed{TG = 1 + RG}$
wobei $RG = -|R|^2$

pos. Vz., weil gilt: $-1 \le RG \le 0$

ZB:

$Z_0' \gg Z_0$:	$R = +1$, $R_u = -1$	$RG = -1$, $TG \to 0$	$T = 2$, $T_u \to 0$	vollkommene Fehlanpassung
$Z_0' \ll Z_0$:	$R = -1$, $R_u = +1$	$RG = -1$, $TG \to 0$	$T \to 0$, $T_u = 2$	
$Z_0' = Z_0$	$R = 0$, $R_u = 0$	$RG = 0$, $TG = 1$	$T = 1$, $T_u = 1$	Anpassung

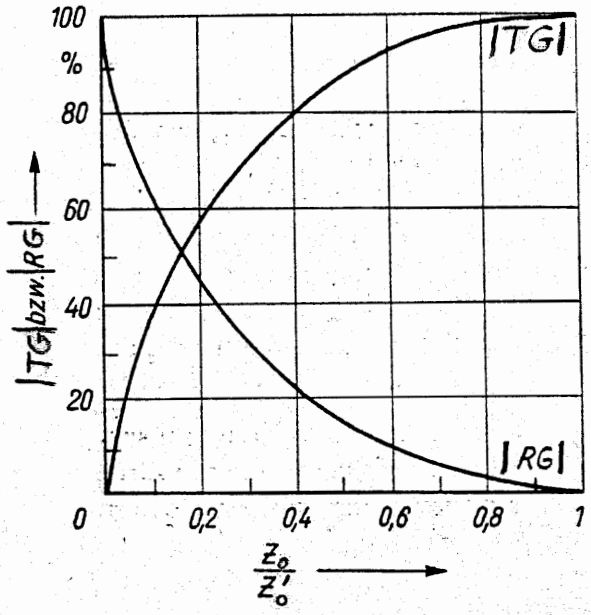
Bem: Allg. Endbegriffe zu Definitionsgrößen:

"~grad": Verhältnis aus Leistungsgrößen

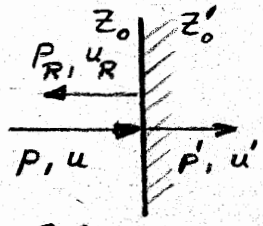
"~faktor": dimensionsloses Verhältnis aus Feldgrößen

"~koeffizient": eigentlich: dimensionsbehaftetes Verhältnis aus Feldgrößen

(!) hier: zur Unterscheidung zum "~faktor" verwendet.



Darstellung für Intensitäten! (übertragene Energien)



Reflexionsgrad ist rein reell!

$$RG = \frac{J_R}{J} = -\left(\frac{Z_0' - Z_0}{Z_0' + Z_0}\right)^2$$

Transmissionsgrad:

$TG = 1 + RG$

Reflexion und Schalldurchlässigkeit an der Grenzfläche zweier Medien in Abhängigkeit von den Schallkennimpedanzen für $Z_0 \leq Z_0'$

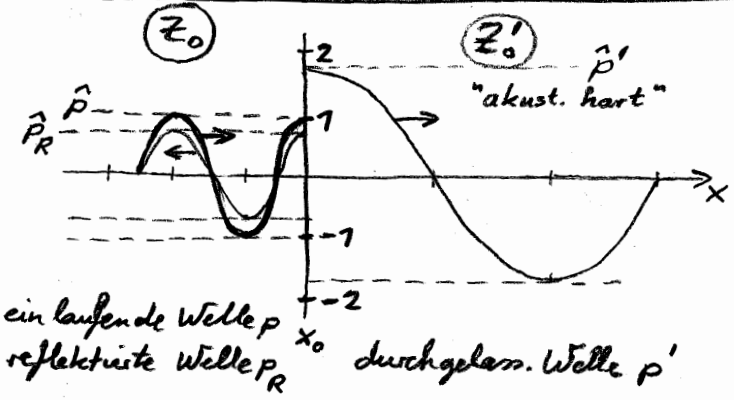
Reflexionsgrad von Schallwellen an der Grenzfläche verschiedener Medien in %

Stoff	$Z_0 \cdot 10^{-6}$ $\left[\frac{kg}{m^2 s}\right]$	Aluminium	Stahl	Nickel	Kupfer	Messing	Blei	Quecksilber	Glas	Quarz	Polystyrol	Bakelit	Wasser	Transformatorenöl
Aluminium	17,0	0	21	24	18	14	3	1	2	0,3	50	42	72	74
Stahl	45,6		0	0,2	0,3	1	9	16	31	27	77	76	88	89
Nickel	49,5			0	0,8	2	12	19	34	29	79	75	89	90
Kupfer	41,8				0	0,2	7	13	19	22	75	71	87	88
Messing	36,1					0	5	10	23	16	73	68	86	87
Blei	24,6						0	1	9	8	62	55	79	80
Quecksilber	19,75							0	4	1	8	6	75	76
Glas	18,05								0	0,8	40	32	65	67
Quarz	15,2									0	46	17	68	71
Polystyrol	2,94										0	1	12	17
Bakelit	3,63											0	18	23
Wasser	1,5												0	0,6
Transformatorenöl	1,28													0

Wellenübergang an Grenzflächen

Für $Z_0 = Z_0'$ (Anpassung) läuft die p- bzw. u-Welle unverändert durch die Grenzfläche!

Für $Z_0 \ll Z_0'$ (Übergang auf akust. hartes Medium), $R \approx +1$



→ einlaufende Welle p
← reflektierte Welle p_R durchgelass. Welle p'

Die Grenzfläche bewegt sich (fast) nicht!

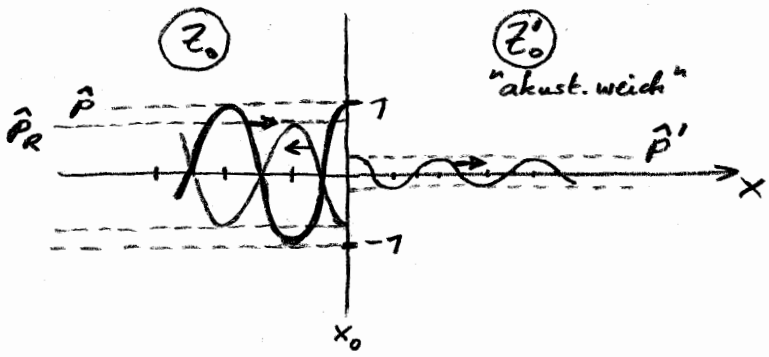
↓ an $x_0 = 0$ gilt:

Überlagerung der phasengleichen p und p_R liefert $p' \approx 2p$
≙ "Druckstau"

wobei Schallschnelle $u|_{x_0} \to 0$
(Phasenumkehr u_R gegenüber u)

Der Schalldruck p' ergibt sich aus der phasengleichen (≈) Überlagerung von einlaufender Welle p und reflekt. Welle p_R an x_0

Für $Z_0 \gg Z_0'$ (Übergang auf akust. weiches Medium), $R \approx -1$



Der Schalldruck an der Grenzfläche → 0, da auf der rechten Seite mit Z_0' (fast) kein Gegendruck aufgebaut wird

↓ an $x_0 = 0$ gilt:

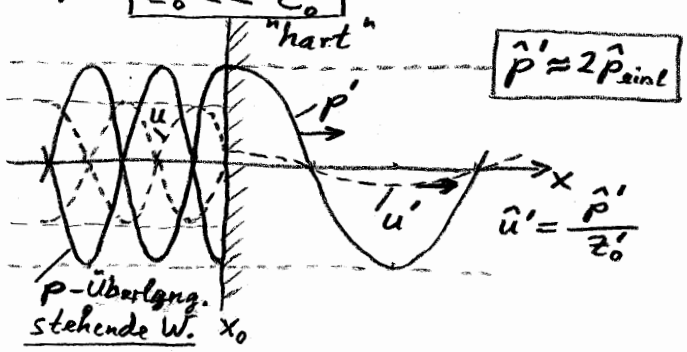
Überlagerung der gegenphasigen p und p_R liefert $p' \to 0$
≙ ≈"freier Schwingung"

wobei Schallschnelle $u|_{x_0} \to 2u$
(u und u_R in Phase)

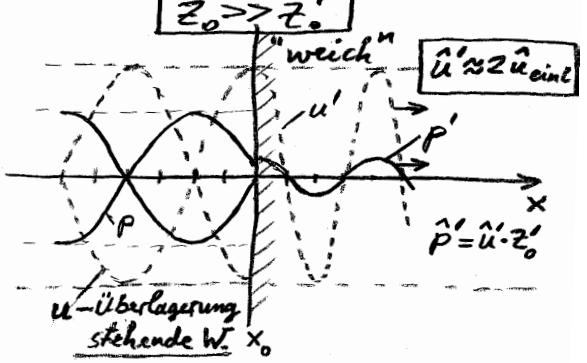
Bem:

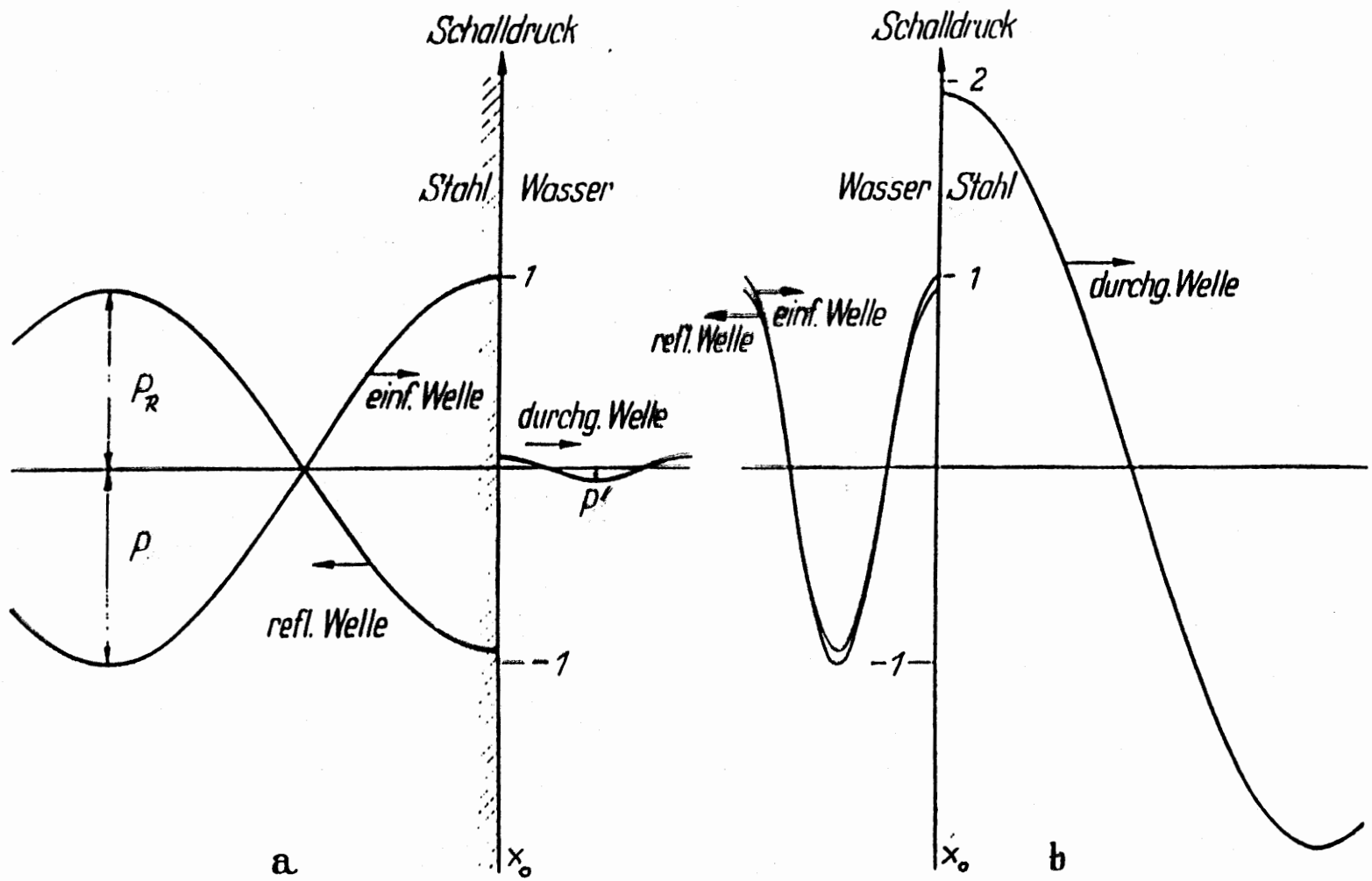
In der linken Seite kann infolge der Überlagerung von einlaufender (→) und reflektierter Welle anschaul. bei großem Unterschied von Z_0 und Z_0' auch eine Darstellung als "stehende Welle" erfolgen: ↓ Übertragung p bzw. u an Grfl:

$Z_0 \ll Z_0'$



$Z_0 \gg Z_0'$





Schalldruckwerte bei Reflexion an der Grenze Stahl/Wasser. Einfallende Welle im Stahl **a** oder im Wasser **b**

Schallabstrahlung durch verschiedene Medien

Anpassung / Fehlanpassung (vgl. Leitungstheorie) werden durch Schall-kennwid. Z_0 bzw. -Impedanz $\underline{Z}$ und akustische-/mechanische Impedanz beschr.

An Grenzflächen:

Brechung: Änderung der Ausbreitungsrichtung infolge c-Änderung, auch in einem Stoff, wenn c temperaturabhängig $= f(x)$ ist. (bezieht sich auf das Empfangsmedium)

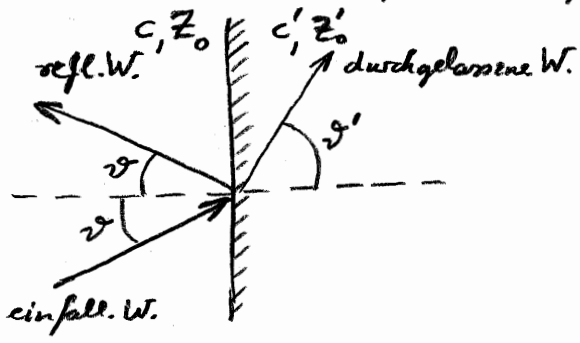
Streuung: Beim Auftreffen von Wellen auf ein "Hindernis" mit anderem Z_0

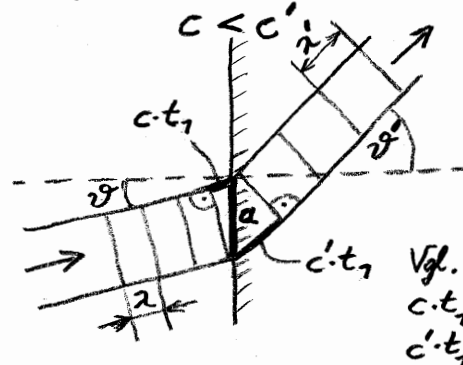
↓ "Beugung" bei geringer Ablenkung der Schallwellen
"Reflexion" bei starker –"–
(bezieht sich auf das Sendemedium)

In der Akustik werden diese Begriffe oft nicht streng getrennt ... !

Reflexion und Brechung an Grenzflächen

hierbei Amplituden-, Phasen-, Richtungsänderung v. Wellen bei $\vartheta \neq 0°$





Vgl. d. Wegstrecken:
$c \cdot t_1 = a \cdot \sin\vartheta$
$c' \cdot t_1 = a \cdot \sin\vartheta'$

Effekt der Brechung:
- Huygen'sches Prinzip: Phasenfläche d. Welle = Einhüllende aller Elementarwellen
- Gleichheit der Wellenspuren an der Grenzlinie a: $k = \frac{\omega}{c}$

aus Grenzbedingungen (Gleichheit der zgw. Normalkomponenten von p und u) wird $\frac{\omega}{c} \cdot \sin\vartheta = \frac{\omega}{c'} \cdot \sin\vartheta'$ und hieraus folgt für den Brechungswinkel ϑ' das

Snellius-Brechungsgesetz:

$$\boxed{\frac{\sin\vartheta'}{\sin\vartheta} = \frac{c'}{c}}$$

alle ∢ ϑ sind auf d. Normale (!) zur Grenzfläche bezogen

und entspr. Ableitung (zB. s. Šutilov S. 159) ergibt sich für den

Winkelabhängigen Reflexionsfaktor:

$$\boxed{R(\vartheta) = \frac{p_R}{p} = \frac{Z_0' \cdot \cos\vartheta - Z_0 \cdot \cos\vartheta'}{Z_0' \cos\vartheta + Z_0 \cdot \cos\vartheta'}}$$

$(R(\vartheta = 0°) \rightarrow R)$

⇒ wobei der Zusammenhang ϑ und ϑ' aus dem Gesetz von Snellius folgt!

($R \approx +1$ für schallharte Gr.fläche / $R \approx -1$ für schallweiche Gr.fl. / $R \rightarrow 0$ für Z_0-Anpassung)

entspr. folgt der

Winkelabhängige Transmissionsfaktor:

$$\boxed{T(\vartheta) = \frac{P'}{P} = \frac{2 \cdot Z_0' \cdot \cos\vartheta}{Z_0' \cdot \cos\vartheta + Z_0 \cdot \cos\vartheta'}}$$

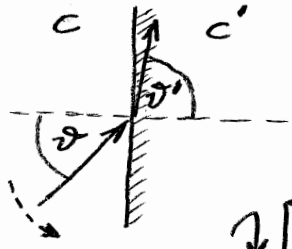
$$T(\vartheta) = 1 + R(\vartheta) \qquad (T(\vartheta = 0°) \to T)$$

Diese Gl. für R und T gelten so nur ohne Transversalwellenausbildung! (zB. nur für Flüssigkeiten)

Die Bedingung für reflexionsfreie Transmission wäre: $Z_0' \cdot \cos\vartheta = Z_0 \cdot \cos\vartheta'$

Erscheinung der Totalreflexion

ist eine vollständige innere Reflexion, hat nichts mit R zu tun!



für $c' > c$ folgt $\vartheta' > \vartheta$

wobei ϑ' nicht $> 90°$ möglich ist!

bei $\vartheta = \vartheta_{grenz}$ ⇒ die gebrochene Welle verschwindet dann, dh. kein Energieeintrag ins Medium mit c' mehr mgl.!

$$\boxed{\vartheta_{grenz} = \arcsin \frac{c}{c'}}$$

wenn $\vartheta' = 90°$ ins Snellius-Gesetz eingesetzt wird.

↓ für größere ϑ geht die gesamte Energie in die reflekt. Welle über!

(zB:) $H_2O \to Al$: $\vartheta_{grenz} = 14°$

Gas → Festkörper: $\leq 3°$ (da $c \ll c'$)

Vollständiger Schallübergang bei $\vartheta \neq 0°$ (Spezialfall)

unter der Voraussetzung $\boxed{\frac{\varrho'}{\varrho} > \frac{c}{c'} > 1}$ oder mit umgekehrtem > Zeichen!
ist auch bei schräger Einstrahlung $R = 0$; $T = 1$ möglich, dh. Einfallswinkel für vollst. durchlässige Grenzsch. mgl.

wenn im Zähler des $R(\vartheta)$-Ausdr.

$$Z_0 \cdot \cos\vartheta' = Z_0' \cdot \cos\vartheta$$

da ϑ und ϑ' über Snellius-Br.Ges. verknüpft

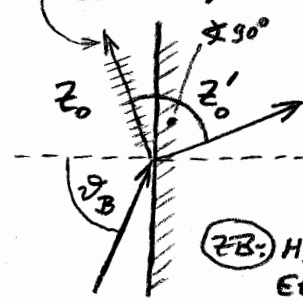
$$\tan\vartheta = \sqrt{\frac{\frac{Z_0'^2}{Z_0^2} - 1}{1 - \frac{c'^2}{c^2}}} = \sqrt{\frac{\frac{\varrho'^2}{\varrho^2} - \frac{c^2}{c'^2}}{\frac{c^2}{c'^2} - 1}}$$

ϑ-Einstrahlwinkel ohne Reflexion!
Für pos. Wurzel der Durchlässigkeitsbedingung folgt o.g. Voraussetzung

für den Brewster'schen Winkel ϑ_B (gebrochener u. "reflektierter" Strahl stehen ⊥ aufeinander) ↓ reflekt. Strahl wird nicht erzeugt inf. nicht mgl. Polarisationsrichtung)

$$\sin\vartheta_B = c \cdot \sqrt{\frac{Z_0'^2 - Z_0^2}{(c \cdot Z_0')^2 - (c' \cdot Z_0)^2}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{c}{c'}\right)^2 - \frac{\varrho'}{\varrho}}{1 + \frac{\varrho'}{\varrho}}}$$

wird nicht erzeugt!

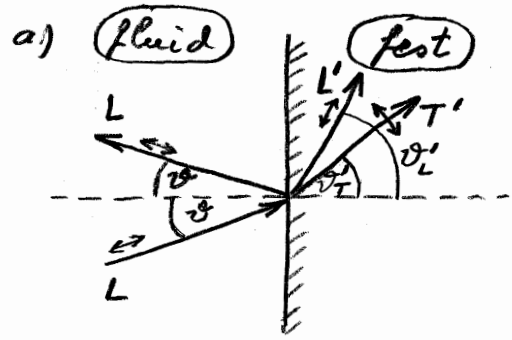


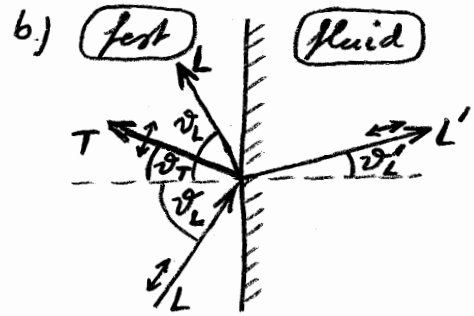
ϑ_B ist der Einstrahlwinkel ohne Reflekt. Welle

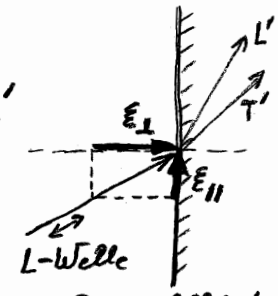
(zB:) H_2O → Diethylphtalat oder Ethanol → Chloroform

Wellenmoden – Wandlung an Grenzflächen

entsteht bei <u>schrägem Einfall</u> auf Grenzschicht mit mindestens einem Festkörper: <u>L</u>ongitudinal- <u>und</u> <u>T</u>ransversalwellen







aus L-Welle gebildete <u>Komponenten</u> der Teilchenbewegung für L- u. T-Wellenerzeugung im Festkörper (Prinzip)

Im Festkörper nicht nur Druckkräfte, sondern <u>auch Tangentialkräfte</u> (Scherkräfte) übertragbar!

↓ L-Welle wandelt sich teilweise in T-Welle um
T-Welle (mit Schwingungsrichtung in der Einfallsebene) wandelt sich entspr. auch in L-Wellenanteil um

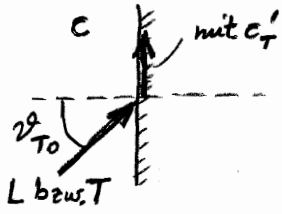
<u>Bem:</u> Für T-Wellen in Schwingungsrichtung <u>⊥ zur Einfallsebene</u> entstehen <u>keine</u> L-Wellen, dh. bisherige Darstellungen für R und T gelten weiterhin.

(!) Wegen der Wellenmoden-Wandlung gilt für <u>alle Wellentypen mit den entsprechenden c_i</u> das

<u>Verallgemeinerte Snellius' Brechungsgesetz:</u>

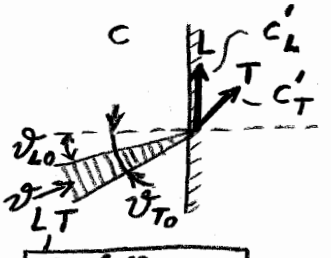
$$\boxed{\frac{\sin\vartheta_i}{\sin\vartheta_k} = \frac{c_i}{c_k}}$$

Totalreflexion nun in mehrfacher Weise betrachtbar:



für $c_T' > c$ erfolgt <u>kein Eindringen von Schall</u> in den Festkörper, (c_L ist $> c_T$)

falls Einfallsϡ $>$ $\boxed{\vartheta_{T0} = \arcsin\left(\frac{c}{c_T'}\right)}$ Grenzϡ für T-Welle



wenn Einfallsϡ $<$ ϑ_{T0} (Grenzϡ für T-Welle)

aber noch $>$ $\boxed{\vartheta_{L0} = \arcsin\left(\frac{c}{c_L'}\right)}$ Grenzϡ für L-Welle

(nur für $c_L' > c$ mgl.), dann entsteht im Festkörper eine <u>reine Transversalwelle</u>!

dies ≙ praktische Methode zur Erzeugung von T-Wellen!

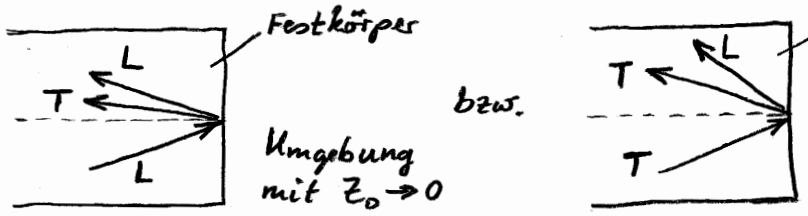
bei Bild a) gilt für die Bewegungsamplituden der gebrochenen L- und T-Welle

$$\boxed{\frac{\hat{\xi}_L'}{\hat{\xi}_T'} = -\frac{c_L' \cdot \cos 2\vartheta_T'}{c_T' \cdot \sin 2\vartheta_L'}}$$

wobei $\xi_L \sim$ Druck(spannung)
$\xi_T \sim$ Schubspannung

Reflexion an der "freien" Grenzfläche

als wichtiger Grenzfall,
zB. an metall. Wellenleiter grenzt Medium mit $Z_0 \to 0$ an (Gase)
dh. praktisch kein Schalldurchgang, nur reflektierte Anteile!



es gilt (Snellius)

$$\frac{\sin\vartheta_L}{\sin\vartheta_T} = \frac{c_L}{c_T}$$

hierfür gelten folg. Verhältnisse der elastischen Spannungen (bzw. der Elongationen ξ_i) in der L- und T-Welle:

Tab. Schallreflexion an der freien Oberfläche eines Festkörpers. Die elastische Spannung in der einfallenden Welle ist jeweils gleich eins gesetzt. $\hat{=} R(\vartheta_L, \vartheta_T)$

Primärwelle	Relative Zug- bzw. Schubspannung in der reflektierten Longitudinalwelle	Transversalwelle
Longitudinal	$\frac{c_T^2 \sin(2\vartheta_L)\sin(2\vartheta_T) - c_L^2\cos^2(2\vartheta_T)}{N}$	$\frac{-2c_T^2 \sin(2\vartheta_L)\cos(2\vartheta_T)}{N}$
Transversal	$\frac{c_L^2 \sin(4\vartheta_T)}{N}$	$\frac{c_T^2 \sin(2\vartheta_L)\sin(2\vartheta_T) - c_L^2\cos^2(2\vartheta_T)}{N}$
mit $N = c_T^2 \sin(2\vartheta_L)\sin(2\vartheta_T) + c_L^2\cos^2(2\vartheta_T)$		

Bem: Eine vollständige Wellentypumwandlung für einfallende L- bzw. T-Wellen tritt auf, wenn Zähler = 0 für L-L- bzw. T-T-Reflexion,

dh, wenn $c_T^2 \cdot \sin(2\vartheta_L) \cdot \sin(2\vartheta_T) = c_L^2 \cdot \cos^2(2\vartheta_T)$

wird die L-Welle vollständig in eine T-Welle transformiert!
(u.u.)
$\hat{=}$ praktischer Möglichkeit zur Erzeugung von T-Wellen

dies gilt für Materialien mit Querkontraktionszahl $\nu < 0{,}263$
damit für $\frac{c_T}{c_L} > 0{,}567$

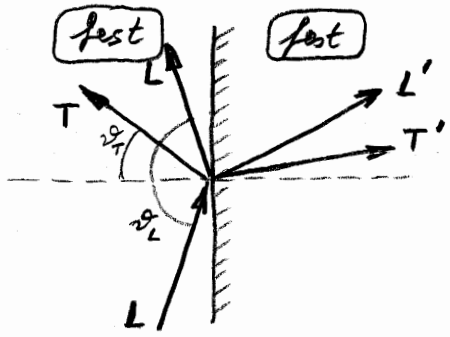
Zusammenfassung: keine Wellentypumwandlung tritt auf, wenn:

1.) die primäre Welle transversal ist und gleichzeitig ihr Einfallswinkel $\measuredangle > \vartheta_0 = \arcsin\left(\frac{c_T}{c_L}\right)$ ist, dh. Grenzwinkel für Verschwinden der L'-Welle erreicht.

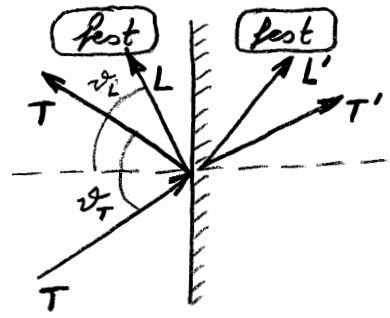
2.) beliebiger Einfall einer T-Welle, die ⊥ zur Einfallsebene polarisiert ist (Verschiebungsrichtung ∥ zur Grenzfläche)
es entstehen hierbei nur reflektierte- und gebrochene T-Welle.

3.) normaler Einfall einer ebenen Welle beliebigen Typs auf eine ebene Grenzfläche.

Reflexion und Brechung an Grenzfläche fest – fest



Eingestrahlte L-Welle



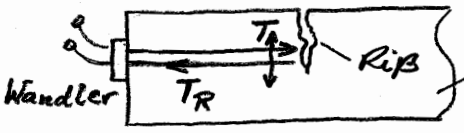
Eingestrahlte T-Welle

(!) Kraftschlüssige Verbindung der 2 Medien erforderlich!
↳ für Reflexion und Brechung je eine L- und T-Welle.
(– nicht für Schwingungsrichtung ∥ zur Grenzfläche –)

In der Ultraschall-Prüftechnik

werden $\boxed{\text{T-Wellen}}$ bevorzugt zur Prüfung auf Risse verwendet:

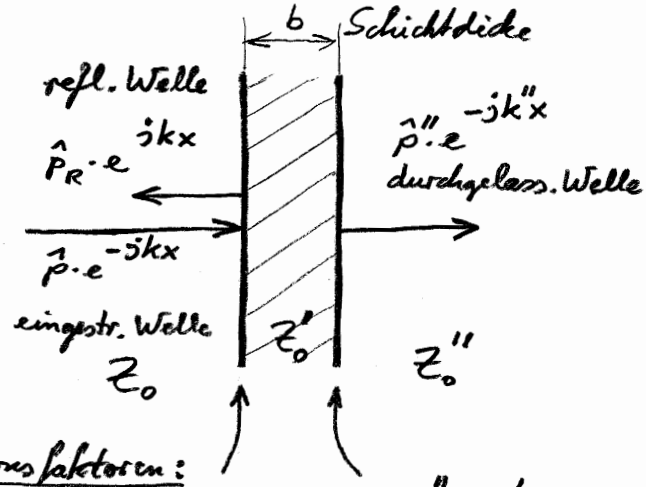
- ohne Form-/Kraftschlüssige Verbindung können T-Wellen nicht übertragen werden: $T \to 0$
- dagegen werden L-Wellen über Koppelflüssigkeiten gut übertragen (Wasser ... Öl in den Rissen)



Werkstück: T-Welle wird sehr gut reflektiert: T_R

↳ höherer und sicherer Meßeffekt gegenüber L-Wellen, höhere Prüfsicherheit!

Schalldurchgang durch Schichten / Platten



hier 2 Grenzschichten mit Reflexionsfaktor R u. R' (jeweils gilt $T = 1 + R$)

Überlagerung der einzelnen Wellen nur unter Berücksichtigung der Phasenlage mgl.! für Reflexion u. Transmiss.

↯ Verstärkung oder Schwächung treten auf – periodisch mit Änderung von b (bzw. f)

2 Reflexionsfaktoren:

hier senkrechter Einfall betrachtet

$$R = \frac{Z_0' - Z_0}{Z_0' + Z_0} \qquad R' = \frac{Z_0'' - Z_0'}{Z_0'' + Z_0'}$$

Mit den Wellengleichungen unter Berücksichtigung von R und R' folgt für senkrechten Einfall der

gesamte Reflexionsfaktor der Schicht

$$\boxed{R_{ges} = \frac{p_R}{p} = \frac{R + R' \cdot e^{-j \cdot 2k'b}}{1 + R \cdot R' \cdot e^{-j2k'b}}}$$

mit k' – Kreiswellenzahl in der Schicht
λ' – Wellenlänge – " –
$\left(k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}\right)$

bzw. der

gesamte Transmissionsfaktor der Schicht

$$\boxed{T_{ges} = \frac{p''}{p} = \frac{(1+R)\cdot(1+R')}{1 + R \cdot R' \cdot e^{-j2k'b}} \cdot e^{-jk'b}}$$

Nach Einsetzen der Schallkennwiderstände (Materialkenngrößen) folgt die gut auswertbare Darstellung für das Intensitätsverhältnis, dh. den Transmissionsgrad:

$$TG_{ges} = \frac{J''}{J} = \frac{4 \cdot \frac{Z_0''}{Z_0}}{\left(\frac{Z_0''}{Z_0} + 1\right)^2 - \left(\frac{Z_0''^2}{Z_0'^2} - 1\right)\left(\frac{Z_0'^2}{Z_0^2} - 1\right) \cdot \sin^2 k'b}$$

Damit sind verschiedene Schichtdicken b in ihrer Auswirkung auf die Transparenz der Schicht unter Berücksichtigung der vorliegenden Schallkennwiderstände betrachtbar:

Fall A wenn $k'b \ll 1$ $(b \ll \lambda)$, dh. sehr dünne Schicht (trivial),
wenn $k'b = n \cdot \pi$ (wobei $\sin k'b = 0$)

dh. bei $b = n \cdot \frac{\lambda}{2}$ ganzzahlige Vielfache von $\lambda/2$ $n = 0, 1, 2 \ldots$ ganzz.

$$\curvearrowright TG_{ges} \approx \frac{4 \cdot Z_0''/Z_0}{\left(Z_0''/Z_0 + 1\right)^2} = \frac{4 \cdot Z_0 \cdot Z_0''}{\left(Z_0 + Z_0''\right)^2} \neq f(Z_0')$$

das Ergebnis ist hierfür unabhängig von den Eigenschaften der Zwischenschicht! wird nur von Z_0 u. Z_0'' der anliegenden Stoffe bestimmt $\curvearrowright$ ≙ Grenzschicht $Z_0 \| Z_0''$ (vgl. TG auf S. 7-27)

Fall B wenn $\sin k'b = 1$

dh. bei $b = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$ ungeradzahlige Vielfache von $\lambda/4$

$$\curvearrowright TG_{ges} = \frac{4 \cdot Z_0 \cdot Z_0''}{Z_0'^2 \left(1 + \frac{Z_0 \cdot Z_0''}{Z_0'^2}\right)^2}$$

hieraus kann Z_0' der Zwischenschicht so bestimmt werden, daß bei verschiedenen Z_0 und Z_0'' letztlich $TG_{ges} = 1$ wird!

Dies ist die sogenannte **Wellenwiderstandsanpassung** auch: $\lambda/4$-Transformation ≙ Transformationsglied für verschiedene Z_0

Bei Betrachtung von TG_{ges} folgt für den Wert Z_0' der Zwischenschicht

$$\boxed{Z_0' = \sqrt{Z_0 \cdot Z_0''}}$$ womit $TG_{ges} = 1$ wird!

Hiermit ist über $\lambda/4$-Schichten eine Anpassung verschiedener Medien (Z_0 und Z_0'') zur Verbesserung der Energieübertragung ausführbar.

(zB:) Ultraschallwandler mit hohem Z_0 auf H_2O mit kleinerem Z_0 über $\lambda/4$-Schicht angepaßt.

Problem: $\lambda/4$-Schicht ist frequenzangepaßt!

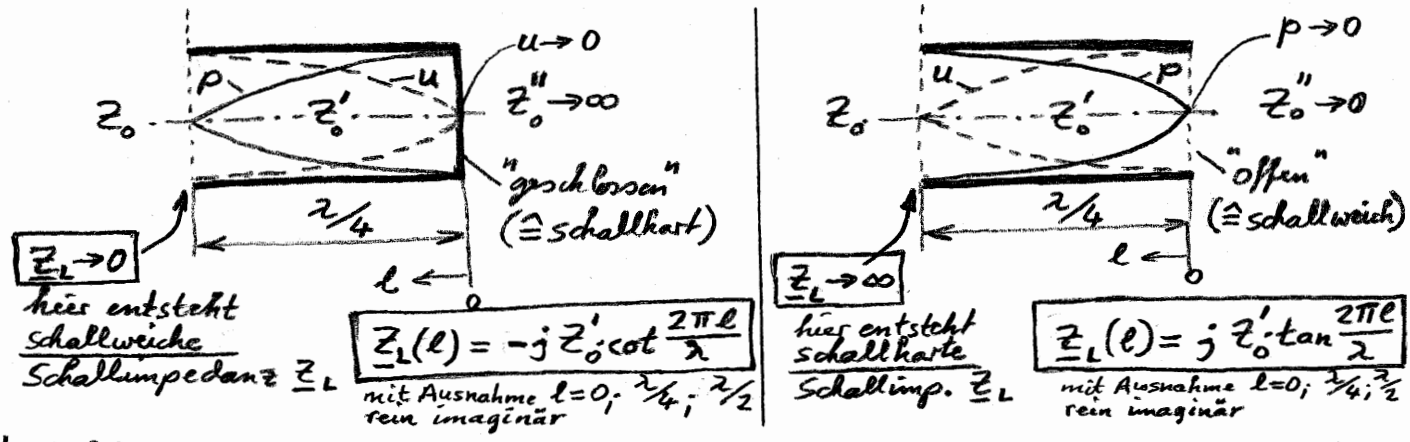
$\curvearrowright$ für breitbandige Anpassung sind Übergangsschichten mit Gradienten für Z_0' über dem Weg x erforderlich, wobei $Z_0'(x)$ an den Übergangsstellen zu Z_0 bzw. zu Z_0'' jeweils diesen Schallkenn wid.-werten entsprechen muß.

Im einfacheren Fall werden mehrere $\lambda/4$-Schichten aufeinanderfolgend angeordnet...

Vgl: Vergütung / Entspiegelung optischer Linsen entsprechend gelöst!

Darstellung der Schalldruck p- und Schnelle u-Verläufe in $\lambda/4$-Schichten zur Veranschaulichung der Z_0-Transformation:

(zB:) Luft in Metallzylinder bzw. $\lambda/4$-Stück mit beliebigem Z_0' betrachten:



Infolge der Grenzflächen entstehen stehende Wellen über der Länge der Zwischenschicht → in der $\lambda/4$-Schicht kehren sich die Verhältnisse von p und u um! Damit Änderung von $\underline{Z}_L = f(l)$

(Vgl. bei elektr. Leitungstheorie Wellenwiderstand $Z = \frac{u}{i}$ und entspr. u - i - Verläufe zB. bei einer 2 Draht-Leitung)

Bem: eine $\lambda/2$-Schicht (bzw. Leitung) transformiert zwischen beiden Enden nicht – unabhängig von der eigenen Impedanz Z_0'! (vgl. Fall A)

Fall C wenn auf beiden Seiten der Schicht der gleiche Stoff angrenzt

dh. bei $Z_0'' = Z_0$, damit ist $R' = -R$ für gegebenes Z_0' der Dicke b

dann wird der Transmiss.-faktor

$$T_{ges} = \frac{1}{\cos k'b + j \cdot \frac{1+R^2}{1-R^2} \underbrace{\sin k'b}}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$$

es geht $\sin k'b \longrightarrow 0$ für $b = \frac{\lambda}{2}$

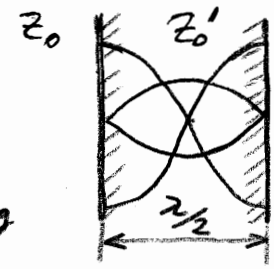
↷ für $b = n \cdot \frac{\lambda}{2}$ verschwindet der Im-Anteil und es wird $T_{ges} = 1$

(und deren ganzzahlige Vielfache) $n = 1, 2, 3 \ldots$

Dies ist die sog. **Dickenresonanz der Schicht** auch: $\lambda/2$ - Resonanz ≙ Schwingkreiswirkung in der Systembetrachtung

hierbei entsteht völlige Transparenz der Schicht bei beliebigem Z_0'.

Die Resonanz entsteht durch phasenrichtigen Anschluß der zwischen den $\lambda/2$ - auseinanderliegenden Grenzflächen hin- und her reflektierten Wellenzüge:



Grundmode der stehenden Halbwellen bei $b = \frac{\lambda}{2}$ (sonst bei n Halbwellen)

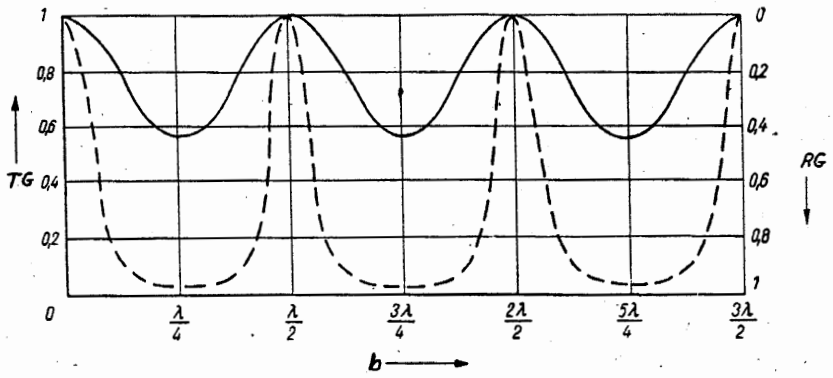
"feste" Wand, wenn $Z_0' \ll Z_0$ ↓ Druckmaxima an den Grenzen

"bewegl." Wand, wenn $Z_0' \gg Z_0$ ↓ Schnellemaxima an den Grenzen

Darstellbar als Platten - $\lambda/2$ - Dickenschwingung für u oder p

Die Resonanzen sind umso ausgeprägter (dh. schmalbandiger), je größer die Fehlanpassung der anliegenden Stoffe ist, damit steigt der Wand-Reflexionsfaktor, ↘ geringere Dämpfung der Plattenschwingung!

f_{res} bei $\frac{\lambda}{2}$ - Anregung



← für $\frac{Z_0'}{Z_0} = 2$ ——

← für $\frac{Z_0'}{Z_0} = 10$ - - - -

Reflexion und Durchlässigkeit von Platten in Abhängigkeit vom Verhältnis Plattendicke zur Wellenlänge

Bem: das Maximum von T_{ges} (bzw. TG) ist immer $= 1$! unabhängig vom Verhältnis Z_0'/Z_0

(Bei sehr großem Z-Unterschied → Reflexion!, vgl. "freie" Grenzfl.)

Transmission (von Wänden) in der Bauakustik

für kleine Schichtdicken $b \ll \lambda$ wird in Glng. für T_{ges} } $\cos k'b \to 1$, $\sin k'b \to k'b$ ersetzbar

↘ mit $Z_0' \gg Z_0$ (Z_0 zB. Luft)
≙ schwerer Lärmschutzwand
(Massenträgheit maßgebend)

$$\boxed{T_{ges} \approx \frac{1}{1 + j\frac{\omega \cdot m'}{2 Z_0}}}$$

mit m' = Masse der Schicht/Fläche

mit $Z_0' \ll Z_0$ (Z_0' zB. Luft)
≙ Luftisolierschicht zur Schalldämmung in Wänden
(Federung maßgebend)

$$\boxed{T_{ges} \approx \frac{1}{1 + j\frac{\omega \cdot n' \cdot Z_0}{2}}}$$

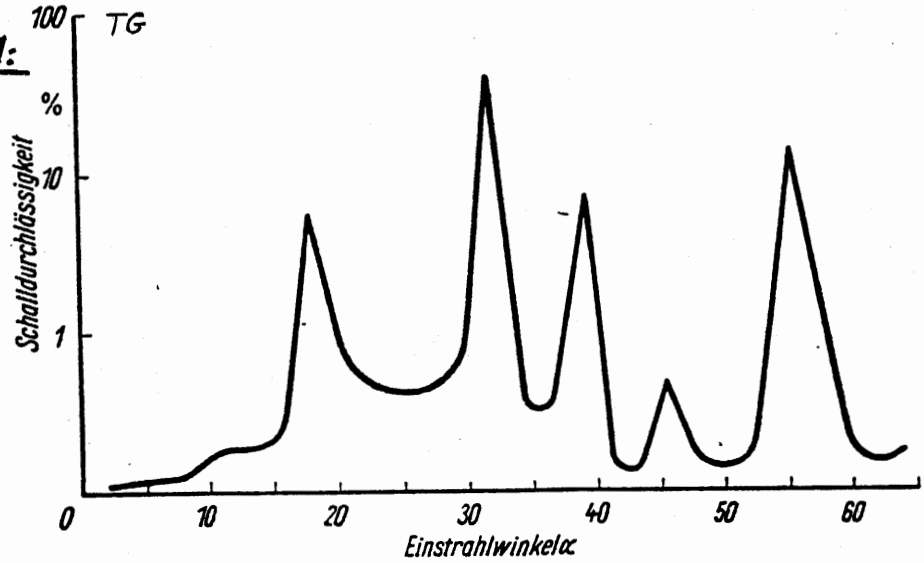
mit $n' = \frac{b}{\rho' c'^2}$ Federnachgiebigkeit der Schicht

Beides sind Tiefpaßfilter! für das transmittierte Schallsignal.

(Dies gilt nur bei Außerachtlassung des Körperschalls ...)

Das Zusammenwirken verschiedener phys. Effekte führt zu:

Beispiel 1:

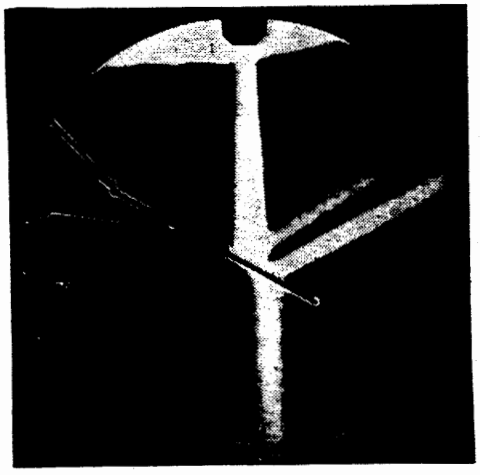


Schalldurchlässigkeit eines Bleches bei verschiedenen Einstrahlwinkeln

Bedingt durch: Anregung von Schubwellen, Oberflächenwellen, Biegewellen mit versch. Schallgeschw.

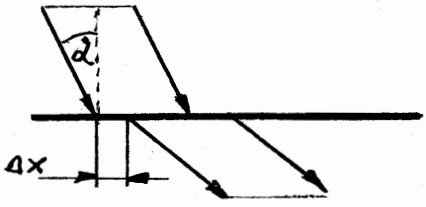
↓ Schalldurchlässigkt.: $= f(\text{Dicke}, f, \sphericalangle \vartheta)$

Beispiel 2:



Schalldurchlässigkeit einer dünnen Platte mit Versetzung der Strahlachse und teilweiser Reflexion (nach Martin)

Bündelversetzung: tritt auf, wenn über α eine Phasenänderung $\partial\varphi$ von R bzw. T auftritt



$$\Delta x \sim \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha}{k}$$

Fokussierung von Ultraschall, akust. Linsen

wie in Optik
- Schallfokussierung → Sammellinsen
- Schalldivergierung → Zerstreuungslinsen :

Beachte:
Verhältnis der Schallgeschw.

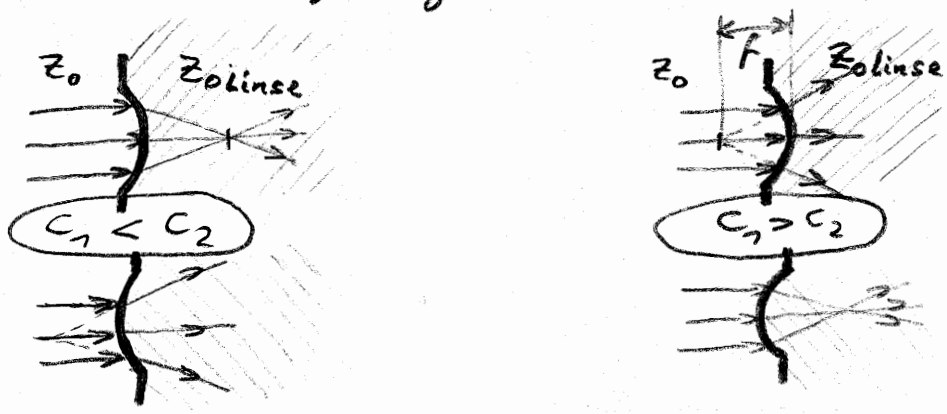


Bild Fokuss., Brennpkt.

Für reflexionsarme Linsen $\boxed{Z_0 \overset{!}{=} Z_{0\,Linse}}$ als Forderung,

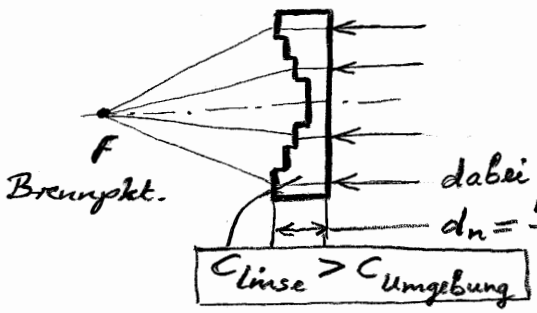
bzw. umgekehrt bei großem Impedanzsprung ↯ gute Spiegel

(!) In der Akustik liefert die Strahlengeometrie im Vergleich zur Optik (Geometrischen Optik / Strahlenoptik) nur näherungsweise Ergebnisse!
(hierbei Vernachlässigung der Welleneigenschaften ↯ Probleme aus Beugung, Auflösungsvermögen, Interferenz, Polarisation, Absorption und Streuung sind nicht darstellbar)

dies folgt aus:
- Vernachlässigung der endlichen λ gegenüber den Abmessungen der Meßanordnung
- Vernachlässigung von Beugungserscheinungen

↯ in der Praxis exist. ausgedehnte Fokalzonen / Brennräume i.Vgl. zur Optik

Abgestufte Linsen



hier Linsenform durch Stufenprofil angenähert
(vgl.: Sammellinse mit einer konvexen Oberfläche! in Optik üblich)

dabei jew. auch mgl., Abstufung so zu gestalten, daß
$d_n = \frac{n \cdot \lambda}{2}$ (jeweils Dickenresonanz) ↯ vollst. Transparenz
sog. "Resonanzlinse"

ebenso nutzbar
Hohlspiegel (wie in Optik) konkav, konvex, zylindrisch mgl.

Fokussierung v. Ultraschall:

Erzeugung hoher Schallintensität:

- sphärisch
- zylindrisch

gekrümmte Schallsender

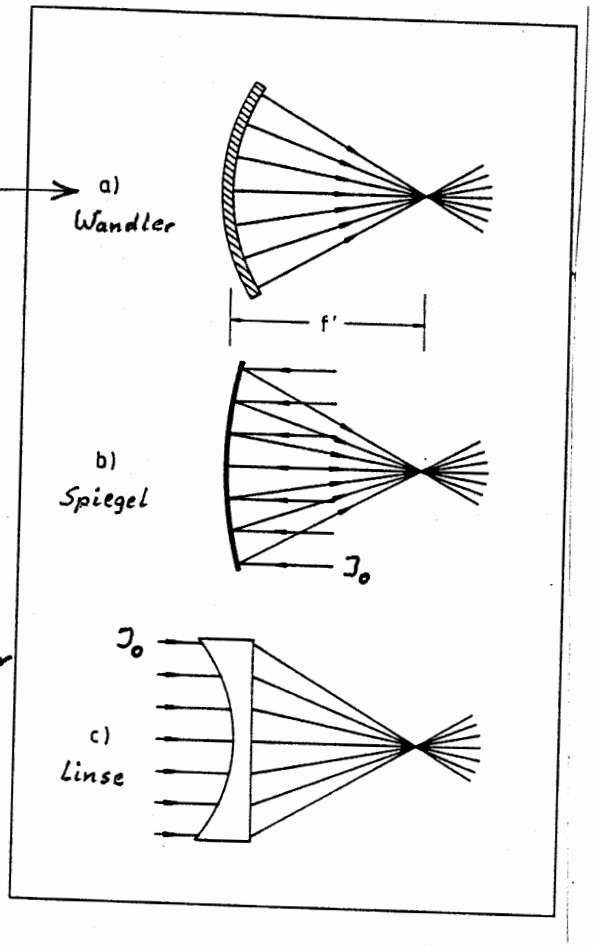


Abb. Fokussierung von Ultraschall. – **a.** Mit einer kalottenförmigen oder zylindrischen Piezokeramik. – **b.** Mit einem Hohlspiegel. – **c.** Mit einer Ultraschallinse.

Zur Energiedichte im Brennpunkt:

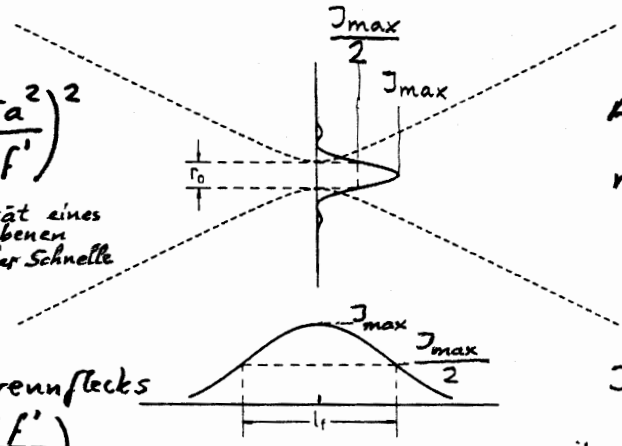
endlicher Wert

Verteilung ⊥ zur Strahlerachse muß als Beugungsfigur an der "Apertur" (= Öffnungsfläche) des Wandlers aufgefaßt werden, die hier in die Brennebene abgebildet wird!

es ist: unter Betrachtung der Intensität J in der Brennpkt.umgebung

$$\frac{J_{max}}{J_0} = \left(\frac{\pi a^2}{\lambda f'}\right)^2$$

J_0: Sendeintensität eines ausgedehnten ebenen Strahlers gleicher Schnelle (s. Abb. oben)



Ausdehnung

$$r_0 = 0{,}257 \frac{\lambda f'}{a}$$

f': Brennweite

a: Aperturradius

Länge des Brennflecks

$$l_f \approx 1{,}8\,\lambda \left(\frac{f'}{a}\right)$$

$$J(z) \approx J_{max} \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$$

$\sin c^2$-Fktn.

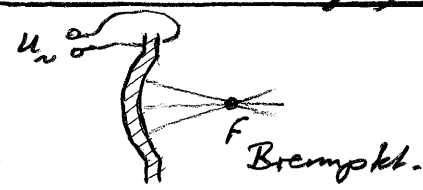
mit $u = \frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{f'}\right)^2 \frac{z'}{\lambda}$

z'-Entfernung vom Brennpunkt

Örtliche Verteilung der Schallintensität in der Nähe des Brennpunkts.

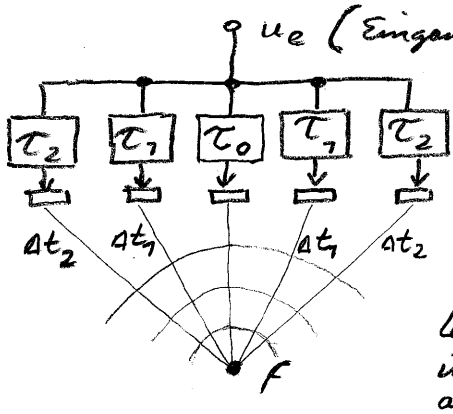
Fokusschwinger (auch: "Kalottenschwinger")

sind Piezowandler in Form einer Kugelkalotte



Dickenschwinger

Dynamische Fokussierung mit Linienarrays



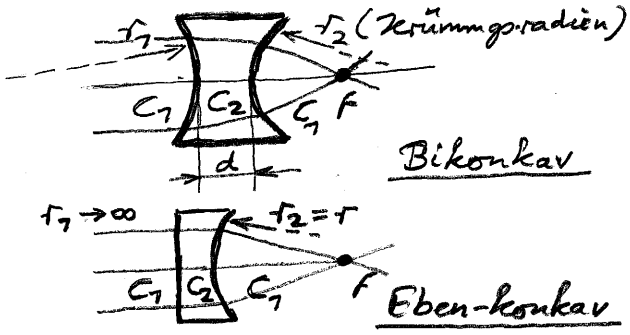
← Laufzeit-(Verzögerungs) Elemente

← Multielementwandler (zB. Linienarray, Matrix)

Laufzeitunterschied jedes Elements im Brennpkt. f auf $\Delta s_i = 0$ eingestellt $\boxed{\Delta t_i = \frac{\Delta x_i}{c} = \frac{\Delta \lambda_i}{c}}$

Bei Linienarrays wird die 2. Ebene mit Zylinderlinsen fokussiert (medizin. Diagnostik)

Brennweiten akust. Linsen



$$f = \frac{r_1 \cdot r_2}{\left(1 - \frac{c_1}{c_2}\right) \cdot \left[d\left(\frac{c_2}{c_1} - 1\right) - r_1 + r_2\right]}$$

$$f = -\frac{r}{\frac{c_1}{c_2} - 1}$$

neg. Vz. ≙ virtuellem Brennpkt. einer konvexen Linse; Krümmungsradius neg. angenommen.

Schallschwächung

infolge:
- **Absorption** (irreversible Energieumwandlung / reversible ~ mit nicht phasensynchr. Energ.rückführung)
- Schallfeldgeometrie (zB. bei Kugelwelle Energieabnahme mit $1/r^2$)
- Reflexion an Grenzflächen (auch Brechung, ... zB. an den Oberflächen der Meßobjekte selbst)
- **Streuung** an Inhomogenitäten

Für Absorption und Streuung gilt bekanntermaßen:

(!) meist Druckwandler als Empfänger ben.

für Schalldruck $p(x) = p_0 \cdot e^{-\alpha x}$

für Intensität $J(x) = J_0 \cdot e^{-2\alpha x}$

$(-\alpha \cdot x)$ = "Extinktion"

x - Schichtdicke

α - Schwächungskoeffiz.

$\alpha = \alpha_{Absorption} + \alpha_{Streuung}$!

Physikalische Ursachen der Absorption

- ~ durch Viskosität: (Zähigkeit infolge innerer Reibung)

$$\boxed{\alpha_\eta = \frac{8}{3} \cdot \frac{\pi^2 \cdot \eta}{\lambda^2 c_0}}$$

η = Zähigkeit, Viskosität, Koeffizient der inneren Reibung (Kohäsionskräfte in Flüssigkeiten u. Gasen!)

- ~ durch Wärmeleitung: (Druck- → Dehnungsgebiete der Welle ↯ Wärmetransport)

$$\boxed{\alpha_t = \frac{2\pi^2(\varkappa - 1)}{\lambda^2 \cdot c \cdot \varrho \cdot c_{wp}} \vartheta_w}$$

$\varkappa$ – Adiabatenkonstante
ϑ_w – Wärmeübergangskoeffizient
c_{wp} – spezifische Wärmekapazität bei p = const.

Bei Flüssigkeiten ist α_t sehr klein bei Gasen infolge der geringen Atomdichte und ↯ höheren mittl. Bewegungsgeschwindigkeit der Teilchen wesentlich größer!

- ~ durch Relaxation:

Schallenergie wird vorübergehend in Strukturenergie überführt (Translation, Rotation, Schwingungen von Atomen / Molekülen)

(!) Der "Gemeinsame Absorptionskoeffizient": $\boxed{\alpha_{Absorption} = \sum \alpha_i}$
ist die Summe der Einzelwirkungen α_i unabhängig vom physikal. Entstehungsprinzip.
Für die Anteile α_η und α_t gilt speziell die quadratische Frequenzabhängigkeit:
(vgl. Glngen oben: $f = \frac{c}{\lambda}$)

$$\boxed{\frac{\alpha_\eta + \alpha_t}{f^2} = \text{const.}} \qquad \text{dh. } \alpha \sim f^2$$

(Abweichungen infolge Relaxations-/Streuprozess.)

Allg. Dämpfungsangabe (Tabellenwert)

Dämpfungsmaß wird oft angegeben.

$$\boxed{D = 20 \cdot \alpha \cdot \log e \, \frac{dB}{m} \approx 8{,}69\,\alpha \; dB/m}$$

≙ anschaulicher Angabe: Abnahme des Schalldruckpegels in dB pro Wegeinheit.

folgt aus: $p(x) = p_0 \cdot e^{-\alpha x}$

$$L_N = 20 \log \frac{p_0 \cdot e^{-\alpha \cdot x}}{p_0} \; dB$$

$x = 1m$ ↯ $D = 20 \cdot \alpha \cdot \log e \; \frac{dB}{1m}$

Schallabsorptionskoeffizienten Tabellen

Tabelle *Errechnete und experimentell ermittelte Schallabsorptionskoeffizienten von Flüssigkeiten*

Flüssigkeit	*errechnet*			*experimentell*		
	Absorptionskoeffizient bedingt durch Viskosität $(\alpha_\eta/f^2)\cdot 10^{19}$	Absorptionskoeffizient bedingt durch Wärmeleitung $(\alpha_t/f^2)\cdot 10^{19}$	$[(\alpha_\eta+\alpha_t)/f^2]\cdot 10^{19}$	Absorptionskoeffizient $(\alpha/f^2)\cdot 10^{19}$	Frequenz f	Temperatur T
	s^2/m	s^2/m	s^2/m	s^2/m	MHz	K
Sauerstoff	7,3	1,0	8,3	8,6	44,4	60
Stickstoff	6,6	2,9	9,5	10,6	44,4	73,9
Argon	7,9	2,6	10,5	10,1	44,4	85,2
Quecksilber	—	—	5	5,3	20	293
Wasserstoff	3,7	2,1	5,8	5,6	44,4	17
Chloroform	10,045	0,057	10,1	396	bis 100	293
Toluen	7,56	0,28	7,84	80	bis 200	293
Wasser	8,2	0,0064	8,2	25,3	bis 250	293

Tabelle *Errechnete und experimentell ermittelte Schallabsorptionskoeffizienten von Gasen*

Gas	*errechnet bei* 0 °C			*experimentell*		
	Absorptionskoeffizient bedingt durch Viskosität $(\alpha_\eta/f^2)\cdot 10^{15}$	Absorptionskoeffizient bedingt durch Wärmeleitung $(\alpha_t/f^2)\cdot 10^{15}$	$[(\alpha_\eta+\alpha_t)/f^2]\cdot 10^{15}$	Absorptionskoeffizient $(\alpha/f^2)\cdot 10^{15}$	Frequenz f	Temperatur T
	s^2/m	s^2/m	s^2/m	s^2/m	MHz	K
Sauerstoff	1,16	0,49	1,65	1,68	0,6	293
Stickstoff	0,94	0,39	1,33	1,35	0,6	293
Argon	1,08	0,77	0,77	1,9	4,25	293
Helium	0,309	0,216	0,525	2,96	0,6	291
Wasserstoff	0,25	0,22	0,47	3,58	0,6	293
Neon	1,07	0,75	1,82	5,82	0,304	292
Kohlendioxid	1,09	0,31	1,40	5,0	1	295
Schwefeldioxid	1,10	0,27	1,37	42	1,4	293
Ammoniak	0,45	0,11	0,56	1,04	3,6	293

Streuung an Inhomogenitäten

infolge Wechselwirkung mit Inhomogenitäten (Teilchen), deren Abmessungen im Bereich der Wellenlänge λ liegen, erfolgt Ablenkung eingestrahlter Wellen in alle Raumrichtungen!

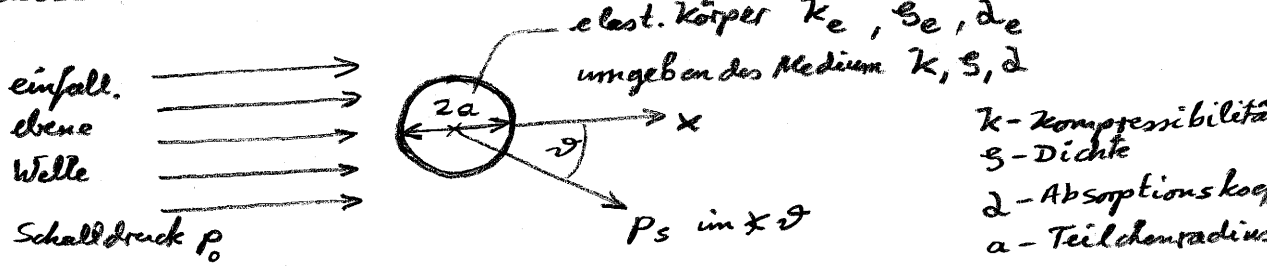
↓ Interferenzen der Streuwellen mit eingestrahlter Welle (Schallfeldauffächerung ...)

Streuzentren sind Materialinhomogenitäten von

- elastischen Größen κ, E, (ϑ, μ)
- Dichte ϱ
- Absorption α

Auch Eigenresonanzen der elastischen Streuzentren rngl.

In erster Näherung gilt:
an den Kanten / Begrenzung von Teilchen entstehen Beugungswellen (Sekundärwellen), diese interferieren mit der einfallenden (ebenen) Welle.
Je nach Teilchengröße (im Verhältnis zu λ) ist die Interferenzwirkung dieser Anteile verschieden ...



Streucharakteristik elastischer Kugeln ist durch die Winkelabhängige Streufunktion $\Theta(\vartheta)$ angebbar (Morse u. Ingard)

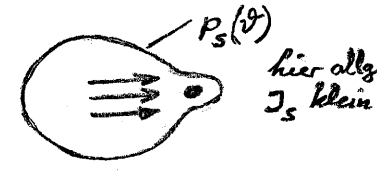
$$p_s(x,\vartheta) = p_0 \cdot \kappa_F \frac{e^{jkx}}{x} \cdot \Theta(\vartheta)$$

κ_F - beleib. Korrekturfaktor für $\hat{p}_s$

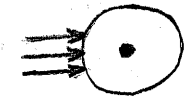
k - Wellenzahl $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$

Dies ist "übersichtlich" für schallharte Kugeln berechenbar:
s. Šutilov, S. 763 ff, Ergebnis ist für ...

Rückwärtsstreuung (Rayleigh-Streuung)
$k \cdot a \ll 1$, dh. $a \ll \lambda$ "kleine Kugeln"
hier Überlagerung von Beugungs- und einfallender Welle → Auslöschung im "Schallschatten"!



≈ Gleichverteilung (Geometrische Streuung)
$k \cdot a \gg 1$, dh. $a \gg \lambda$ "große Kugeln"
hier bestimmt die makroskopische Reflexion an der sphärischen Oberfläche die Streufktn.



Vorwärtsstreuung (Mie-Streuung)
$k \cdot a$ im Bereich $\frac{1}{\pi}$ ... ≈ 700
hier überwiegt die Beugungswelle im Schallschatten.
Das λ/a - Verhältnis liefert Oszillationen der Streuintens.

Schwingungen elastischer Streukörper

Max. der Oberflächenschwingungen für eine Kugelwelle im Streukörper (nach Malecki) bei Resonanzfrequenz f_0

- für Streukörper in Flüssigkeit

a - Teilchenradius

$$\boxed{f_0 = \frac{c_e}{2\pi a}\left(\frac{\varrho_e}{\varrho}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

mit $c_e = \frac{1}{\sqrt{\varrho_e \cdot k_e}}$

c_e, ϱ_e im Streukörper
ϱ im "Lösungsmittel"

- für Gasblase in Flüssigkeit beim hydrostatischen Druck p_{st}

$$\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi a}\left(\frac{3\varkappa p_{st}}{\varrho}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

↯ Verstärkung der Streuung bei Resonanz um Größenordnungen!
(zB:) Echolotung v. Fischen
Resonanz ≙ Schwimmblasen Ø der Fische (artabhängig)

Streufunktion an komprimierbaren kleinen Kugeln ($ka \ll 1$) nach RAYLEIGH

winkelabhäng. rotationssymmetrisch

$$\boxed{\Theta(\vartheta) = \frac{p_s(\vartheta)}{p_0} \approx \frac{1}{3}k^2 a^3 \left(\underbrace{\frac{k_e - k}{k}}_{\text{Kompressibilität } \boxed{a}} + \underbrace{\frac{3\varrho_e - 3\varrho}{2\varrho_e + \varrho}}_{\text{Dichte } \boxed{b}} \cdot \cos\vartheta\right)}$$

$k \cdot a \ll 1$, fast immer gültig in der akust. Meßtechnik!

Fktn. von ... $\boxed{a}$ Kompressibilität $\boxed{b}$ Dichte

Rayleigh zeigte, daß für Teilchen $\ll \lambda$ verschiedener Gestalt die Streuverteilung durch die Streuung kleiner elastischer Kugeln gleichen Volumens angenommen werden kann!

Beispiel-Meßergebnisse:

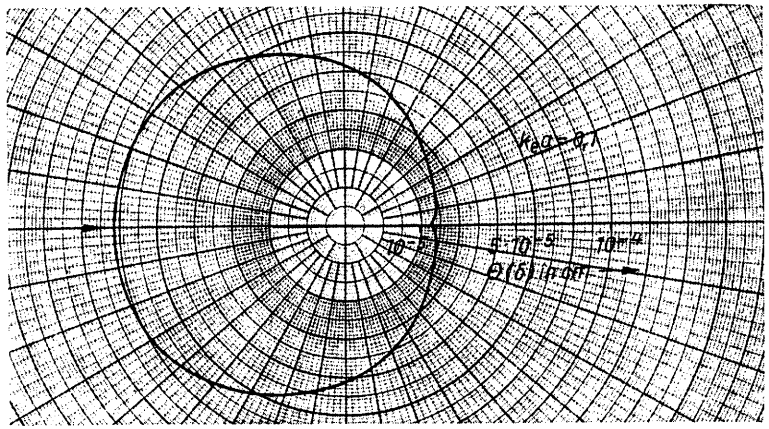
- US-Streuung an einem Erythrozyten (rote Blutkörperchen) bei 10 MHz mit jew. Phasenlagen

Streuverteilung elast. Kugeln, Erythrozyten

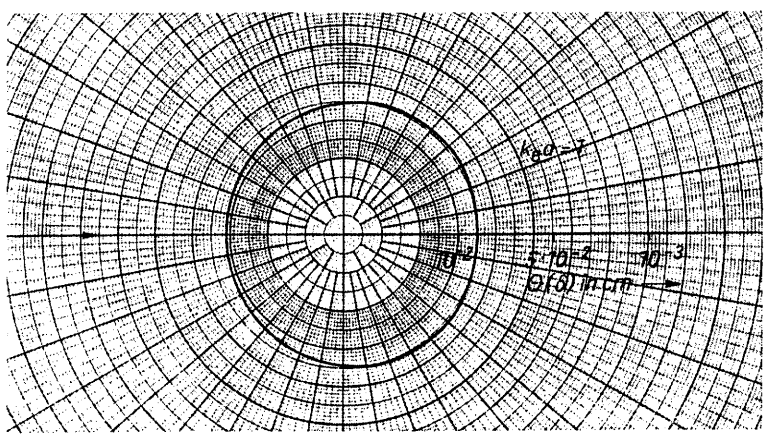
- Vergleichsweise mit Inhomogenitäten der Dichte / Kompressibilität / Absorption (Normstreuer-Auswahl)

↯ Ergebnis:

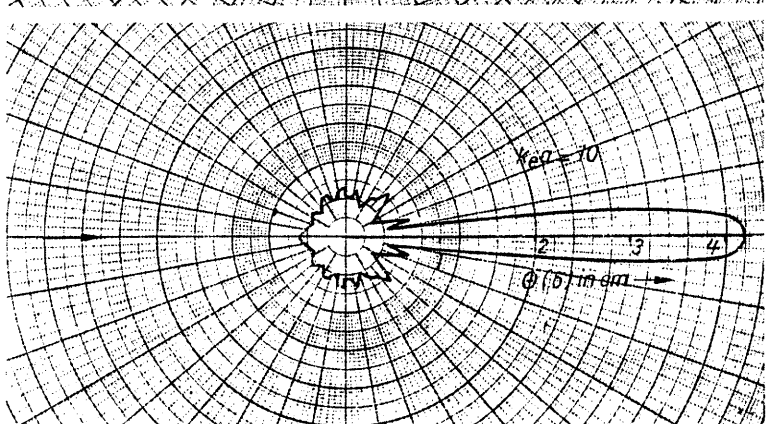
- Inhomogenitäten von k und a : Streuung hat Monopolcharakter, $\approx \neq f(\vartheta)$ es entstehen Kugelwellen, infolge Wirkung des Huygenschen Prinzips an Grenzflächen
- Inhomogenitäten von ϱ : erzeugen Dipolstrahlung, infolge auftretender Phasenverschiebung der Schwingung gegenüber dem umgebenden Medium



$k_e \cdot a = 0{,}1$

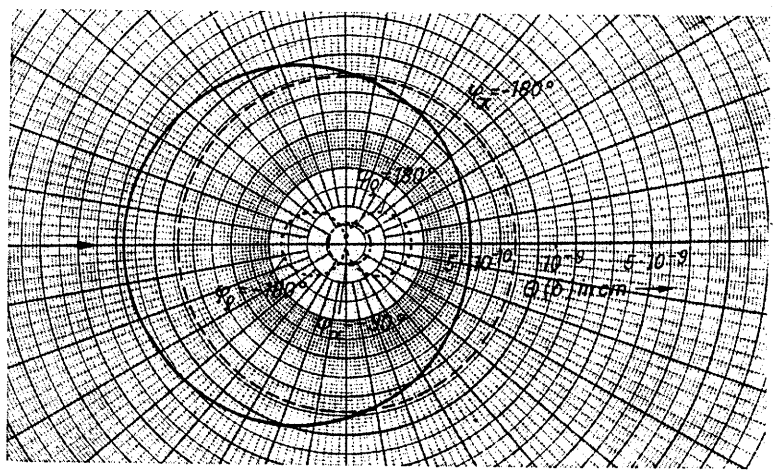


$k_e \cdot a = 1$



$k_e \cdot a = 10$

Winkelabhängige Streuverteilung elastischer Kugeln mit $\varrho_e/\varrho = 2$ und $k_e/k = 0{,}5$ für $k_e a = 0{,}1$; 1 und 10



Ultraschallstreuung an einem Erythrozyten bei 10 MHz und reiner Inhomogenität der Kompressibilität ΔK^* (- - - -), der Dichte $\Delta\varrho$ (. . .), der Absorption $\Delta\alpha$ (— · —) und aller drei Komponenten (———) mit den Werten des umgebenden Serums ($\varrho = 1{,}03$ g/cm³, $K^* = 4{,}09 \cdot 10^{-12}$ m²/N, $\alpha = 0{,}056$ cm⁻¹) und des Erythrozyten ($\varrho_e = 1{,}06$ g/cm³, $K_e^* = 3{,}41 \cdot 10^{-12}$ m²/N und $\alpha_e = 0{,}56$ cm⁻¹ mit $a = 2{,}05 \cdot 10^{-4}$ cm)

7-36a

Streuquerschnitt Q (Betrachtung für Flüssigkeiten u. Gase)

Die aus der Bewegungsrichtung einer ebenen Welle herausgestreute Energie führt zu einer Intensitätsabnahme über dem Weg dx.

- für $\lambda \gg$ Streukörper gilt: (Rayleighstreuung)

$$-\frac{dJ}{J} = \underbrace{n \cdot Q_s}_{2 \cdot \alpha_{str}} \cdot dx \qquad \left(\frac{dJ}{dx} = -J \cdot n \cdot Q_s\right)$$

α_{str} – auf Schalldruck bezogener Schwächungskoeffizient

Q_s – Streuquerschnitt

n – Streuteilchen/Volumen

Integration dieser DGL führt auf exp. Abnahme von J mit dem Schwächungskoeffizienten infolge Streuung $\alpha_{str} = \frac{n \cdot Q_s}{2}$:

$$\boxed{J(x) = J_0 \cdot e^{-2\alpha_{str} \cdot x}}$$

...formal gleiche Darst. wie für Absorption!

$$\boxed{\text{allg. wächst } Q_s \text{ mit } f^4 \text{ bzw. mit } a^6 \quad (!)}$$

dh. • Frequenz-Abhängigkeit!
• Teilchenradius-Abhängigkeit! (vgl. folg. Seite)

- für $\lambda \lesssim$ Streukörper ist α_{str} bzw. Q_s auch von der Form der Streukörper abhängig und steigt nur noch mit f^2 und proportional mit a!

⇒ **Zur Vereinfachung der Betrachtung** bei veränderl. Streucharakteristiken $= f(f, a, \text{Teilchenform}, Z_0\text{-Verhältnisse})$ wird der Streuquerschnitt Q eingeführt:

Def. $$\boxed{\text{Streuquerschnitt } Q_s = \frac{P_s}{J_0}}$$
(äquivalenter ~)

P_s – gesamte gestreute Leistung

J_0 – Intensität der einfallenden Welle am Ort des Streukörpers

Bem: $J = \frac{P}{A}$ $\quad [Q] = 1m^2$ Dim. einer Fläche!

$\boxed{Q_s}$ kennzeichnet die Leistungsauskopplung aus einer ebenen eingestrahlten Welle in den Raum ↷ Anwendung zur Darstellung der Intensitätsschwächung.

Vorstellung: Streuteilchen als kleine starre Kugel ersetzt, unter Bezug auf den visuellen Querschnitt πa^2, entsteht der (äquivalente) Streuquerschnitt, wobei hier nur L-Wellen betrachtet werden (Flüss. + Gase)

Def. $$\boxed{\text{Rückstreuquerschnitt } Q_r = 4\pi r^2 \cdot \frac{J_{sr}}{J_0}}$$

J_{sr} – am Ort der Schallquelle auftr. Intensität des rückgestreuten Streuanteils

Bem: • Abstand r > Nahfeldabstand des Streuteilchens ist vorausgesetzt (keine Interferenzen)
• für Q_r wird eine Kugelwelle als Primärwelle (J_0) vorausgesetzt ($A = 4\pi r^2$)

$\boxed{Q_r}$ kennzeichnet die vom Streuteilchen zur Schallquelle zurückgestreute Intensität ↷ Anwendung bei Fehlererkennung/Materialprüfung u. Ortung

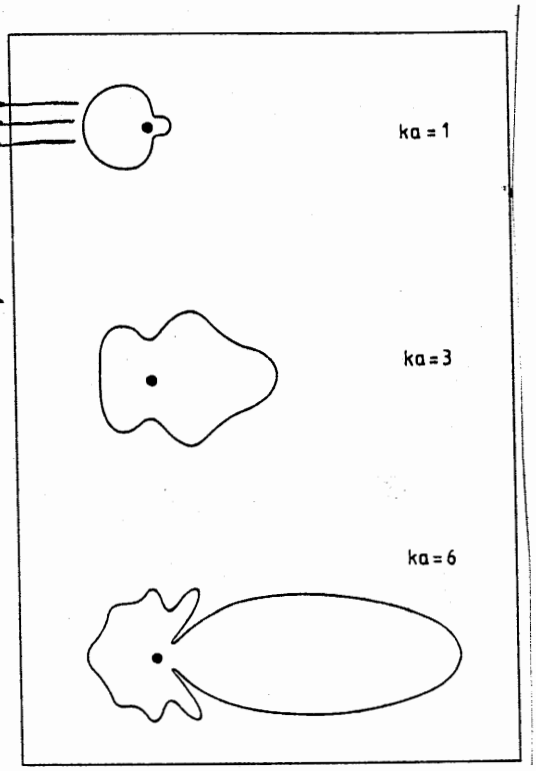
s. folg. Seite: Diagramm $\boxed{\text{Streuquerschnitt } Q_s = f(k \cdot a) \text{ für schallharte- u. schallweiche Kugeln}}$

zB. ↷
- schallweiche Gasbläschen in H_2O behindern Schallausbreitung stark!
- schallharte Wassertröpfchen in Luft –"– weniger!

Bereich d. Mie-Streuung:

≙ 3 versch. Frequenzen:

Vorwärtsstreuung (↷ Schattenbildung) ↑ mit f↑



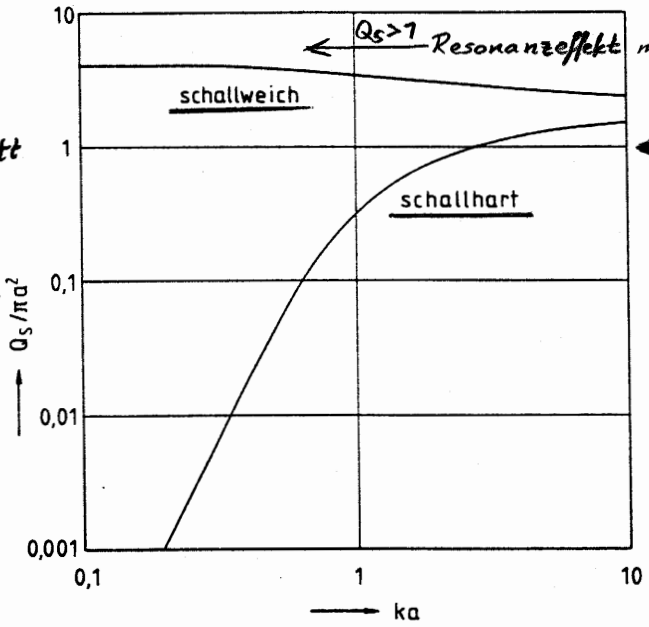
Betrachtung: ↓ f steigt vergleichsweise bei a = const.

Richtungsverteilung des Schalldrucks in der von einer schallharten Kugel erzeugten Beugungs- oder Streuwelle. Schallwelle fällt in Form einer ebenen Welle von links ein.

Streuquerschnitt

$$Q_s = \frac{P_{Streu}}{J_0}$$

$$\left[\frac{\text{Streuleistung}}{\text{einfall. Intens.}}\right]$$



$Q_s > 1$ ← Resonanzeffekt mit starker Streuwelle! Teilchen ≙ Blasen mit Federcharakter

← visuelle (geometr.) Querschnittsfläche πa^2 des Teilchens

Q_s wächst für $ka \ll 1$ mit f^4! (Rayleigh-Str.)

Streuquerschnitt einer schallharten und einer schallweichen Kugel als Funktion von ka.

Grenzwerte des Streu- und Rückstreuquerschnitts der starren Kugel und Kreisscheibe (Radius a), bezogen auf den visuellen Querschnitt πa^2.

Objekt		Normierter Streuquerschnitt	Normierter Rückstreuquerschnitt
Kugel	$ka \ll 1$	$\frac{7}{9}(ka)^4$	$\frac{25}{9}(ka)^4$
	$ka \gg 1$	2	1
Kreisscheibe (⊥ Schalleinfall)	$ka \ll 1$	$\frac{16}{27\pi^2}(ka)^4$	$\frac{16}{9\pi^2}(ka)^4$
	$ka \gg 1$	2	1

Inkohärente Streuung:

Streuanteile statistisch verteilter Inhomogenitäten können wenn der Abstand der Streuer $\gg \lambda$, dh. auf die einzelnen Streuer ist die Wirkung der Streuanteile benachbarter Teilchen vernachlässigbar, als Addition der Intensitäten jedes Einzelstreuers zusammengefaßt werden!

so gilt Intensitätsverhältnis für $ka \ll 1$:

$$\boxed{\frac{J_{streu}}{J_0} = \frac{1}{9} N V \frac{k^4 \cdot \bar{a}^6}{x^2} \left| \boxed{a} + \boxed{b} \cos\vartheta \right|^2}$$

{aus (4)(29) S. 1-36

N – Anzahl der Streuteilchen
V – Volumen des Streubereichs
$\bar{a}$ – ev. Radiusmittelwert (aus T.volumen)

da $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

erkennbar:
$J_{streu} \sim (\text{Teilchenradius } a)^6$
$\sim \frac{1}{\lambda^4}$

Diese Zunahme der Streuintensität mit $1/\lambda^4$ bezeichnet man als RAYLEIGH-Streuung, wobei hier (Inkohärente Streuung) die Intensität proportional mit der Anzahl der Streuer N ansteigt.

Achtung!: Streueffekte können zur Verfälschung des Absorptionskoeffizienten α_{Abs} führen! meßbar als frequenzabhängige Schallschwächung:

zB.:
- Rayleigh-Streuung : $\alpha \sim f^4$ für $k\bar{a} \ll 1$
- Stochastische – ~ : $\alpha \sim f^2$ für $k\bar{a} \gtrsim 1$
- Diffuse – ~ : $\alpha \sim \frac{1}{\bar{a}}$ für $k\bar{a} \gg 1$

Diffuse Streuung: tritt bei Schallimpulsen kleiner Interferenzlänge auf, entsteht wesentlich durch Reflexionserscheinungen der Einzelstreuer.

! Streuung führt zur Verteilung der Energie einer eingestrahlten Welle in den Raum, während Absorption die Energieumwandlung im Stoff darstellt.

Kohärente Streuung:

Streuer sind in regulären Abständen im Raum angeordnet: Anregung zu gleichphasigen Schwingungen bzgl. der Festkörperoberfläche mgl.:
zB. an Kristallgittern bei best. ϑ_{ein} und λ/d – Verhältnis "Bragg-Reflexion" von Röntgenstrahlen

Nichtlineare Effekte

(1) Ableitung der Wellengleichung gilt nur für sehr kleine Schallamplituden $\hat{\xi}$ (bzw. entspr. kleine Schallschnelle u)

Der Schalldruck ist $p = f(\varrho, T)$, damit wird die Schallgeschw. $\boxed{c = \sqrt{\varkappa \frac{dp}{d\varrho}}}$ in der praktischen Realität

↷ abhängig von der
- momentanen Dichte, und damit vom
- momentanen Druck u. moment. Schnelle des bewegten Teilvolumens!

(2) c_0 (für kleine ξ) gilt für die Schallgeschwindigkeit im ruhenden Medium!

Aber: Schallwelle ≙ zeitlich/örtlicher Strömung des Mediums selbst (deren Geschwindigkeit = Schallschnelle)

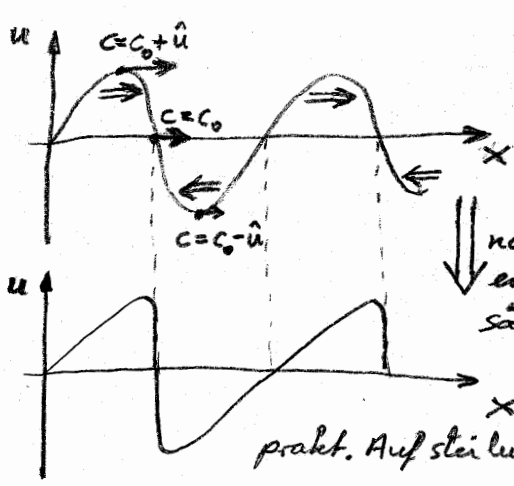
↷ Schallwelle wird durch sich selbst "verweht" und es wird allgemein für verschiedene Pkte. des Schallfeldes:

$$\boxed{c = \sqrt{\varkappa \frac{dp}{d\varrho}} + \text{Schallschnelle } u \text{ (Konvektion)}}$$

Hieraus ergeben sich folg. Effekte:

a.) Wellenaufsteilung mit Laufweg x

mit $p\uparrow$ auch Erhöhung von c! ↷ verschiedene lokale Phasengeschwindigkeit für jede gegebene Phase der Welle! → p und u sind phasengleich! Dies erzeugt eine in Ausbreitungsrichtung sich entwickelnde Verzerrung der Welle.



⇓ nach einem Laufweg x_s entsteht damit eine sägezahnförmige Vorderfl. ≙ "Stoßwelle"

} Die mittlere c ändert sich nicht, da Kompensation der Zu- und Abnahme

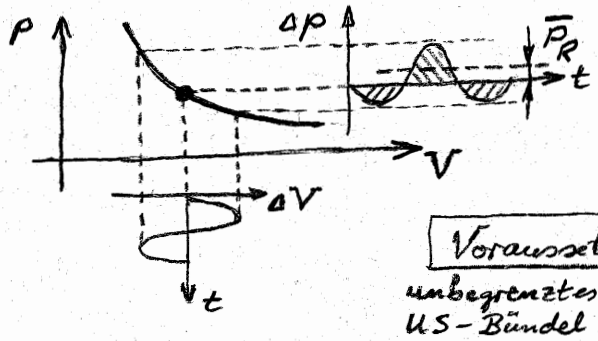
prakt. Aufsteilung i.a. gering, da $1/f^2$-Absorption entgeg. wirkt

b.) RAYLEIGH'-scher Schallstrahlungsdruck (in Gasen)

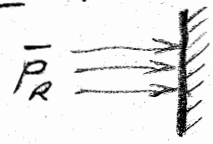
ebenfalls durch die Nichtlinearität von $c^2 = \varkappa \frac{dp}{d\varrho}$ begründet.

So liefert eine adiabatische Zustandsänderung im p-V-Diagramm einen nichtlinearen Verlauf!
Nur in Medien mit amplitudenabhängiger Kompressibilität (keine Flüssigkeiten). Es entsteht eine Gleichkomponente des Schalldrucks $\overline{p}_R$ aus der zeitlichen Mittelung (Integration) über $p(t)$:

↳ "Ultraschallwind" (= "Quazwind") in Gasen



Wirkung: auf Wand wirkt Druck $\overline{p}_R$:



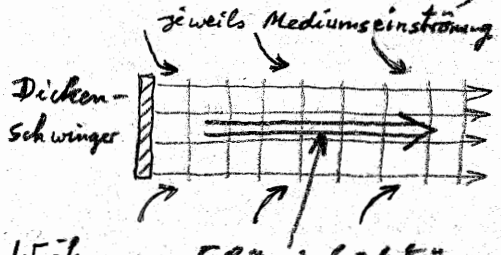
$\overline{p}_R \sim$ Energiedichte $\overline{w}_D$ des Schallfeldes.

Voraussetzung:
unbegrenztes Schallfeld oder durch feste Wände begrenztes US-Bündel ↳ keine Medieneinströmung von der Seite her mgl.!

ZB H_2O-Tropfen schwebt in Luft bei Schallwechseldruck $\geq 168\,dB$ (bei 20 kHz)

c.) LANGEVIN'-scher Schallstrahlungsdruck (in Flüssigkeiten)

folgt aus Konvektionsglied, dh. der Verschiebung der Mediumsteilchen in der Welle, Nur in Medien mit amplitudenunabhängiger Kompressibilität (zb. Flüssigkeiten). An allen Grenzschichten zu beobachten.



Voraussetzung:
Schallbündel im freien Schallfeld (dh. ~ umgeben von ruhendem Medium)
Es entsteht in der Schallwelle ein Unterdruck so daß Materie aus dem ruhenden Medium einströmt, bis Gleichgewicht entsteht.

Wirkung: Flüssigkeitsströmung!
Infolge Absorption (≙ Verringerung der Energiedichte $\overline{w}_D$) wird wieder ein Teil des nachgeströmten Mediums freigesetzt und erzeugt einen Druck der in Richtung des Energiedichtegefälles wirkt ↳ Flüssigkts.-Strömung entsteht

ebene Welle in x-Richtung. $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x}$ unter Einsetzen von p und ϱ

und Umformungen folgt $p = -\varrho_{gas} \cdot u^2 - \int \underbrace{\frac{\partial(\varrho_{gas} \cdot u)}{\partial t}}_{} dx$

bei einer zeitlichen Mittelung wird Ausdruck ... = 0 !

↳ Es entsteht ein Unterdruck $\boxed{\overline{p}_L \approx -\varrho \cdot \overline{u}^2 = -\overline{w}_D}$ ≙ "Schallstrahlungsdruck" $\neq f(x,t)$; const.

! (numerisch gleich der Energiedichte $\overline{w}_D$)

mit Intensität $J = \overline{w}_D \cdot c_0$

↳ • Strahlungsdruck auf "irgendeine" Fläche im Schallfeld: $\boxed{\overline{p}_L = \overline{w}_D = \frac{J}{c_0}}$
"fiktive" Fläche im Medium (senkrecht durchstrahlt, nicht reflektierend)

• Für ebene, senkrechte, vollständig reflektierende Fläche mit Faktor 2 für Strahlgdruck (Verdoppelung des Impulses): $\boxed{\overline{p}_{Lr} = 2\overline{w}_D = 2\frac{J}{c_0}}$

$\Delta p = \varrho \frac{\partial u}{\partial t} \neq 0$

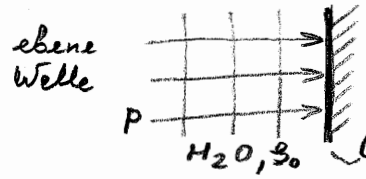
Phys. Wirkungen hierzu : Strömungseffekte
Sprudelbildung → Zerstäubung durch u↑
Fontänenbildung

(Bild US-Sprudel)

(!) **Rayl.- und Langevin'scher Schallstrahlungsdruck sind konstante und gerichtete Gleichdrücke!**

(im Gegensatz zum Schall(wechsel)druck p)

Beispiel zu Langevin'schem Str. druck:



es wirkt auf parallel zur Wellenfront liegende Fläche:

$$\boxed{\overline{p_L} = \varrho_0 \cdot \tilde{u}^2 = \frac{\varrho_0 \cdot \hat{u}^2}{2}}$$

(!) zeitl. Mittelw. = Effektivwert; ebenso ist J ein zeitl. Mittelwert

Wand nicht reflektierend (dh. absorbierend)

(zB:)

in H_2O für $\hat{p} = 10^5\,Pa$ $\hat{=}$ $J = \frac{\hat{p}^2}{2\varrho_0 c_0} = \frac{10^{10}\,N^2}{2 \cdot m^4 \cdot 1{,}48 \cdot 10^6\,Ns}$ $\frac{m^3}{}$

$$J \approx 0{,}34\,\frac{W}{cm^2}$$

$1\frac{N}{m \cdot s} = 1\frac{W}{m^2}$

wird

$$\overline{p_L} = \frac{J}{c_0} = \frac{3400\,Ws}{1480\,m \cdot m^2}$$

$1\frac{Ws}{m^3} = 1\frac{N}{m^2}$

$$\overline{p_L} \approx 23 \cdot 10^{-1}\,Pa$$

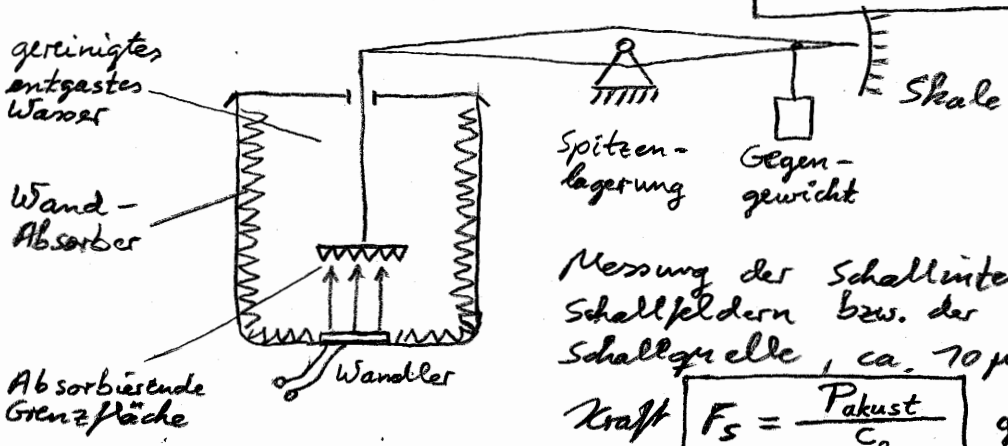
dh. betragsmäßig 10^6 fach kleiner als der erzeugende Schallwechseldruck!

Sehr schwer meßbar, da:
Einflüsse von Reflexionen, Flüssigkeitsströmungen ...
Zumindest vollst. absorbierendes Hindernis erforderlich, sonst zusätzlich stehende Wellen usw.

Anwendung : Strahlungskraftwaage

Messung der von US-Wandlern erzeugten Energie(dichte) bzw. Schalldruck p über den Schallstrahlungsdruck $\overline{p_L}$ an voll absorbierender Grenzfläche:

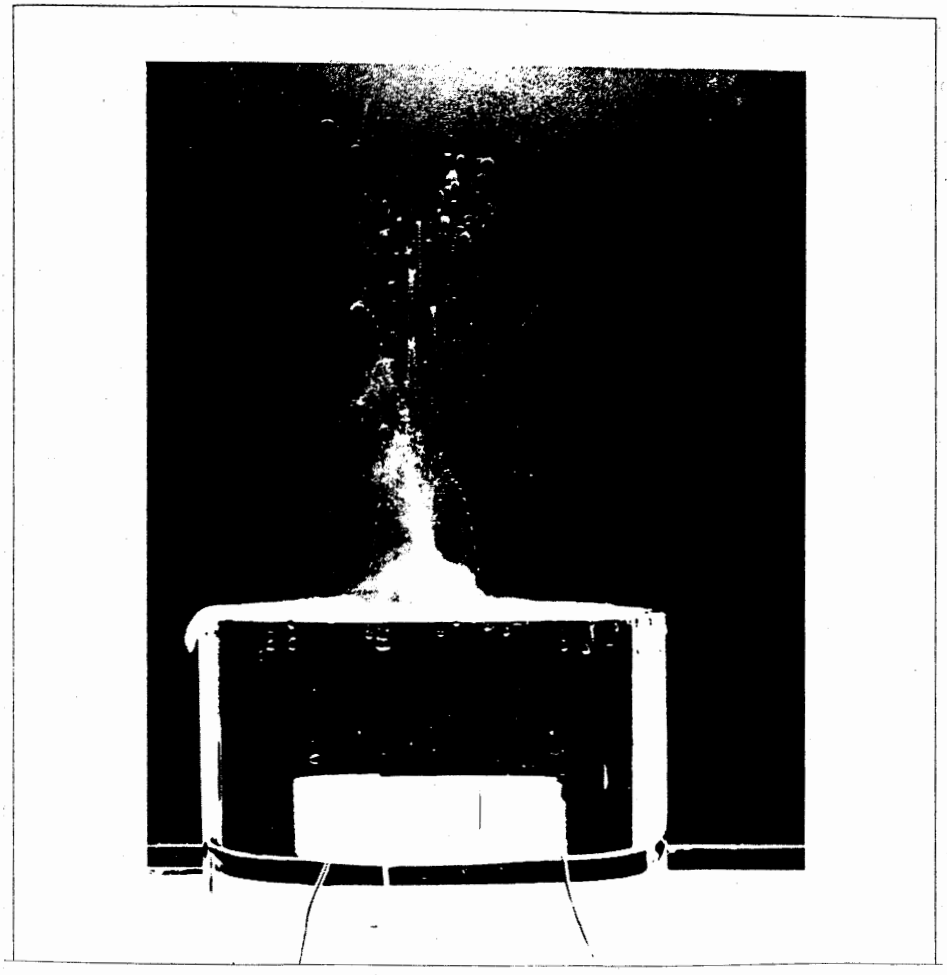
$$\boxed{\overline{p_L} = \overline{w_D} = \frac{J}{c_0}}$$



Messung der Schallintensität in stationären Schallfeldern bzw. der Gesamtleistung einer Schallquelle, ca. 10 µW ... 10 W mgl., wobei

Kraft $\boxed{F_S = \frac{P_{akust}}{c_0}}$ gebündelter Strahl, vollständig absorbiert

bei Schräglage der Grenzfläche um ∡ϑ ↓ Wirkung von $F_S \cdot \cos^2\vartheta$



Ultraschallsprudel u. Nebelbildung

- nach oben gerichteter Strahlungsdruck auf freie Flüssigkeitsoberfläche hebt diese an.
- wird J groß genug, so reißen infolge der hohen Schallschnelle an der Oberfläche Tröpfchen aus der Flüssigkeit heraus.